SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. SCHWARTZ

Les applications O-radonifiantes dans les espaces de suites

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 26, p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A30_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E   L. S C H W A R T Z   1 9 6 9 - 1 9 7 0

LES APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES DANS

LES ESPACES DE SUITES

Exposé N°26 1er Juin 1970

§ 1. CONDITIONS POUR LE TYPE ET LE COTYPE DANS LES ESPACES DE SUITES

Soient $1 \leq s \leq +\infty$. Les notations sont les mêmes qu'à la fin de l'exposé XXV.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires scalaires, $X_n \in L^0(\Omega,\mu)$. Bien que, dans la propr. (XXVI,1;1), certaines d'entre elles puissent être nulles, on peut toujours se ramener au cas où aucune ne l'est. Supposons en outre toutes les X_n dans $L^p(\Omega,\mu)$. Appelons $l_{p,X}$ l'espace des suites $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ soit convergente dans $L^p(\Omega,\mu)$. Nous dirons que $c \in l_{p,X}$ converge vers 0 dans $l_{p,X}$, si $\sum_{n=0}^{N} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$, uniformément pour $N \in \mathbb{N}$. Nous définissons ainsi $l_{p,X}$ comme un espace vectoriel topologique, séparé (parce que les X_n sont $\neq 0$) ; $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset l_{p,X} \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, avec des injections continues, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est dense dans $l_{p,X}$, chaque $c \in l_{p,X}$ est limite de ses tronquées ; enfin, $L^p(\Omega,\mu)$ étant métrisable et complet, $l_{p,X}$ est métrisable et complet. Si $p>0$, $l_{p,X}$ est quasi-normé ou normé, avec la quasi-norme ou norme

$$\|c\|_{l_{p,X}} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=0}^{N} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega,\mu)} .$$

Si $p=0$, un système fondamental de jauges de la topologie est donné par les

$$J_{\alpha, l_{p,X}}(c) = \sup_{N \in \mathbb{N}} J_\alpha\left(\mu, \sum_{n=0}^{N} c_n X_n\right) .$$

<u>Proposition (XXVI,1,;1)</u> : Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires scalaires $X_n \in L^0(\Omega,\mu)$. Soit $1 \leq s \leq +\infty$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) X est de type (p, l^s) ;

2) Pour toute $c \in l^s$ (c^0 si $s=+\infty$), la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est convergente (ou sommable $L^p(\Omega,\mu)$) ;

3) La probabilité λ_X sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, associée à X, est image, par l'injection canonique, d'une probabilité cylindrique de type p sur $l^{s'}$ ($\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$; prendre $\sigma(l^\infty, l^1)$ si $s=1$, $\sigma(l^1, c^0)$ si $s=+\infty$).

Démonstration : On peut toujours se ramener au cas où les X_n sont non nulles, et chacune des conditions implique que les X_n soient toutes dans $L^p(\Omega,\mu)$, ce qui permet d'utiliser les considérations antérieures sur $l_{p,X}$. La propriété 1) signifie que $c \mapsto \sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n$ est continue de $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})_{l^s}$ ($\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ muni de la topologie induite par l^s) dans $L^p(\Omega,\mu)$; ou encore que l'injection canonique de $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^s}$ dans $l_{p,X}$ est continue (car, si c converge vers 0 dans $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})_{l^s}$ toutes ses suites partielles convergent uniformément vers 0 dans l^s). Cette injection doit donc se prolonger en une application linéaire continue, de l'adhérence de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ dans l^s, dans $l_{p,X}$ (complet), c-à-d. de l^s pour $s \neq +\infty$, de c^o pour $s = +\infty$, dans $l_{p,X}$. Cette application prolongée doit en outre être compatible avec les injections $l^s \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $l_{p,X} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, donc cela signifie que $l^s \subset l_{p,X}$, avec une injection continue, l^s étant remplacé par c^o si $s = +\infty$. Cela entraîne donc 2) : si $c \in l^s$ (ou c^o), $\sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n$ est une série convergente dans $L^p(\Omega,\mu)$; comme en outre toutes les permutées de c sont aussi dans l^s, elle est commutativement convergente, ou sommable. Inversement, 2) signifie que $l^s \subset l_{p,X}$; comme leurs injections dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont continues, le théorème du graphe fermé dit que $l^s \to l_{p,X}$ est continue, donc a fortiori que $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^s} \to l_{p,X}$ est continue, ce qui est 1). Donc 1) et 2) sont équivalentes.

Dire qu'elles sont réalisées équivaut à dire que $c \mapsto \sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n$ est une application linéaire continue $\overline{X}$ de l^s (c^o si $s = +\infty$) dans $L^p(\Omega,\mu)$, prolongeant X, application linéaire de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ dans $L^p(\Omega,\mu)$. En utilisant la prop. (VI,1;1), avec un espace E dont le dual soit $E' = l^s$ (ou c^o), soit $E = l^{s'}$ si $1 < s < +\infty$, $E = \sigma(l^\infty, l^1)$ si $s = 1$, $E = \sigma(l^1, c^o)$ si $s = +\infty$, cela équivaut à dire que λ_X, probabilité sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ associée à X, est l'image, par l'injection canonique, de la probabilité cylindrique de type p sur E, $\lambda_{\overline{X}}$, associée à $\overline{X}$. L'unicité de $\lambda_{\overline{X}}$ résulte de celle de $\overline{X}$, qui elle-même résulte de la densité de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ dans l^s ou c^o. <u>cqfd</u>

Essayons d'avoir une proposition analogue pour le cotype. Ce n'est pas en général possible. On aura seulement :

Proposition (XXVI,1;2) : Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires non nulles. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) Pour $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, si les sommes $\sum_{n=0}^{N} c_n X_n$, $N \in \mathbb{N}$, convergent uniformément vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$, c converge vers 0 dans l^s.
2) Pour $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est convergente dans $L^p(\Omega,\mu)$, alors $c \in l^s$.

