

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. LEPINGLE

Applications p -sommantes ; inégalité de Pietsch ; factorisation

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 7, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A7_0>

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

APPLICATIONS p -SOMMANTES ; INÉGALITÉ DE PIETSCH ; FACTORISATION

=====

par D. LEPINGLE

Exposé N° 7

15 Décembre 1969

§ 1. DEFINITION ET PROPRIETES ELEMENTAIRES DES APPLICATIONS (p,q)-SOMMANTES

Définition : Soient une application linéaire T d'un espace normé E dans un espace normé F, et deux réels $0 < p, q < +\infty$. On dit que T est (p,q)-sommante s'il existe un nombre $\rho > 0$ tel que pour toute famille finie x_1, \dots, x_k d'éléments de E on ait l'inégalité :

$$\left(\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^q \right)^{1/q} \leq \rho \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p}$$

où \mathcal{E}' est la boule unité fermée du dual E' de E.

On note $\pi_{p,q}(E,F)$ l'ensemble des applications (p,q)-sommantes et $\pi_{p,q}(T)$ le plus petit ρ vérifiant l'inégalité ci-dessus.

Proposition (VII; 1,1)

$\pi_{p,q}(E,F)$ est un espace vectoriel de norme $\pi_{p,q}(\cdot)$ si $q \geq 1$, de q-quasi-norme $\pi_{p,q}(\cdot)$ si $0 < q < 1$.

Démonstration : Montrons simplement l'inégalité triangulaire.

Soient $S, T \in \pi_{p,q}(E,F)$.

$$\begin{aligned} \text{Si } q \geq 1, \quad \left(\sum_{i=1}^k \|(S+T) x_i\|^q \right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{i=1}^k (\|S x_i\| + \|T x_i\|)^q \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k \|S x_i\|^q \right)^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^q \right)^{1/q} \\ &\leq (\pi_{p,q}(S) + \pi_{p,q}(T)) \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } 0 < q < 1, \quad \sum_{i=1}^k \|(S+T) x_i\|^q &\leq \sum_{i=1}^k (\|S x_i\| + \|T x_i\|)^q \\ &\leq \sum_{i=1}^k \|S x_i\|^q + \sum_{i=1}^k \|T x_i\|^q \\ &\leq ((\pi_{p,q}(S))^q + (\pi_{p,q}(T))^q) \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{q/p} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } (\pi_{p,q}(S+T))^q \leq (\pi_{p,q}(S))^q + (\pi_{p,q}(T))^q$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII; 1,2)

- a) Si $p > q$, $\pi_{p,q}(E,F) = \{0\}$
 b) Si $T \in \pi_{p,q}(E,F)$, alors T est bornée et $\|T\| \leq \pi_{p,q}(T)$
 c) Si F est complet, $\pi_{p,q}(E,F)$ est complet
 d) Si $S \in \pi_{p,q}(F,G)$ et $T \in L(E,F)$, alors $ST \in \pi_{p,q}(E,G)$
Si $S \in L(F,G)$ et $T \in \pi_{p,q}(E,F)$, alors $ST \in \pi_{p,q}(E,G)$

Démonstration

- a) Il suffit de prendre $x_1 = \dots = x_n = x \neq 0$

$$\left(\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^q \right)^{1/q} = k^{1/q} \|T x\|$$

$$\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} = k^{1/p} \|\cdot\|$$

Le rapport de ces deux quantités n'est borné quand $k \rightarrow \infty$ que si $\|T x\| = 0$

- b) Evident.

c) Si T_n est une suite de Cauchy dans $\pi_{p,q}(E,F)$, alors, d'après b) c'est une suite de Cauchy dans $L(E,F)$ qui est un Banach. Il existe alors T bornée telle que $\lim \|T - T_n\| = 0$. Si $\pi_{p,q}(T_m - T_n) < \varepsilon$ pour m et $n \geq n_0$, alors,

$$\left(\sum_{i=1}^k \|T_m x_i - T_n x_i\|^q \right)^{1/q} \leq \varepsilon \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \quad \text{pour } m, n \geq n_0$$

et pour $m \rightarrow \infty$

$$\left(\sum_{i=1}^k \|T x_i - T_n x_i\|^q \right)^{1/q} \leq \varepsilon \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \quad \text{pour } n \geq n_0$$

d'où $\pi_{p,q}(T - T_n) \leq \varepsilon$ et $T \in \pi_{p,q}(E,F)$.

d) Si T' est la transposée de T , \mathfrak{U}' la boule unité fermée du dual F' de F

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k \|ST x_i\|^q \right)^{1/q} &\leq \pi_{p,q}(S) \sup_{\eta \in \mathfrak{U}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \eta, T x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \pi_{p,q}(S) \|T\| \sup_{\eta \in \mathfrak{U}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \|T\|^{-1} T' \eta, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \pi_{p,q}(S) \|T\| \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

L'autre propriété vient de :

$$\left(\sum_{i=1}^k \|ST x_i\|^q \right)^{1/q} \leq \|S\| \left(\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^q \right)^{1/q} \leq \|S\| \pi_{p,q}(T) \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p}$$

C.Q.F.D.

