Séminaire d'analyse fonctionnelle
École Polytechnique

P. Assouad

**Le mouvement brownien sur $[0,1]$. Applications $\Phi$-sommantes et $(\Phi,\Psi)$-sommantes**

*Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique)* (1969-1970), exp. n° 27, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A31_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

# LE MOUVEMENT BROWNIEN SUR [0,1]

# APPLICATIONS $\Phi$-SOMMANTES ET $(\Phi,\Psi)$-SOMMANTES

par P. ASSOUAD

Exposé N°27 8 Juin 1970

# LE MOUVEMENT BROWNIEN SUR [0,1]

Tous les espaces utilisés ($L_p$ et Sobolev) sont rapportés à [0,1], le signe . spécifie qu'il s'agit du sous-espace des fonctions nulles en 0.

En particulier $L_2 = L_2([0,1]),dx)$, C (espace des fonctions continues sur [0,1]), $H_1 = \{f \mid f' \in L_2\}$ muni de la norme

$$\|f\|^2_{H_1} = \|f\|^2_{L_2} + \|f'\|^2_{L^2} \quad .$$

On sait que $H_1 \subset C$ et que l'injection est continue, donc $\varepsilon_t : f \to f(t)$ appartient à $H_1'$.
Soit $P : L_2 \to H_1$ l'application définie par $Pf(t) = \int_o^t f(s)\,ds$. P est continue car $\|Pf\|_{L^2} \leq \|I_{[0,1]}\|_{L^1} \|f\|_{L^2}$. De plus ${}^tP\,\varepsilon_t = I_{[0,t]}$ et ${}^tP\,\varepsilon_o = 0$.

## 1) La mesure cylindrique du mouvement brownien

Soit $\lambda = P\gamma$ où $\gamma$ est la mesure cylindrique gaussienne canonique de $L_2$. $\lambda$ est une mesure cylindrique gaussienne sur H. De plus :

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(\varepsilon_t - \varepsilon_s)(\lambda)(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2({}^tP(\varepsilon_t - \varepsilon_s))(\gamma)(dx)$$

$$= \|{}^tP(\varepsilon_t - \varepsilon_s)\|^2_{L^2} = |t-s|$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\ \varepsilon_o(\lambda)(dx) = \int_{\mathbb{R}} x^2\ {}^tP(\varepsilon_o)(\gamma)(dx) = \|{}^tP\ \varepsilon_o\|^2_{L^2} = 0 \quad .$$

## 2) La réalisation du mouvement brownien

Soit $p > 4$ et $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{2}{p}$. Soit $C_\alpha$ l'espace des fonctions lipschitziennes d'ordre $\alpha$ sur [0,1] muni de la norme

$$\|f\|^p_{C^\alpha} = \|f\|^p_\infty + \Big( \sup_{x,y \in [0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} \Big)^p \quad .$$

Pour tout $\beta > 0$ soit $D_{-\beta} = \frac{x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I_{[0,1]}$ . On a de façon évidente :

$$D_{-\beta} \in L^{q'} \Leftrightarrow \beta > \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad \|D_{-\beta}\|_{q'} = \frac{1}{\Gamma(\beta)[q'(\beta-1)+1]^{\frac{1}{q'}}}$$

Soit $D_1$ l'inverse de P. De plus $D_{-p}$ est un semi-groupe.

<u>Proposition 1</u> : $H_1 \subset C_\alpha$ , <u>l'injection</u> $j_\alpha$ <u>est p-sommante. De plus soit</u> $K > \frac{12\sqrt{e}}{\pi}$, $j_\alpha\lambda$ <u>est de Radon sur</u> $C_\alpha$ <u>et (dès que p est assez grand)</u> $\|j_\alpha\lambda\|_p^p \le K^p\, p\,!$

Soit $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$ . On factorise l'injection de H dans $C^\alpha$ par :

$$H_1 \xrightarrow[D_1]{u_1} L^2 \xrightarrow[D_{\gamma-1}]{u_2} L^\infty \xrightarrow[\text{injection}]{u_3} L^p \xrightarrow[D_{\alpha-\gamma}]{u_4} L^\infty \xrightarrow[D-\alpha]{u_5} C^\alpha$$

on a alors les majorations suivantes, valables dès que p est assez grand :

(1) $u_1(\lambda) = \gamma$ et $\|\gamma\|_p^{*p} = \pi^{-1/2}\, 2^{p/2}\, \Gamma(\frac{p+1}{2}) \le K_1^p\, p^{p/2}$

avec $K_1 > \frac{1}{\sqrt{e}}$ arbitraire.