Démonstration : Les c_n sont tous nuls sauf pour les n pour lesquels $X_n \in L^p(\Omega,\mu)$; on peut donc sans inconvénient supposer que $X_n \in L^p(\Omega,\mu)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors 1) signifie que l'injection $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l_{p,X}} \to l^s$ est continue ; elle entraîne l'existence d'une application linéaire continue $l_{p,X} \to l^s$, compatible avec les injections de $l_{p,X}$ et l^s dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: donc $l_{p,X} \subset l^s$, avec injection continue ; d'où 2).

Ensuite 2) signifie que $l_{p,X} \subset l^s$; l'injection est continue par le graphe fermé, les deux étant injectés continuement dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donc a fortiori $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l_{p,X}} \to l_s$ est continue, ce qui est 1).

Mais ceci n'est pas une propriété de cotype. Dire que X est de cotype (p, l^s), c'est dire que, pour $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, la seule convergence vers 0 de $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, entraîne la convergence vers 0 de c dans l^s ; c'est une propriété plus forte que le 1) de l'énoncé précédent. Mais :

Proposition (XXVI,1;3) : Supposons que les variables aléatoires X_n soient $\neq 0$, indépendantes, réelles et centrées (i.e. $\Pr\{X_n \geq 0\} = \frac{1}{2}$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cotype (p, l^s) ;
2) Pour $c \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ est convergente dans $L^p(\Omega,\mu)$, alors $c \in l^s$.

<u>Lemme</u> : <u>Soient u, v, deux variables aléatoires indépendantes, réelles et centrées. Alors</u>

$$\|u+v\|^p_{L^p(\Omega,\mu)} \geq \frac{1}{2}\|u\|^p_{L^p(\Omega,\mu)}, \quad p>0$$

$$\Pr\{|u+v|>a\} \geq \frac{1}{2}\Pr\{|u|>a\} .$$

<u>Démonstration du lemme</u> : En considérant les probabilités conditionnelles lorsque $u=t$, que nous désignerons par $\Pr_t$, et les espérances conditionnelles lorsque $u=t$, que nous désignerons par Esp_t , on a les formules :

$$\mathrm{Esp}(|u+v|^p) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Esp}_t(|u+v|^p)\, d\,\nu(t),$$

$$\Pr\{|u+v|>a\} = \int_{\mathbb{R}} \Pr_t\{|u+v|>a\}\, d\,\nu(t) ,$$

où ν est la loi de probabilité de u. Soit $t\geq 0$. Alors $|u+v| \geq |u| = t$ dès que $v\geq 0$; or, pour ν-presque tout t, $\Pr_t\{v\geq 0\} = \Pr\{v\geq 0\}$ puisque u et v sont indépendantes, et $\Pr\{v\geq 0\} = \frac{1}{2}$ par hypothèse. Pour $t\leqslant 0$, on a le même résultat en remplaçant $v\geq 0$ par $v\leq 0$. Cela donne toujours, pour ν-presque tout t : $\mathrm{Esp}_t(|u+v|^p) \geq \frac{1}{2}|t|^p$, et $\Pr_t\{|u+v|>a\} \geq \frac{1}{2}$ si $|t|>a$. Donc

$$\mathrm{Esp}(|u+v|^p) \geq \frac{1}{2}\int |t|^p d\,\nu(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Esp}(|u|^p) ,$$

$$\Pr\{|u+v|>a\} \geq \frac{1}{2}\int_{|t|>a} d\,\nu(t) = \frac{1}{2}\Pr\{|u|>a\} ,$$

ce qui est l'énoncé du lemme♦.

♦Pour $p\geq 1$, une méthode courante dans les martingales donnerait une inégalité meilleure, sans facteur $\frac{1}{2}$, avec l'hypothèse plus faible $\mathrm{Esp}.v=0$ (si v n'est pas intégrable, on trouve tout de suite $\mathrm{Esp}.(|u+v|^p) = +\infty$). D'autre part, bien évidemment, u n'a pas besoin d'être centrée.

<u>Démonstration du théorème</u> : Soit $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ une suite finie. En prenant $u = \sum_{n=o}^{N} c_n X_n$, $v = \sum_{n=N+1}^{+\infty} c_n X_n$, le lemme donne, pour $p > 0$:

$$\operatorname*{Sup}_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{n=o}^{N} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega,\mu)} \leq 2^{1/p} \left\| \sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n \right\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

$$\operatorname*{Sup}_{N\in\mathbb{N}} J_{2\alpha}(\mu, \sum_{n=o}^{N} c_n X_n) \leq J_\alpha(\mu, \sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n) .$$

Donc si, pour $c \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, $\sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n$ converge vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$, $\sum_{n=o}^{N} c_n X_n$ convergera vers 0 dans $L^p(\Omega,\mu)$, uniformément pour $N \in \mathbb{N}$.
La prop. (XXVI,1;3) résulte alors de la prop.(XXVI,1;2), les conditions 1) de ces deux propositions étant équivalentes.