Définition : On appelle p-sommante une application (p,p)-sommante. On notera $\pi_{p,p}(E,F)$ par $\pi_p(E,F)$ et $\pi_{p,p}(T)$ par $\pi_p(T)$.

L'inégalité vraie pour tous réels positifs $a_i : \left(\sum_{i=1}^k a_i^q \right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^p \right)^{1/p}$ pour $p < q$ entraîne $\pi_r(E,F) \subset \pi_{p,q}(E,F)$ pour $p \leq r \leq q$.

§ 2. INEGALITE DE PIETSCH

Théorème : Si E et F sont des espaces vectoriels normés et $0 < p < \infty$, l'application linéaire T de E dans F est p-sommante si et seulement s'il existe sur \mathcal{E}' , boule unité fermée de E' muni de la topologie faible, une probabilité de Radon μ et un nombre $\rho > 0$ tels que

$$\forall x \in E \quad \|Tx\| \leq \rho \left(\int_{\mathcal{E}'} |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p}$$

Le plus petit ρ vérifiant cette inégalité sera précisément $\pi_p(T)$.

Démonstration

Si cette inégalité est vraie, appelons $\omega_p(T)$ le plus petit ρ la vérifiant. Alors,

$$\forall k, \forall x_1, \dots, x_k \in E, \forall \xi \in \mathcal{E}', \sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \leq \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p$$

d'où

$$\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^p \leq \rho^p \int_{\mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right) d\mu \leq \rho^p \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)$$

et donc T est p-sommante avec $\pi_p(T) \leq \omega_p(T)$.

Inversement, supposons p-sommante, il existe alors p tel que

$$\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^p \leq \rho^p \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)$$

Pour toute fonction φ de l'espace des fonctions continues réelles $C_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}')$ sur \mathcal{E}' muni de la topologie faible, pour laquelle il est compact on pose :

$$s(\varphi) = \inf_{x_1, \dots, x_k \in E} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} (\varphi(\xi) + \rho^p \sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p) - \sum_{i=1}^k \|Tx_i\|^p \right)$$

Evidemment, $\forall \lambda > 0$, $s(\lambda\varphi) = \lambda s(\varphi)$. Montrons que s est sous-additive.

Soient $\varepsilon > 0$, et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que, pour une fonction $\varphi_1 \in C_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}')$,

$$s(\varphi_1) \geq \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} (\varphi_1(\xi) + \rho^p \sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p) - \sum_{i=1}^k \|Tx_i\|^p - \varepsilon$$

Alors,

$$\begin{aligned} s(\varphi_1 + \varphi_2) &\leq \inf_{x_{k+1}, \dots, x_{k+1} \in E} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} (\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \rho^p \sum_{i=1}^{k+1} |\langle \xi, x_i \rangle|^p) - \sum_{i=1}^{k+1} \|Tx_i\|^p \right) \\ &\leq s(\varphi_1) - \varepsilon + \inf_{x_{k+1}, \dots, x_{k+1} \in E} \left(\sup_{\xi \in \mathcal{E}'} (\varphi_2(\xi) + \rho^p \sum_{i=k+1}^{k+1} |\langle \xi, x_i \rangle|^p) - \sum_{i=k+1}^{k+1} \|Tx_i\|^p \right) \\ &\leq s(\varphi_1) + s(\varphi_2) - \varepsilon \end{aligned}$$

et finalement :

$$s(\varphi_1 + \varphi_2) \leq s(\varphi_1) + s(\varphi_2)$$

De plus,

$$\inf_{\xi \in \mathcal{E}'} \varphi(\xi) \leq s(\varphi) \leq \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \varphi(\xi)$$

La fonctionnelle s étant sous-linéaire sur $C_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}')$, le théorème de Hahn-Banach prouve l'existence sur $C_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}')$ d'une forme linéaire μ telle que

$$\langle \varphi, \mu \rangle \leq s(\varphi) \quad \text{pour } \varphi \in C_{\mathbf{R}}(\mathcal{E}')$$

Pour chaque fonction φ non négative,

$$\langle -\varphi, \mu \rangle \leq s(-\varphi) \leq 0$$

ce qui montre que la forme linéaire μ est positive et continue. En outre, $\langle 1, \mu \rangle \leq s(1) = 1$ et $\langle -1, \mu \rangle \leq s(-1) = -1$ montrent que $\langle 1, \mu \rangle = 1$.