(2) $\|u_2\| = \|D_{\gamma-1}\|_{L^2} = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2p})(\frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}} \le K_2\, p^{\frac{1}{2}}$

avec $K_2 > \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ arbitraire.

(3) $u_3$ est p-sommante et $\pi_p(u_3) = 1$

(4) $\|u_4\| = \|D_{\alpha-j}\|_{p'} = \dfrac{1}{\Gamma(\frac{3}{2p})(\frac{p'}{2p})^{\frac{1}{p'}}} \le K_4$

avec $K_4 > 3$ arbitraire.

(5) Il s'agit d'évaluer $\|u_5\|$. Soit $f \in L_\infty$ ; on a alors : $(x < y)$

$$\Gamma(\alpha)|D_{-\alpha}f(x) - D_{-\alpha}f(y)| = |\int_0^1 [(x-t)^{\alpha-1^+} - (y-t)^{\alpha-1^+}] f(t)\,dt|$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty}(\int_0^x t^{\alpha-1}dt - \int_{y-x}^{y} t^{\alpha-1}dt + \int_0^{y-x} t^{\alpha-1}dt)$$

$$\leq \frac{|x-y|^\alpha}{\alpha}\|f\|_{L^\infty}[2-\frac{y^\alpha - x^\alpha}{(y-x)^\alpha}] \quad .$$

Donc $\|u_5\| \leq [\|D_{-\alpha}\|^p_{L_1} + (\frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)})^p]^{\frac{1}{p}} = \frac{(1+2^p)^{\frac{1}{p}}}{\alpha\Gamma(\alpha)} \leq K_5$ avec $K_5 > \frac{4}{\sqrt{\pi}}$ arbitraire.

Donc $j_\alpha$ est p-sommante, $j_\alpha\lambda$ est de Radon sur $C^\alpha$ car $p \in ]1,\infty[$ .
Enfin, pour p assez grand, on a :

$$\|j_\alpha\lambda\|^p_p \leq (K_1\, K_2\, K_4\, K_5)^p\, (\frac{p}{e})^p\, e^p$$

d'où le résultat puisque $p\,! \sim (\frac{p}{e})^p\sqrt{2\pi p}$ .

<u>Proposition 2</u> : <u>Soit $\mu$ l'image de $\lambda$ par l'injection de $H_1$ dans C, $\mu$ est une mesure de Radon sur C. De plus $\mu$ est gaussienne</u>,

$$\int_C |f(t) - f(s)|^2\, \mu(df) = |t-s| \;,\; f(0) = 0 \;\; \mu\text{-p.p.}$$

<u>Enfin</u> $\limsup_{s\to o}\ \sup_{t,t+s\in[0,1]} \frac{|f(t+s)-f(t)|}{\sqrt{|s|}\ \operatorname{Log}\frac{1}{|s|}} \leq \frac{24\sqrt{e}}{\pi}$ $\mu$ - p.p.

En effet, l'injection de $H_1$ dans C se factorise par $H_1 \to C^\alpha \to C$ .
Les trois premières propriétés proviennent des propriétés correspondantes de $\lambda$. Enfin soit $K > \frac{12\sqrt{e}}{\pi}$ ; alors, dès que p est assez grand, on a :
$(\alpha = \frac{1}{2} - \frac{2}{p})$

$$\int_C [\|f\|^p_{L^\infty} + \sup_{t,t+s\in[0,1]} (\frac{|f(t+s)-f(t)|}{\sqrt{|s|}})^p\, |s|^2]\,\mu(df) \leq K^p\, p!$$