<u>§ 2. LE THEOREME DES 3 SERIES DE KOLMOGOROV ET SES APPLICATIONS</u>

<u>Proposition (XXVI,2;1)</u> : <u>Soit</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite de variables aléatoires réelles indépendantes. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) <u>La série</u> $\sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n$ <u>converge en probabilité</u> ;

2) <u>La série</u> $\sum_{n=o}^{+\infty} c_n X_n$ <u>converge presque sûrement</u> ;

3) <u>Les 3 série numériques suivantes sont convergentes</u>

$$\sum_{n=o}^{+\infty} \Pr\{|X_n| > 1\}$$

$$\sum_{n=o}^{+\infty} \mathrm{Esp.}(X'_n)$$

$$\sum_{n=o}^{+\infty} (\mathrm{Esp.}(|X'^2_n|) - |\mathrm{Esp.}(X'_n)|^2) ,$$

<u>où</u> X'_n <u>est la variable aléatoire</u>

$$X'_n(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } |X_n(\omega)| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |X_n(\omega)| > 1 . \end{cases}$$

Nous admettrons ce théorème, qu'on trouve dans tous les traités élémentaires de probabilité. On le trouvera par exemple dans "Probability theory" de Loève. p. 247 et 249.

Corollaire : Si en outre les X_n sont ≥ 0. ces conditions sont équivalentes à

3) Les 2 séries numériques ≥ 0 suivantes sont convergentes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Pr\{X_n > 1\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Esp.}(X'_n) \text{ .}$$

En effet, le terme général de la 3ème série de la proposition est ≥ 0 et majoré par $\text{Esp.}(X'^2_n) \leq \text{Esp.}(X'_n)$ puisque $X'_n \leq 1$.

Proposition (XXVI.2:2) : Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, chacune prenant les valeurs ± 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ (variables aléatoires de Rademacher ou du jeu de pile ou face). Cette suite est de type (p,l^2) pour tout p fini, de cotype (p,l^2) pour tout p.

Démonstration : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n X_n$ converge en probabilité si et seulement si $c \in l^2$, par le théorème des 3 séries de Kolmogorov. [Posons $X_n = c_n Z_n$. Alors $\Pr\{|c_n X_n| > 1\} = 1$ ou 0 selon que $|c_n| > 1$ ou ≤ 1. La 1ère série donne donc la condition : $|c_n| \leq 1$ sauf pour un nombre fini de valeurs de n. Ensuite $\text{Esp.}(X'_n) = 0$. et $\text{Esp.}(|X'_n|^2) = 0$ ou $|c_n|^2$ selon que $|c_n| > 1$ ou ≤ 1 : l'ensemble des 3 séries donne donc la condition $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$].

La proposition (XXVI,1:3) montre donc que $Z = (Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de cotype $(0,l^2)$; elle est a fortiori de cotype (p,l^2) pour tout p.

La proposition (XXVI.1;1) montre que Z est de type $(0,l^2)$. Il nous reste à montrer que Z est de type (p,l^2) pour tout p fini.

Soit c une suite finie.

$$\text{Esp.}(e^{\sum_{n=o}^{+\infty} c_n Z_n}) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \text{Esp.}(e^{c_n Z_n})$$

(à cause de l'indépendance)

$$= \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{e^{c_n}+e^{-c_n}}{2}\right) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \text{ch } c_n \le \prod_{n\in\mathbb{N}} e^{\frac{c_n^2}{2}} = e^{\frac{1}{2}\|c\|_{l^2}^2} .$$

On a la même inégalité en remplaçant c par $-c$, d'où, en additionnant :

$$\text{Esp.}(\text{ch}(\sum_{n=o}^{+\infty} c_n Z_n)) \le e^{\frac{1}{2}\|c\|_{l^2}^2} .$$

En développant le 1er membre :

$$\text{Esp.}\left(\frac{|\Sigma c_n Z_n|^{2k}}{(2k)!}\right) \le e^{\frac{1}{2}\|c\|_{l^2}^2}$$

pour tout k. Donc, pour $\|c\|_{l^2} \le 1$, on a

$$\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n Z_n\|_{L^{2k}(\Omega,\mu)}^{2k} \le (2k)!\sqrt{e} ,$$

d'où

$$\|(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{2k,l^2}^{*} \le ((2k)!\sqrt{e})^{\frac{1}{2k}} :$$

et Z est bien de type (p, l^2) pour tout p fini.

Corollaire (Inégalités de Khintchine) : Il existe des constantes A_p, B_p $(0 < p < +\infty)$ telles que, pour toute $c \in l^2$:

$$A_p \|c\|_{l^2} \le \|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n Z_n\|_{L^p(\Omega,\mu)} \le B_p \|c\|_{l^2} .$$

Il existe une constante M et un δ, $0 < \delta < 1$, tel que

$$\|c\|_{l^2} \le M J_\delta(\mu, \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n Z_n) .$$

<u>Démonstration</u> : Les premières inégalités expriment que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type et cotype (p,l^2) ; la dernière exprime qu'elle est de cotype $(0,l^2)$ (elle est aussi de type $(0,l^2)$, d'où une inégalité en sens inverse <u>pour tout</u> δ, mais c'est dans le sens trivial).

Ces inégalités de Khintchine avaient été admises au théorème p.(VIII,3).

Considérons maintenant une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi stable d'indice r,

$$\theta_r(x)dx\ ,\ \mathcal{F}(\theta_r dx) = e^{-|t|^r}\ ,\ 1\le r\le 2\ .$$

(On peut considérer le cas $0<r<1$, mais nous ne le ferons pas pour simplifier).