On définit maintenant la fonction φ_x par $\varphi_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle$. Alors, $|\varphi_x|^p \in C_{\mathbb{R}}(\mathcal{E}')$ et

$$s(-\rho^p |\varphi_x|^p) \leq \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} (-\rho^p |\varphi_x(\xi)|^p + \rho^p |\langle \xi, x \rangle|^p) - \|Tx\|^p$$

d'où $\|Tx\|^p \leq \langle \rho^p |\varphi_x|^p, \mu \rangle$

c'est-à-dire $\|Tx\| \leq \rho \left(\int_{\mathcal{E}'} |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p}$

puisque μ est une probabilité de Radon sur \mathcal{E}' .

On en déduit $\omega_p(T) \leq \pi_p(T)$, d'où finalement $\omega_p(T) = \pi_p(T)$

C.Q.F.D.

Proposition (VII; 2,1)

Si $0 < p < q < +\infty$, $\pi_p(E, F) \subset \pi_q(E, F)$ et $\pi_p(\cdot) \geq \pi_q(\cdot)$.

Démonstration

Si T est p -sommante, il existe sur \mathcal{E}' une probabilité μ telle que $\forall x \in E$ $\|Tx\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{\mathcal{E}'} |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p}$ et si r est tel que $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\|Tx\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{\mathcal{E}'} |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \pi_p(T) \left(\int_{\mathcal{E}'} 1^r d\mu \right)^{1/r} \left(\int_{\mathcal{E}'} |\langle \xi, x \rangle|^q d\mu \right)^{1/q}$$

ce qui prouve que T est q -sommante avec $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.

C.Q.F.D.

Proposition (VII; 2,2)

Une application p -sommante (avec $0 < p < \infty$) transforme toute suite faiblement convergente en suite convergente.

Démonstration

Si $x_n \rightarrow 0$ faiblement dans E , alors $\varphi_n \rightarrow 0$ en tout point de \mathcal{E}' ,

où φ_n est définie par $\varphi_n(\xi) = \langle \xi, x_n \rangle$. De plus, il existe τ tel que $\forall n$, $\|x_n\| < \tau$ et donc $\forall \xi \in \mathcal{E}'$, $|\varphi_n(\xi)| \leq \|\xi\| \|x_n\| \leq \tau$. Le théorème de convergence de Lebesgue prouve alors que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}'} |\langle \xi, x_n \rangle|^p d\mu = 0, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n\| = 0$$

C.Q.F.D.

§ 3. UNE FACTORISATION DES APPLICATIONS p-SOMMANTES ($p \geq 1$)

Proposition (VII ; 3,1)

L'injection canonique de $C(K)$ dans $L_p(K, \mu)$ où K est un compact et μ une probabilité sur K , est p-sommante et de norme égale à 1.

Démonstration

Sur $C(K)$ on définit les formes linéaires bornées δ_t , $t \in K$, par $\langle \delta_t, x \rangle = x(t)$, d'où $\|\delta_t\| = 1$. Alors, si \hat{x}_i est la μ -classe d'équivalence de x_i , on a pour tous $x_1, \dots, x_k \in E$

$$\sum_{i=1}^k \|\hat{x}_i\|_{L_p}^p = \sum_{i=1}^k \int_K |x_i(t)|^p d\mu = \int_K \sum_{i=1}^k |\langle \delta_t, x_i \rangle|^p d\mu \leq \sup_{\|\xi\| \leq 1} \sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 3,2)

L'application identique I de $L_\infty(K, \mu)$ dans $L_p(K, \mu)$, où K est un compact et μ une probabilité sur K , est p-sommante.

Démonstration

$L_\infty(K, \mu)$ est une C^* -algèbre. D'après le théorème de Gelfand, $L_\infty(K, \mu)$ est isomorphe à $C(K^*)$, espace des fonctions continues sur l'ensemble K^* des idéaux maximaux réguliers de $L_\infty(K, \mu)$; K^* peut être plongé dans le dual de $L_\infty(K, \mu)$, on le munit de la topologie induite par la topologie faible sur $(L_\infty(K, \mu))'$. Alors, K^* est compact.