(en effet, $C^\alpha$ est $\mu$-mesurable et $\|\ \|^p_{C^\alpha}$ est continu sur $C^\alpha$).
Donc

$$\int_C [\sum_{p=o}^{\infty} \frac{1}{(K+\varepsilon)^p p!} \sup_{t,t+s\in[0,1]} (\frac{|f(t+s)-f(t)|}{\sqrt{|s|}})^p\, |s|^2]\,\mu(df) < \infty .$$

Donc $\displaystyle\sup_{t,t+s\in[0,1]} \left(|s|^2 \exp \frac{|f(t+s)-f(t)|}{(K+\varepsilon)\sqrt{|s|}}\right)$ est $\mu$-intégrable, donc fini $\mu$-p.p. . Donc pour $\mu$-presque tout $f$ , il existe $M<\infty$ tel que

$$t,t+s\in[0,1] \Rightarrow \frac{|f(t+s)-f(t)|}{(K+\varepsilon)\sqrt{|s|}} \leq \operatorname{Log} M + 2 \operatorname{Log} \frac{1}{|s|} ,$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{s\to 0} \sup_{t,t+s\in[0,1]} \frac{|f(t+s)-f(t)|}{\sqrt{|s|}\ \operatorname{Log}\frac{1}{|s|}} \leq 2(K+\varepsilon) \quad \mu\text{-p.p.}$$

d'où le résultat .

<u>Remarque</u> : les résultats classiques sont meilleurs, puisqu'on peut prendre en particulier $\sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}}$ au lieu de $\operatorname{Log}\frac{1}{|s|}$ , mais il faut remarquer qu'on s'est servi exclusivement des moments de $\lambda$.

## APPLICATIONS $\Phi$-SOMMANTES ET $(\Phi,\Psi)$-SOMMANTES

### 1) L'inégalité de Pietsch

Soit E, F, B des ensembles.

On distingue dans E et dans F un élément noté 0.

Soit $(x,\xi)\to\langle x,\xi\rangle$ une application $E\times B\to\mathbb{R}$ .

Soit $y\to\|y\|$ une application $F\to[0,\infty]$. On suppose que : $\|0\|=0$, $\langle 0,\xi\rangle = 0$ $\forall\ \xi\in B$, $(\langle x,\xi\rangle)_{\xi\in B}$ est borné $\forall\ x\in E$. On pose alors $\|x\| = \sup_{\xi\in B}|\langle x,\xi\rangle|$.

Soient $\Phi$, $\Psi$ deux fonctions $[0,\infty[\ \to [0,\infty[$

$$\Phi(t) = \Psi(t) = t \quad \text{pour } t\in[0,1],\ \Phi \text{ croissante.}$$

<u>Définition</u> : <u>Soit $T: E\to F$, $T(0)=0$ ; $T$ est $(\Phi,\Psi)$-sommante s'il existe $\rho>0$ tel que $\forall\ n\in\mathbb{N}$</u>, $\forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\geq 0$, $\forall\ x_1,\dots,x_n\in E$

$$\sup_{\xi\in B} \Sigma\,\lambda_i\ \Phi(|\langle x_i,\xi\rangle|) \leq \Sigma\,\lambda_i \Rightarrow \Sigma\,\lambda_i\,\Psi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right) \leq \Sigma\,\lambda_i .$$

<u>Proposition 1</u> : <u>$T$ $(\Phi,\Psi)$-sommante $\Leftrightarrow \exists\ r>0$, $\exists\ \alpha\in[0,1]$, $\exists\ \mu$ forme linéaire continue sur $\mathfrak{B}(B)$ (avec $\mu(1)=1$, $f\geq 0\Rightarrow\mu(f)\geq 0$) tels que</u> :

$$\Psi\left(\frac{\|T_x\|}{r}\right)\leq(1-\alpha)+\alpha\int_B \Phi(|<x,\xi>|)\,\mu(d\xi)\quad\forall\ x\in E\ .$$

<u>Démonstration</u> : $\Leftarrow$ est évident.

$\Rightarrow$ utilisera deux lemmes.