Alors $c_n U_n$ suit la loi d'image de Fourier $e^{-|c_n t|^r}$. donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n U_n$, pour $c\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, suit la loi d'image de Fourier $e^{-|\,\|c\|_{l^r}t|^r}$, c-à-d. la loi homothétique de $\theta_r d_x$ dans le rapport $\|c\|_{l^r}$. Pour $r<2$, pour x grand, $\theta_r(x)$ est comparable à $|x|^{-r-1}$, donc elle a des moments d'ordre p pour tout $p<r$. Alors $U=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type (p,l^r) pour tout $p<r$, avec, pour $p>0$:

$$\|(U_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^*_{p,l^r} = \sup_{\substack{c\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\\ \|c\|_{l^r}\le 1}} \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n U_n\right\|_{L^p(\Omega,\mu)} = \|\theta_r dx\|_p\ .$$

Elle n'est pas de type p pour $p\ge r$.

Elle est aussi de cotype (p,l^r) avec, pour $p>0$:

$${}^*\|(U_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,l^r} = \left(\inf_{\substack{c\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\\ \|c\|_{l^r}\ge 1}} \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n U_n\right\|_{L^p(\Omega,\mu)}\right)^{-1} = \|\theta_r d_x\|_p^{-1}\ .$$

Son cotype $(0,l^r)$ donne lieu aux inégalités

$$(J_\delta((U_n)_{n\in\mathbb{N}}))_{l^r} = \left(\operatorname*{Inf}_{\substack{c\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}\\ \|c\|_{l^r}\geq 1}} J_\delta(\mu, \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n U_n) \right)^{-1}$$

$$= (J_\delta(\theta_r\, dx))^{-1} \quad , \quad 0<\delta<1 .$$

Et naturellement elle est a fortiori de cotype (p,l^r) pour $p\geq r$ avec

$$\overset{*}{\|}(U_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,l^r} = 0 .$$

Pour $r=2$, les résultats relatifs au cotype subsistent, mais en outre la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de type p pour tout p fini (les U_n sont gaussiennes). En résumé :

<u>Proposition (XXVI,2;3)</u> : <u>Soit</u> $U=(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi stable</u> $\theta_r(x)dx$ <u>d'indice r,</u> $\mathcal{F}\theta_r = e^{-|t|^r}$, <u>$1\leq r\leq 2$. Alors U est de type (p,l^r), pour $p<r$ si $r<2$, pour tout p fini si $r=2$; elle est de cotype (p,l^r) pour tout p</u>.

<u>Proposition (XXVI,3;3)</u> : <u>Soit</u> $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la loi stable</u> $\theta_r dx$ <u>d'indice r, $1\leq r\leq 2$. Soit</u> $\alpha=(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>une suite de nombres complexes. Pour que la série</u> $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n U_n|^q$, <u>$1\leq q<+\infty$, soit presque sûrement convergente, il faut et il suffit que</u> :

$$\alpha\in l^{\mathrm{Min}(r,q)} \quad \text{si} \quad r\neq q \quad \text{et} \quad r\neq 2$$

$$\alpha\in l^{r-} \text{ , i.e. } \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^r(1+|\log \frac{1}{|\alpha_n|}|) <+\infty \quad ,$$

si $r=q<2$;

$\alpha\in l^q$ si $r=2$.

<u>Pour que</u> $(\alpha_n U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>soit presque sûrement bornée, avec $r<2$, il faut et il suffit que $\alpha\in l^r$ (nous n'étudierons pas la condition pour $r=2$)</u>.

Démonstration : Nous appliquerons le théorème des 2 séries de Kolmogorov (puisque $|\alpha_n U_n|^q \geq 0$).

- A) La 1ère série est $\sum_{n\in\mathbb{N}} \Pr\{|\alpha_n U_n| > 1\} = 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\frac{1}{\alpha_n}}^{+\infty} \theta_r(x)dx$.

- A_1) Soit d'abord $r<2$; $\int_{\frac{1}{|\alpha_n|}}^{+\infty} \theta_r(x)dx$ est comparable à $|\alpha_n|^r$, et la première condition est donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^r < +\infty$. Remarquons que si on remplace $|\alpha_n X_n| > 1$ par $|\alpha_n X_n| > k$, la condition est la même. Donc, si $\Sigma|\alpha_n|^r < +\infty$, la suite $(\alpha_n U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement bornée par k pour n assez grand ; ceci est vrai pour tout k, donc $\alpha_n U_n$ converge presque sûrement vers 0. Si $\Sigma|\alpha_n|^r = +\infty$, cette suite est presque sûrement non bornée par k, et ceci quel que soit k, donc $(\alpha_n U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement en dehors de l^∞, ce qui règle la dernière affirmation de l'énoncé.

- A_2) Pour $r=2$, intervient une condition beaucoup plus faible, à cause de la décroissance à l'infini de la fonction de Gauss ; sans l'écrire exactement, retenons qu'elle implique qu'α_n tende vers 0, et qu'elle est impliquée par $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|^\rho < +\infty$, pour un ρ fini quelconque.

- B) La 2ème série est $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Esp.}(|\alpha_n U'_n|^q)$, où U'_n est la variable aléatoire égale à U_n si $|U_n| \leq \frac{1}{\alpha_n}$, à 0 autrement. La 2ème condition est donc $2\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^q \int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q\, \theta_r(x)\, dx < +\infty$; dans tous les cas, on sait déjà que α_n tend vers 0, donc $\frac{1}{|\alpha_n|}$ vers $+\infty$, et $\int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}}$ tend vers $\int_0^{+\infty}$ (fini ou non).

- B_1) Si $r<2$, et $q<r$, $\int_0^{+\infty} x^q\, \theta_r(x)\, dx < +\infty$, et la condition écrite est donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$. Et l'ensemble des 2 conditions de Kolmogorov est donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}|\alpha_n|^q < +\infty$, ou $\alpha \in l^q = l^{\mathrm{Min}(q,r)}$.