Soit A l'isomorphisme entre $L_\infty(K, \mu)$ et $C(K^*)$. Pour $g \in C(K^*)$ l'application μ^* donnée par $\mu^*(g) = \mu(A^{-1}g)$ définit une probabilité de

Radon sur K^* . D'après la proposition précédente, l'application canonique I^* de $C(K^*)$ dans $L_p(K^*, \mu^*)$ est p -sommante. L'image par I^* de $C(K^*)$ est dense dans $L_p(K, \mu)$. On peut alors définir un isomorphisme isométrique B de $L_p(K^*, \mu^*)$ dans $L_p(K, \mu)$. D'après la proposition (1,2,d), $I = BI^*A$ est p -sommante.

$$\begin{array}{ccc} L_\infty(K, \mu) & \xrightarrow{I} & L_p(K, \mu) \\ A \downarrow & & \uparrow B \\ C(K^*) & \xrightarrow{I^*} & L_p(K^*, \mu^*) \end{array}$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 3,3)

Si $T : E \rightarrow F$ est p -sommante ($0 < p < \infty$), et M un sous-espace de E , alors T_1 , restriction de T à M , est p -sommante.

Démonstration

En effet, la restriction à M d'une forme linéaire sur E de norme ≤ 1 est une forme linéaire sur M de norme ≤ 1 . En appelant \mathfrak{M}' la boule unité fermée de M' , dual de M ,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k \|T_1 x_i\|^p \right)^{1/p} &= \left(\sum_{i=1}^k \|T x_i\|^p \right)^{1/p} \leq \rho \sup_{\xi \in \mathcal{E}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \xi, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \rho \sup_{\eta \in \mathfrak{M}'} \left(\sum_{i=1}^k |\langle \eta, x_i \rangle|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

Proposition (VII ; 3,4)

Pour qu'une application $T : E \rightarrow F$ soit p -sommante ($1 \leq p < \infty$), il faut et il suffit qu'il existe un compact K , une mesure de Radon μ sur K et un sous-espace fermé de $L_p(K, \mu)$ muni de la norme induite tels que T soit égale au produit d'une application T_1 p -sommante de E dans S et d'une application continue T_2 de S dans F , de norme égale à $\pi_p(T)$.

Démonstration

C'est évidemment suffisant d'après la proposition (1,2,d). Inversement, à tout $x \in E$, on associe la fonction φ_x de $C(\mathcal{E}')$ définie par $\varphi_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle$. On prend pour compact $K = \mathcal{E}'$, pour mesure μ la probabilité

de Radon de l'inégalité de Pietsch. Si I est l'application canonique de $C(K)$ dans $L_p(K, \mu)$ et P l'application de E dans $C(K)$ telle que $P(x) = \varphi_x$, on a $\pi_p(I) = \|P\| = 1$. Prenons pour S la fermeture dans $L_p(K, \mu)$ de $IP(E)$. On peut alors définir sur S une application Q dans F telle que $Q(\hat{\varphi}_x) = T_x$ où $\hat{\varphi}_x$ est la classe d'équivalence de φ_x dans $L_p(K, \mu)$; Q est bornée car :

$$\|Q(\hat{\varphi}_x)\| = \|T_x\| \leq \pi_p(T) \left(\int_K |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu \right)^{1/p} = \pi_p(T) \|\hat{\varphi}_x\|_{L_p} = \pi_p(T) \|\hat{\varphi}_x\|_S$$

Soit I_1 la restriction à $P(E)$ de I . D'après la proposition précédente, I_1 est p -sommante, et $\pi_p(I_1) \leq 1$. Comme $T = Q I_1 P$, $\pi_p(T) \leq \|P\| \cdot \pi_p(I_1) \cdot \|Q\| \leq \|Q\|$, d'où finalement $\pi_p(T) = \|Q\|$.

$$\begin{array}{ccccccc} E & \xrightarrow{P} & C(K) & \xrightarrow{I} & L_p(K, \mu) & & \\ E & \xrightarrow{P} & P(E) & \xrightarrow{I_1} & S & \xrightarrow{Q} & F \end{array} \quad \text{C.Q.F.}$$

Remarque : On obtient le même résultat en remplaçant $C(K)$ par $L_\infty(K, \mu)$, d'après la proposition (3,2).