Les fonctions $\xi\to\Sigma\,\lambda_i\,\Phi(|<x_i,\xi>|)-\Sigma\,\lambda_i$ telles que $\Sigma\,\lambda_i\,\Psi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right)-\Sigma\,\lambda_i>0$ forment un convexe $\mathcal{C}$ inclus dans $\mathfrak{B}(B)$. De plus, si $g\in\mathcal{C}$, $\exists\ \xi\in B$ tel que $g(\xi)>0$.

On démontre donc le

<u>Lemme 1 (Cartier)</u> : <u>Soit $\mathcal{C}$ un cône convexe $\subset\mathfrak{B}(B)$ tel que $\forall\ g\in\mathcal{C}$, $\exists\ \xi\in B$, $g(\xi)\geq 0$. Alors il existe $\mu$ forme linéaire continue sur $\mathfrak{B}(B)$ telle que $\mu(1)=1$, $f\geq 0\Rightarrow\mu(f)\geq 0$, $g\in\mathcal{C}\Rightarrow\mu(g)\geq 0$.</u>

<u>Démonstration</u> : $f\to p(f)=\operatorname*{Inf}_{g\in\mathcal{C}}\ \operatorname*{Sup}_{\xi\in B}\ [f(\xi)+g(\xi)]$ est une fonction sous linéaire sur $\mathfrak{B}(B)$. Donc il existe $\mu$ forme linéaire continue sur $\mathfrak{B}(B)$ telle que $\mu(f)\leq p(f)\quad\forall\ f\in\mathfrak{B}(B)$ (Hahn-Banach). Or $\operatorname*{Inf}_{\xi\in B} f(\xi)\leq\operatorname*{Sup}_{\xi\in B} f(\xi)$ et $p(-g)\leq 0$ $\forall\ g\in\mathcal{C}$.

Donc $\mu$ répond à la question et le lemme 1 est démontré.

On a donc

$$\Sigma\,\lambda_i\left[\int_B\Phi(|<x_i,\xi>|)\mu(d\xi)-1\right]<0\Rightarrow\Sigma\,\lambda_i\left[\Psi\left(\frac{\|Tx_i\|}{\rho}\right)-1\right]\leq 0\quad ;$$

de plus

$$\int_B\Phi(|<0,\xi>|)\,\mu(d\xi)-1=-1<0.$$

On conclut en démontrant le lemme suivant :

<u>Lemme 2</u> : Soit $x \to A(x)$, $x \to B(x)$ des fonctions numériques sur E, on suppose que $\forall\ \lambda_1,\dots,\lambda_n \geq 0 \quad \forall\ x_1,\dots,x_n \in E$

$$\Sigma\ \lambda_i\ A(x_i) < 0 \Rightarrow \Sigma\ \lambda_i\ B(x_i) \leq 0$$

et qu'il existe $x_o \in E$ tel que $A(x_o) < 0$.
Alors $\exists\ \alpha \geq 0$ tel que $B(x) \leq \alpha\, A(x) \quad \forall\ x \in E$.

<u>Démonstration</u> : D'abord $A(x) \leq 0 \Rightarrow B(x) \leq 0$. C'est clair si $A(x) < 0$ ; si $A(x) = 0$, soit $A(x_o) < 0$; alors, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\varepsilon A(x_o) + A(x) < 0$, donc $\varepsilon B(x_o) + B(x) \leq 0$, donc $B(x) \leq 0$.
Supposons qu'il existe x tel que $A(x) > 0$, $B(x) > 0$ (sinon on prend $\alpha = 0$) ; on pose $\alpha = \sup\limits_{A(x)>0} \dfrac{B(x)}{A(x)}$ . Soit $x_\theta$ tel que $A(x_\theta) < 0$ ; alors

$$A(x)A(x_o) + [-A(x_o)]A(x) = 0 \quad , \quad \text{donc}, \forall\ \varepsilon > 0,$$

$$[A(x)+\varepsilon]B(x_o) + [-A(x_o)]B(x) \leq 0 \quad ,$$

donc $A(x)B(x_o) - A(x_o)B(x) \leq 0$, donc $\dfrac{B(x_o)}{A(x_o)} \geq \dfrac{B(x)}{A(x)}$ , ce qui prouve que $\alpha$ est fini et que :

$B(x_o) \leq \alpha\, A(x_o)$ , qui est clairement vrai dans tous les cas.