- B_2) Si $r<2$, et $q>r$, $x^q \theta_r(x)$ est comparable à x^{q-r-1} pour x grand, et $\int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q \theta_r(x)\,dx$ comparable à $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right|^{q-r}$; la condition écrite est donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^q \left|\frac{1}{\alpha_n}\right|^{q-r} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^r < +\infty$; ou $\alpha \in l^r = l^{\mathrm{Min}(q,r)}$.

- B_3) Si $r<2$, et $q=r$, $x^q \theta_r(x)$ est comparable à $\frac{1}{x}$ pour x grand, donc $\int_0^{\frac{1}{|\alpha_n|}} x^q \theta_r(x)\,dx$ à $\log \frac{1}{|\alpha_n|}$; la condition écrite est donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^q \left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right| < +\infty$. Et l'ensemble des conditions est donc

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^r \left(1+\left|\log \frac{1}{|\alpha_n|}\right|\right) < +\infty ,$$

notée $\alpha \in l^{r-}$. [N.B. Il faut bien écrire $1+|\log|$, et non simplement $|\log|$: il ne suffirait pas que α_n tende vers 1 très vite ; on peut supprimer le 1 en ajoutant que α_n tend vers 0. Nous avons mis des $|\;|$ pour avoir des quantités ≥ 0, et $\log \frac{1}{|\alpha_n|}$ plutôt que $\log|\alpha_n|$ parce que α_n tend vers 0].

- B_4) Examinons enfin le cas $r=2$. Alors $\int_0^{+\infty} x^q \theta_2(x)\,dx < +\infty$, quel que soit q fini. donc la condition écrite est $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$. Comme celle-ci est plus forte que la 1ère condition, l'ensemble des deux est $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^q < +\infty$, ou $\alpha \in l^q$, ce qui achève de démontrer la proposition.

§ 3. APPLICATION DU THEOREME DE DUALITE

La possession de probabilité sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, dont nous possédons le cotype. va nous permettre d'appliquer le théorème de dualité. Toutes les propriétés d'approximation sont ici vérifiées, par troncature (à la fois celle du § 4 de l'exposé V, et celle de (XXV,4;1)). D'autre part, nous avons vu, à la fin de l'exposé XXV, que toute probabilité sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, portée par l^s, provient d'une probabilité de Radon sur l^s, remplacé par $\sigma(l^\infty, l^1)$, si $s=+\infty$.

Proposition (XXVI,3;1) (Khintchine-Kolmogorov) :

1) L'injection canonique (faiblement continue) de $\sigma(l^1,c^o)$ dans l^2 est p-radonifiante pour tout $p \geq 0$;

2) Soit $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires $X_n \in L^o(\Omega,\mu)$, de type (p,l^∞) ; alors elle est d'ordre (p,l^2), autrement dit $\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n|^2$ converge presque sûrement, et, pour $p>0$:

$$\left(\int\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |X_n(\omega)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{const.} \|(X_n)_{n\in\mathbb{N}}\|^*_{p,l^2}$$

$$= \text{const.} \sup_{\substack{c\in\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \\ \|c\|_{l^\infty}\leq 1}} \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X_n\right\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

(la constante dépend de p, et n'est pas forcément bornée si p tend vers 0).

Démonstration : Utilisons la suite Z de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Rademacher. Nous avons vu qu'elle est de cotype (p,l^2) pour tout $p\geq 0$, prop.(XXVI,2;2) ; d'autre part $|Z_n|=1$, donc la probabilité λ_Z sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par Z est portée par la sphère unité de l^∞, donc Z est de Radon d'ordre (p,l^∞)♦ pour tout p. On peut appliquer le théorème de dualité avec $U=l^\infty$ et avec $V=\sigma(l^2,l^2)$; mais une probabilité de Radon sur $\sigma(l^2,l^2)$ provient d'une probabilité de Radon sur l^2. Alors le théorème de dualité est l'énoncé 2) de la présente proposition (Z est de cotype (p,l^2) et d'ordre (p,l^∞), donc toute X de type (p,l^∞) est d'ordre (p,l^2)).

On passe de là immédiatement à l'énoncé 1. Soit λ une probabilité cylindrique de type p sur $\sigma(l^1,c^o)$. Elle peut s'exprimer comme $\lambda_{\overline{X}}$, où $\overline{X}$ est une application linéaire continue de c^o dans un $L^p(\Omega,\mu)$, donc un prolongement à c^o d'une application X continue de $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, c-à-d. d'une suite $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires, de type (p,l^∞), λ_X étant l'image de $\lambda_{\overline{X}}$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Alors X est de Radon d'ordre (p,l^2), donc λ_X provient d'une probabilité de Radon Λ sur l^2, d'ordre p. Il reste à montrer que $\Lambda=\lambda_{\overline{X}}$. Toutes deux sont des probabilités cylin-

♦ l^∞ est pris comme dual le l^1, avec la topologie $\sigma(l^\infty,l^1)$ est la norme duale driques sur l^2 (car $\sigma(l^1, c^o) \subset l^2$), et les fonctions aléatoires associées $l^2 \to L^p(\Omega, \mu)$ sont continues, et coïncident sur $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ (car Λ et $\lambda_{\underline{X}}$ ont même image λ_X dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) dense, donc elles coïncident, cqfd.

Nous allons maintenant étudier les applications $(p, l^a; p, l^b)$-radonifiantes (complètement pour $p < 1$, incomplètement pour $p \geq 1$). La démonstration est longue et filandreuse (le résultat aussi!). Pour éviter la multiplication des propositions, nous donnerons une proposition et 2 lemmes.

