S. CHEVET

Conditions suffisantes d'existence de versions à trajectoires uniformément continues et application aux fonctions aléatoires gaussiennes

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 22, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A24_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

CONDITIONS SUFFISANTES D'EXISTENCE DE VERSIONS A TRAJECTOIRES UNIFORMEMENT CONTINUES ET APPLICATION AUX FONCTIONS ALEATOIRES GAUSSIENNES

par S. CHEVET

Exposé N° 22 27 Avril 1970

Comme dans l'exposé précédent, K est un espace uniforme pré-compact et métrisable, d une distance sur K compatible avec la structure uniforme de K, (E,δ) un espace métrique complet et $\widetilde{X} : K \to L^0(\Omega,P;E)$ une fonction aléatoire. De plus, dans cet exposé, η désignera une fonction de $]0,\alpha] \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ $(\alpha > 0)$ telle que pour tout $a > 0$, $h \to \eta(h,a)$ est une fonction croissante, et $\eta(h,a) \to 0$ quand $h \to 0$.

Dans ce qui suit, quand il n'y aura aucun risque de confusion, on notera aussi par $\widetilde{X}$ une version arbitraire de $\widetilde{X}$.

Dans l'exposé XXI, nous avions été amené à considérer la condition suivante :

(A) "Il existe une suite $(M_n,\alpha_n,b_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}^+_* \times \mathbb{R}^+_*$ telle que $(M_n,\alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n \operatorname{card} \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \sup_{\{s,t\}\in\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} P(\delta(\widetilde{X}(s),\widetilde{X}(t)) \geq b_n < +\infty ."$$

Nous avions montré (corollaire 2, proposition (XXI,3;1)) que si $\widetilde{X}$ est continue et satisfait (A), alors $\widetilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K.

Dans cet exposé nous avons l'intention de donner des applications de ce résultat. On a trivialement le

<u>Théorème XXII</u> : Supposons $\widetilde{X} : K \to L^0(\Omega,P;E)$ continue. Alors, si la condition (C) :

(C) "il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels > 0, telles que $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n P^2(K;K,d,\alpha_{n+1}) \sup_{\substack{(s,t)\in K^2 \\ d(s,t)\leq 3\alpha_n}} P[\delta(\widetilde{X}(s),\widetilde{X}(t)) \geq b_n] < \infty \text{ "}$$

<u>est satisfaite</u>♦, $\tilde{X}$ <u>est à trajectoires uniformément continues sur</u> K.

<u>Remarque 1</u> : Rappelons (voir exposé XVIII) que
$\text{Log } P(K;K,d,\alpha_{n+1}) = H_K(K;d,\alpha_{n+1})$ est l'entropie de K par rapport à K et d et que

$$H_K(K;d,\alpha_{n+1}) \leq C(K;d,\alpha_{n+1}) \leq H(K;d,\alpha_{n+1}) \ .$$

On obtient ainsi des conditions suffisantes analogues à (C) en remplaçant $P(K;d,\alpha_{n+1})$ par $M(K;d,\alpha_{n+1})$ ou par $N(K;d,\alpha_{n+1})$.

<u>Remarque 2</u> : Nous verrons plus loin que l'on peut améliorer la condition (C) dans la cas où K est un compact convexe de $\mathbb{R}^k$.

<u>Définition</u> : On dira qu'on a la condition $(A_{\eta,K,d})$ (resp. la condition $(C_{\eta,K,d})$) si l'on a :
"Il existe une suite $(M_n,\alpha_n,b_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K)\times\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$ telle que $(M_n,\alpha_n)_n$ satisfait $(p_{K,d})$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n \text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)\eta(3\alpha_n,b_n) < \infty \text{ "}$$

(resp. "Il existe une suite $(\alpha_n,b_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}_*^+\times\mathbb{R}_*^+$ telle que $\alpha_n\downarrow 0$, $\sum_n b_n < \infty$ et $\sum_n P(K;d,\alpha_{n+1})\eta(3\alpha_n,b_n) < \infty$").