Le lemme 2 est démontré, la proposition 1 aussi en remarquant que $x = 0$ impose $1-\alpha \geq 0$ donc $\alpha \in [0,1]$.

<u>Remarques</u> : 1) Supposons B complètement régulier, $\xi \to \langle x,\xi \rangle$ continu $\forall$ x. Alors $\mu$ sera une mesure de Radon sur B, si, $\forall\ \varepsilon > 0$ , $\exists\ g \in \mathcal{C}$ , $\exists$ K compact tels que $g + I_{\complement K} \leq \varepsilon$. (Cette condition exprimant que $\mu(I_{\complement K}) \leq \varepsilon$).

2) La condition précédente est inutile (elle est d'ailleurs réalisée) si B est compact. $\mu$ est alors une probabilité sur B.

Désormais on prendra :

E un espace normé (soit $\hat{E}$ son complété)

B la boule unité de E' munie de la topologie $\sigma(E',\hat{E})$ (donc compacte).

$(x,\xi) \to \langle x,\xi \rangle$ la forme bilinéaire de dualité.

## 2) Un exemple d'application $\Phi$-$\Psi$ sommante

Soit K un compact, on prend $E = C(K)$ et $\Phi$ convexe, démontrons d'abord le

**Lemme** : Soit $T : C(K) \to F$, alors $T$ $(\Phi,\Psi)$-sommante $\Leftrightarrow \exists\ r > 0,\ \exists\ \alpha \in [0,1],\ \exists\ \mu$ probabilité sur K, tels que $\Psi(\frac{\|Tf\|}{r}) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_K \Phi(|f(t)|)\,\mu(dt)$.

En effet, soit $\xi \to \Sigma \lambda_i \Phi(|\langle f_i,\xi \rangle|) - \Sigma \lambda_i$ un élément de $\mathcal{C}$, alors $\exists\ \xi_o$ mesure sur K telle que

$$\Sigma \lambda_i \Phi(|\langle f_i,\xi_o \rangle|) - \Sigma \lambda_i > 0 \ ;$$

quitte à remplacer $\xi_o$ par $\dfrac{|\xi_o|}{|\xi_o|(1)}$ on peut supposer que $\xi_o$ est une probabilité. Donc il existe $t \in K$ tel que $\Sigma \lambda_i \Phi(|f_i(t)|) - \Sigma \lambda_i > 0$. Sinon on aurait :

$$\Sigma \lambda_i \Phi(|\langle f_i,\xi \rangle|) < \Sigma \lambda_i \int_K \Phi(|f_i(t)|)\xi_o(dt) \leq \Sigma \lambda_i \ .$$

On peut alors écrire la proposition 1 en remplaçant B par K, d'où le résultat.

Soit $\nu$ une probabilité diffuse sur K et $\theta$ une fonction continue croissante de $[0,\infty[$ telle que $\theta(t) = t$ sur $[0,1]$, $\theta(\infty) = \infty$. On fait sur $\Psi$ les mêmes hypothèses que sur $\theta$.

$L_\theta(K,\nu)$ désigne un espace vectoriel inclus dans $L_0(K,\nu)$ et contenant $C(K)$ ; pour $f \in \theta$ on pose :

$$\|f\|_\theta = \operatorname{Inf}\{a \mid \int_K \theta\left(\frac{|f(t)|}{a}\right)\nu(dt) \leq 1\} .$$

On prend $F = L_\theta$ muni de $\| \ \|_\theta$ et $T$ désigne l'injection de $C(K)$ dans $L_\theta$. Sous ces hypothèses on a la :

<u>Proposition 3</u> : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\exists\ \alpha \in ]0,1]$, $\exists\ r > 1$ tels que pour tout $f \in C(K)$

$$\Psi\left(\frac{\|f\|}{r}\theta\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_K \Phi(|f(t)|)\nu(dt)$$

(2) l'injection $C(K) \to L_\theta(K,\nu)$ est $\Phi$-$\Psi$ sommante

(3) $\exists\ \beta \in ]0,1]$, $\exists\ k > 1$ tels que, pour tout $u \geq 0$, $v \geq 1$,

$$\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta)\,\theta(v) + \beta\,\Phi(\,k\,uv)$$

ainsi que (1)', (2)', (3)' déduites des précédentes en échangeant $\Psi$ et $\theta$.