Proposition (XXVI, 3;2) : Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires; appelons aussi α l'application diagonale $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même.
Soit $1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 2$, $0 \leq p \leq +\infty$. Pour que α soit $(p, l^a; p, l^b)$-radonifiante, il est suffisant que l'on ait

$$\alpha \in l^{\mathrm{Min}(a,b)} \quad \text{si} \quad a \neq b \quad \text{ou} \quad a = b = 2\,,$$

$$\alpha \in l^{a-} \quad \text{si} \quad a = b \neq 2\,;$$

c'est aussi nécessaire si $p < a \leq 2$. ou si $p < +\infty$ $a = 2$.

Démonstration

A) Supposons que α soit $(p, l^a; p, l^b)$-radonifiante, avec $p < a \leq 2$, ou p fini, $a = 2$. Prenons la suite $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (XXVI, 2;3 et 4) correspondant à $r = a$; vu les conditions relatives à p, elle est de type (p, l^a). Donc $\alpha U = (\alpha_n U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ doit être d'ordre (p, l^b). A fortiori $(\alpha_n U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque sûrement dans l^b. La prop.(XXVI, 2;4) donne $\alpha \in l^{\mathrm{Min}(a,b)}$ si $a \neq b$, $a < 2$, $\alpha \in l^{a-}$ si $a = b < 2$, $\alpha \in l^b = l^{\mathrm{Min}(a,b)}$ si $a = 2$. Ceci montre la nécessité de la condition.

Remarque : On voit que cette nécessité subsiste même pour $p < a < 2$. b non nécessairement ≤ 2, en prenant même $\sigma(l^\infty, l^1)$ au lieu de l^∞ si $b = +\infty$, ou pour $p < +\infty$, $a = 2$, b quelconque $< +\infty$.

B) Supposons d'abord $p=0$. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite analogue correspondant à $r=b$, elle est de cotype $(0,l^b)$; et l'hypothèse faite sur α assure que $(\alpha_n U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Radon d'ordre $(0,l^a)$, par (XXVI,2;4). On peut appliquer théorème de dualité avec $U=l^a$, $V=\sigma(l^b,l^{b'})$ (sauf pour $b=1$, où l'on devra prendre $\sigma(l^1,c^o)$ pour que la boule soit compacte) ; mais, ici encore, l^b étant polonais, toute probabilité de Radon sur $\sigma(l^b,l^{b'})$ (ou $\sigma(l^1,c^o)$) provient d'une probabilité de Radon sur l^b (ou l^1). On en déduit (α étant sa propre transposée) que α est bien $(0,l^a\,;\,0,l^b)$-radonifiante. Soit maintenant $p>0$. Le corollaire 2 de la prop.(XVII,4;1) montre que α est aussi $(p,l^a\,;\,p,l^b)$-radonifiante pour tout $p\geq 0$. Ceci démontre la suffisance de la condition.

<u>Lemme (XXVI,3;3)</u> : <u>Pour $b\geq 2$, $\alpha\in l^a$, α est toujours $(p,l^a\,;\,p,l^b)$-radonifiante pour tout $p\geq 0$.</u>

<u>Démonstration</u> : On voit que $\alpha\in l^a$ applique continuement l^∞ dans l^a ; donc, si $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de type (p,l^a), $\alpha X=(\alpha_n X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera de type (p,l^∞) (X est continue $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^a}\to L^p(\Omega,\mu)$, et α est continue $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^\infty}\to(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^a}$, donc $\alpha X=X\circ\alpha$ est continue $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^\infty}\to L^p(\Omega,\mu)$). D'après la prop. (XXVI,3;1), αX est alors d'ordre (p,l^2) ; donc a fortiori d'ordre (p,l^b) pour $b\geq 2$.

<u>Lemme (XXVI,3;4)</u> : Si α est $(p,l^a\,;\,p,l^b)$-radonifiante (pour $b=+\infty$, on peut remplacer l^b par $\sigma(l^\infty,l^1)$) on peut affirmer que $\alpha\in l^a$, dans tous les cas suivants :

$p<a<2$; $a=2$, $b<+\infty$, $p<+\infty$;

$a=2$, $b=+\infty$, $p<2$; $a>2$, $p<2$; donc en particulier dans tous les cas si $p<\mathrm{Min}(a,2)$.

<u>Démonstration</u> : Pour $a<2$, b quelconque, ou $a=2$, b fini, cela résulte de la remarque qui suit la partie A de la démonstration de (XXVI,3;2).

Il ne reste donc que les cas $a>2$, b quelconque, ou $a=2$, $b=+\infty$, avec, dans les 2 cas, l'hypothèse $p<2$. Soit $p<q<2$, et soit

$\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}}$; β opère continuement de l^a dans l^q. Si donc X est de type (p, l^q), βX sera de type (p, l^a), et donc $\alpha\beta X$ d'ordre (p, l^b) ; donc $\alpha\beta$ est $(p, l^q ; p, l^b)$-radonifiante. Mais maintenant $p < q < 2$, donc on déduit du cas déjà réglé que $\alpha\beta \in l^q$. Ainsi, pour toute $\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{q}-\frac{1}{a}}}$. $\alpha\beta = (\alpha_n \beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans l^q ; donc $\alpha \in l^a$, <u>cqfd</u>.

Nous allons miantenant nous borner à $p < 1$, pour avoir des conditions nécessaires et suffisantes (que j'ignore pour p quelconque).

<u>Théorème (XXVI,3;5)</u> : Soit $0 \leq p < 1$, $1 \leq a \leq +\infty$, $1 \leq b \leq +\infty$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour que la multiplication par α soit $(p, l^a ; p, l^b)$-radonifiante (l^∞ pouvant être remplacé par (l^∞, l^1) si $b = +\infty$) il faut et il suffit que $\alpha \in l^{\mathrm{Min}(a,b)}$, sauf dans les cas suivants :

$a = b < 2$. où la condition est $\alpha \in l^{a-}$ (i.e. $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^a (1 + |\log \frac{1}{|\alpha_n|}|) < +\infty$) ;

$a > b \geq 2$. où la condition est $\alpha \in l^a$;

$a > 2 > b$, où la condition est $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2}}}$.

<u>Démonstration</u> :

A) Soit $a < b$. La condition énoncée est alors $\alpha \in l^a$. On sait qu'elle est nécessaire par le lemme (XXVI,3;4). On sait qu'elle est suffisante si $b < 2$ par la prop. (XXVI,3;2), pour $b \geq 2$ par le lemme (XXVI,3;3).

B) Soit $a = b$.

La condition énoncée est $\alpha \in l^{a-}$ si $a < 2$, on sait alors qu'elle est nécessaire et suffisante par (XXVI,3;2), et $\alpha \in l^a$ si $a \geq 2$, on sait qu'elle est nécessaire par (XXVI,3;4) et suffisante par (XXVI,3;3).

C) Soit $a > b$.

- C_1) Si $a > b \geq 2$, la condition $\alpha \in l^a$ est nécessaire par (XXVI,3;4), suffisante par (XXVI,3;3).

- C_2) Soit $2 \geq a > b$. Cela résulte de (XXVI,3;2).

- C_3) Soit enfin $a > 2 > b$.

Supposons $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2}}}$. On peut alors écrire $\alpha = \beta\gamma$, avec $\beta \in l^a, \gamma \in l^{\frac{1}{\frac{1}{b}-\frac{1}{2}}}$. Alors β opère de l^∞ dans l^a ; si donc X est une suite de variables aléatoires de type (p, l^a), βX est de type (p, l^∞) ; d'après (XXVI,3;1), elle est d'ordre (p, l^2) ; comme γ opère de l^2 dans l^b, $\alpha X = \beta\gamma X$ est d'ordre (p, l^b). Donc α est bien $(p, l^a ; p, l^b)$-radonifiante.

Inversement, supposons que α soit $(p, l^a ; p, l^b)$-radonifiante. Prenons $\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}}$. Alors β opère de l^a dans l^2 ; donc, si X est de type (p, l^2), βX est de type (p, l^a), et par suite $\alpha\beta X$ de type (p, l^b). Donc $\alpha\beta$ est $(p, l^2 ; p, l^b)$-radonifiante. D'après le cas C_2 déjà réglé, $\alpha\beta \in l^b$. Donc, pour tout $\beta \in l^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}}$, $\alpha\beta$ est dans l^b ; donc $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{b}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{a})}} = l^{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2}}}$,

<u>cqfd</u>.

§ 4. APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES DANS LES ESPACES DE SUITES

<u>Théorème (XXVI,4;1)</u> : <u>Soient $1 \leq a \leq +\infty$, $1 \leq b \leq +\infty$</u>.
<u>Pour que l'application $\alpha : (c_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit p-radonifiante (p donné, $0 \leq p < 1$) de $l^{a'}$ $(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'} = 1$; pour $a = +\infty$, l^1 doit être remplacé par $\sigma(l^1, c^0)$; pour $a = 1$, l^∞ doit être remplacé par $\sigma(l^\infty, l^1)$) dans l^b (pour $b = 1$, l^1 doit être remplacé par $\sigma(l^1, c^0)$, et, pour $b = +\infty$, l^∞ doit être remplacé par $\sigma(l^\infty, l^1)$), il faut et il suffit que $\alpha \in l^{\mathrm{Min}(a,b)}$, sauf dans les cas suivants</u> :

<u>$a = b < 2$, où la condition est $\alpha \in l^{a-}$</u> ;
<u>$a > b \geq 2$, où la condition est $\alpha \in l^a$</u> ;
<u>$a > 2 > b$, où la condition est $\alpha \in l^{\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{2}}}$</u>.

<u>Démonstration</u> : Tout revient à démontrer que α est p-radonifiante de $l^{a'}$ dans l^b, si et seulement si elle est $(p, l^a ; p, l^b)$-radonifiante (avec les remplacements voulus pour les valeurs 1 et $+\infty$. Pour simplifier, nous n'examinerons, dans la démonstration, que les cas $1 < a < +\infty$, $1 < b < +\infty$, le lecteur rétablira aisément le reste).

Supposons α p-radonifiante de $l^{a'}$ dans l^b. Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de type (p, l^a). Elle définit une application linéaire continue de $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^a}$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, prolongeable en une application linéaire continue $\overline{X}$ de l^a dans $L^p(\Omega, \mu)$: à celle-ci est associée une probabilité cylindrique $\lambda_{\overline{X}}$ de type p sur $l^{a'}$, et λ_X est l'image de $\lambda_{\overline{X}}$ par l'injection canonique $l^{a'} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. L'image de $\lambda_{\overline{X}}$ par α est donc de Radon d'ordre p dans l^b ; donc $\lambda_{\alpha X}$ provient d'une probabilité de Radon d'ordre p sur l^b, donc est ce que nous avons appelé de Radon d'ordre p, l^b). Donc α est bien $(p, l^a ; p, l^b)$-radonifiante.