<u>Démonstration</u> : (1) $\Rightarrow$ (2) est évident.

(2) $\Rightarrow$ (3); en effet $\exists\ \alpha \in ]0,1]$, $\exists\ r > 1$, $\exists\ \mu$ probabilité sur $K$ telle que, pour tout $f \in C(K)$,

$$\Psi\left(\frac{\|f\|}{r}\theta\right) \leq (1-\alpha) + \alpha \int_K \Phi(|f(t)|)\mu(dt);$$

cette inégalité s'étend à $f$ borélienne bornée.

On prend donc $f = xI_A$, $x > 0$, on trouve $\|f\|_\theta = \dfrac{x}{\theta^{-1}\left(\frac{1}{\nu(A)}\right)}$ , d'où

$$\Psi\left(\frac{x}{r\theta^{-1}\left(\frac{1}{\nu(A)}\right)}\right) \leq (1-\alpha) + \alpha\,\Phi(x)\mu(A) . \qquad \text{(i)}$$

Soit $D_1$, $D_2$ la décomposition de Jordan de $\mu-\nu$, $D_1$ portant $(\mu-\nu)^-$. On a $\nu(D_1) = m > 0$ car sinon $\mu(D_1) = \nu(D_1) = 0$ donc $\mu = \nu$. Soit alors $u \geq 0$, $v \geq 1$, $k = r\,\theta^{-1}(\frac{1}{m})$ , $\beta = \alpha$, on écrit (i) avec $A \subset D_1$ , $\theta^{-1}(\frac{1}{\nu(A)}) = v\,\theta^{-1}(\frac{1}{m})$ ($\nu$ est diffuse) et $x = k\,uv$. On a donc $\mu(A) \leq \nu(A) \leq \frac{1}{\theta(v)}$ et on trouve

$$\Psi(u) \leq (1-\beta) + \beta\,\frac{\Phi(kuv)}{\theta(v)} ,$$

d'où le résultat.

$(3) \Rightarrow (1)'$, on prend $\theta(\alpha) \leq 1-\alpha$ et $r = \frac{k}{\alpha}$;

si $\|f\|_\Psi \leq k$, alors $\theta(\frac{\|f\|}{r}\,\Psi) \leq \theta(\alpha) \leq 1-\alpha$

si $\|f\|_\Psi \geq k$, on écrit (3) avec $u = \dfrac{|f(t)|}{\|f\|_\Psi}$ , $v = \dfrac{\|f\|_\Psi}{k}$ , et on intègre par rapport à $\nu(dt)$. On obtient alors :

$$\theta(v) \leq (1-\beta)\theta(v) + \beta \int_K \Phi(|f(t)|)\nu(dt)$$

d'où

$$\theta(\frac{\|f\|}{r}\,\Psi) \leq \alpha\,\theta(v) \leq \alpha \int_K \Phi(|f(t)|)\nu(dt),$$

d'où le résultat.

Enfin $(1)' \Rightarrow (2)' \Rightarrow (3)' \Rightarrow (1)$ comme précédemment.