Inversement, supposons que α soit $(p, l^a ; p, l^b)$-radonifiante. Soit λ une probabilité cylindrique de type p sur $l^{a'}$; on peut la définir comme $\lambda_{\overline{X}}$, où $\overline{X}$ est une application linéaire continue de l^a dans $L^p(\Omega, \mu)$. La restriction X de $\overline{X}$ à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ est alors continue de $(\mathbb{K}^{(\mathbb{N})})_{l^a}$ dans $L^p(\Omega, \mu)$, donc de type (p, l^a). Donc $\lambda_{\alpha X}$ est de Radon d'ordre (p, l^b), c-à-d. image, par l'injection canonique $l^b \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d'une probabilité de Radon Λ d'ordre p sur l^b. Dans tous les cas considérés, il est trivial de vérifier que α envoie faiblement continuement $l^{a'}$ dans l^b, donc $\alpha.\lambda$ est une probabilité cylindrique sur l^b, et $\alpha.\lambda$ et Λ ont même image dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On peut représenter Λ comme une $\Lambda_{\overline{Y}}$, $\overline{Y}$ fonction aléatoire linéaire continue de $l^{b'}$ dans $L^p(\Omega_1, \mu_1)$; alors les restrictions αX et Y de $\alpha\overline{X}$ et $\overline{Y}$ à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ sont <u>isonomes</u> puisque $\alpha.\lambda$ et Λ ont même image dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donc, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ étant dense dans l^b, $\alpha\overline{X}$ et $\overline{Y}$ elles aussi sont isonomes ; donc $\lambda_{\alpha\overline{X}} = \Lambda_{\overline{Y}}$ ou $\alpha.\lambda = \Lambda$, et α est bien p-radonifiante de $l^{a'}$ dans l^b.

<u>Corollaire</u> : <u>Pour $a = \infty$ ou $b = 1$, on a le même énoncé en remplaçant (l^1, c^0) par l^1 : pour $a = 1$ ou $b = +\infty$, on a le même énoncé en remplaçant (l^∞, l^1) par l^∞ ou c^0.</u>

<u>Démonstration</u> : C'est évident dans un sens, montrons l'autre.
1) Supposons α p-radonifiante de l^1 (c-à-d, de $\sigma(l^1, l^\infty)$) dans l^b ; montrons qu'elle l'est aussi de $\sigma(l^1, c^0)$ dans l^b.

Soit $\gamma \in c^o$; γ applique continuement $\sigma(l^1, c^o)$ dans $\sigma(l^1, l^\infty)$. Donc $\alpha\gamma$ est p-radonifiante de $\sigma(l^1, c^o)$ dans l^b. Donc $\alpha\gamma$ vérifie les conditions de l'énoncé ; ceci devant être vrai pour toute $\gamma \in c^o$, α vérifie les mêmes conditions, donc est aussi p-radonifiante de $\sigma(l^1, c^o)$ dans l^b.

1') De la même manière, si α est p-radonifiante de l^∞ ou même de c^o dans l^b, elle l'est de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^b.

2) Supposons α p-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$,montrons qu'elle l'est de $l^{a'}$ dans c^o. On sait que α vérifie les conditions de l'énoncé ; elles impliquent toujours que α tende vers 0, et puisse être écrit sous la forme $\beta\gamma$, où β vérifie les mêmes conditions et où $\gamma \in c^o$, sauf pour $a = b = +\infty$. Si on excepte donc ce dernier cas, β est déjà p-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$; mais γ est continue de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans $\sigma(c^o, l^1)$, donc α est p-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(c^o, l^1)$, donc dans c^o par Phillips. Reste le cas $a = b = +\infty$. Si α est p-radonifiante de l^1 ou $\sigma(l^1, c^o)$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$, cela signifie seulement que $\alpha \in l^\infty$, et on utilise le fait que l'injection canonique (α = Identité) est déjà p-radonifiante ; mais on sait qu'elle l'est même de $\sigma(l^1, c^o)$ dans l^2 (prop.(XXVI,3;1)), a fortiori dans c^o .

<u>Exemples</u> :

1) L'injection canonique de $l^{a'}$ dans l^b est 0-radonifiante, si et seulement si $a' = 1$, $b \geq 2$ (la prop. (XXVI,3;1) est donc la seule possible avec l'injection canonique).

2) α est 0-radonifiante de $l^{a'}$ dans $\sigma(l^\infty, l^1)$ ou l^∞ ou c^o, si et seulement si $\alpha \in l^a$.

3) α est 0-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ ou l^∞ ou c^o dans l^b, si et seulement si $\alpha \in l^1$, sauf pour $b = 1$ où la condition est $\alpha \in l^{1-}$. Donc α ne peut être 0-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans un l^b, $b > 1$, sans l'être de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans l^b pour tout $b > 1$.

Si $\alpha \in l^1$ mais $\alpha \notin l^{1-}$, α est 0-radonifiante de $\sigma(l^\infty, l^1)$ dans $l^{1+\varepsilon}$ pour tout

$\varepsilon > 0$, mais non de $\sigma(l^{\infty}, l^{1})$ dans l^{1} ; par contre, elle est nucléaire, donc <u>1-radonifiante</u> de $\sigma(l^{\infty}, l^{1})$ dans l^{1} (prop. (XII,2;1)) ;

4) α est 0-radonifiante de l^{b} dans l^{b}, si et seulement si $\alpha \in l^{b'}$ pour $b \geq 2$, $\alpha \in l^{2}$ pour $b \leq 2$.

<u>N. B.</u> : La deuxième partie de la Démonstration de la Proposition (XXVI,3;1) est insuffisante ; on en trouvera la démonstration complète au Théorème (XXVI,4;1).