<u>Remarques</u> : 1) La démonstration de $(3) \Rightarrow (1)'$, donc de $(3)' \Rightarrow (1)$ montre qu'on peut modifier (1) de la manière suivante :

$$\exists\ \alpha \in ]0,1[,\ \exists\ r > 1 \text{ tels que pour tout } f \in C(K)$$

$$\Psi(\frac{\|f\|}{r}\,\theta) \leq (1-\alpha) \bigvee [\alpha \int_K \Phi(|f(t)|)\nu(dt)].$$

Prenant alors $\mu = \nu$ dans la démonstration de $(2) \Rightarrow (3)$, on obtient :

$$\exists\ \beta \in ]0,1[\ ,\ \exists\ k > 1 \text{ tels que pour tout } u \geq 0,\ v \geq 1$$

$$\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta)\theta(v) \bigvee \beta\,\Phi(k\,uv)$$

De plus on peut prendre $\alpha$ et $\beta$ arbitrairement petits.

2) une condition équivalente à (3) est :

(ii) $\quad \exists\, k_1 > 1 \quad \exists\, \beta_1 \in ]0.1[$ tels que, pour tout $u \geq 1$, $v \geq 1$,

$$\Psi(u)\theta(v) \leq \beta_1\, \theta(k_1 uv) \quad .$$

Démonstration : $(3) \Rightarrow (ii)$, dans (3), on prend $\beta < \frac{1}{2}$.
Alors (3) entraine $\theta(v) \leq \Phi(kv)\ \forall\, v \geq 1$, donc, sous la forme de la remarque 1)
$\Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta)\Phi(kv) \vee \beta\, \Phi(k\,uv) \leq \beta\, \Phi(k\,uv)$

$(ii) \Rightarrow (3)$; on prend $k_1$ assez grand pour que $k_1\Psi^{-1}(1-\beta_1) \geq 1$
alors si $u \leq \Psi^{-1}(1-\beta_1)$ $\quad \Psi(u)\theta(v) \leq (1-\beta_1)\theta(v)$;

si $u \geq 1$ $\quad \Psi(u)\theta(v) \leq \beta_1\, \Phi(k_1 uv) \leq \beta_1\, \Phi(k_1^2 uv)$;

si $\Psi^{-1}(1-\beta_1) \leq u \leq 1$, $k_1 u \geq 1$ ;

$$\begin{aligned} \text{donc}\quad \Psi(u)\theta(v) &\leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1\, \theta(v) \\ &\leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1\, \theta(v)\, \Psi(k_1 u) \\ &\leq (1-\beta_1)\theta(v) + \beta_1^2\, \Phi(k_1^2 uv) \leq (1-\beta_1)\, \theta(v) + \beta_1\, \Phi(k_1^2 uv)\ , \end{aligned}$$

d'ou le résultat avec $\beta = \beta_1 \quad k = k_1^2$ .

3) Si $\Phi = \Psi = \theta$ la condition (ii) est vérifiée pour $\Phi = t^u$, $e^{t^u}-1$, $t^t$ mais non pour $\Phi = t^u \operatorname{Log} t$.

## 3) Propriétés du poids $\| \ \|_\Phi$ . $\Phi$ convexe

On rappelle que $\|\mu\|_\Phi = \operatorname{Inf}\{ a \mid \int_{\mathbb{R}} \Phi(\frac{|t|}{a})\ \mu(dt) \leq 1 \}$;

$\| \ \|_\Phi$ est homogène

compact, car $\int \Phi(\frac{|t|}{M})\ \mu(dt) \leq 1 \Rightarrow \mu([M_\Phi{}^{-1}(\frac{1}{\varepsilon}), \infty[) < \varepsilon$ ,

donc plus fort que $L_0$ ;

de plus $\|\mu + \varepsilon\|_\Phi \leq \|\mu\|_\Phi + \varepsilon$ (car $\varepsilon = \|\varepsilon\|_{\Phi,\mu}$).

On peut donc développer la théorie des application $\Phi$-sommantes et $(\Phi,\Psi)$-sommantes comme celle des p-sommantes.

On remarque que, si $T : E \to F$ est linéaire continue ($E,F$ normés), $T$ $(\Phi, \Psi)$-sommante $\Leftrightarrow \exists\ \rho \geq 0$ tel que, $\forall\ \lambda$ mesuré à support fini sur $E$,

$$\|T\lambda\|_{\Psi} \leq \rho\ \|\lambda\|^{*}_{\Phi} \quad .$$

-------