<u>Remarque 3</u> : Dans le § 1, nous verrons que l'on peut avoir la condition $(A_{\eta,K,d})$ sans avoir la condition $(C_{\eta,K,d})$ et qu'il existe des fonctions η pour lesquelles les conditions $(A_{\eta,K,d})$ et $(C_{\eta,K,d})$ sont équivalentes.

<u>Remarque 4</u> : La condition $(C_{\eta,K,d})$ est plus maniable que la condition $(A_{\eta,K,d})$. Notons que $P(K;d,\alpha_{n+1})\to 0$, quand $\alpha_n\to\infty$ (si K est infini), tandis que $\eta(3\alpha_n,b_n)\to 0$, quand $n\to+\infty$.

♦Dans ce qui suit, on écrira $P(K;d,\alpha_{n+1})$ au lieu de $P(K;K,d,\alpha_{n+1})$.

Bien entendu si $\tilde{X} : K \to (\Omega, P; E)$ satisfait

$$P(\delta(\tilde{X}(s), \tilde{X}(t)) \le \eta(d(s,t), a)$$

dès que $d(s,t) \le \alpha$ et si $(A_{\eta,K,d})$ (resp. $(C_{\eta,K,d})$) est vérifiée, alors $\tilde{X}$ est à trajectoires uniformément continues sur K.

Donnons dès maintenant un exemple : soit $\tilde{X} : \mathbb{R}^k \to L^o(\Omega, P)$ une fonction aléatoire du mouvement brownien à k paramètres de temps et soit $|.|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$. $\tilde{X}$ satisfait donc

$$P(|\tilde{X}(s) - \tilde{X}(t)| \ge a) \le \eta(|s-t|, a)$$

avec

$$\eta(h, a) = \frac{\sqrt{h}}{\pi a} \exp\left(-\pi \frac{a^2}{h}\right).$$

Comme pour tout compact K de $\mathbb{R}^k$, il existe une constante réelle >0, C_K, telle que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$P(K; d, \varepsilon) \le C_K (1/\varepsilon)^k$$

et que si $\alpha_n = 1/2^n$, $b_n = 1/n^2$, la série de terme général

$$\frac{1}{(\alpha_{n+1})^k} \eta(3\alpha_n, b_n)$$

converge, $\tilde{X}$ est donc à trajectoires continues sur $\mathbb{R}^k$.

§ 1. COMPARAISONS DES CONDITIONS $(A_{\eta,K,d})$ et $(C_{\eta,K,d})$

1) Nous allons commencer par comparer $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ et card M_{n+1}.

Théorème (XXII,1;1) : soit K un compact d'un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$. Si K est convexe et si (M_n,α_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{P}(K)\times\mathbb{R}_*^+$ satisfaisant $p_{(K,\|.\|)}$, alors

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(2\alpha_n) \geq \frac{1}{2} \text{ card } M_{n+1} .$$

Démonstration (simple) : Par définition, $\mathfrak{M}_n(2\alpha_n)$ est la famille des parties de K à deux éléments s et t tels que (s,t) ou (t,s) appartienne à $M_n \times M_{n+1}$ et $d(s,t) \leq 2\alpha_n$. Trivialement

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(2\alpha_n) \geq \frac{1}{2} \text{ card } A_n + \text{card } B_n$$

avec

$$A_n = \{(s,t) ; s \neq t,\ s \in M_{n+1} \cap M_n ,\ t \in M_n ,\ \|s-t\| \leq 2\alpha_n\} ,$$

$$B_n = \{(s,t) ; s \in M_{n+1} \backslash M_n ,\ t \in M_n ,\ \|s-t\| \leq 2\alpha_n\} .$$

Mais, par définition même de M_n,

$$\forall\ t \in M_{n+1} ,\ \exists\ s \in M_n : \|s-t\| \leq \alpha_n \ ;$$

donc

$$\text{card } B_n \geq \text{card}(M_{n+1} \backslash M_n) .$$

D'autre part, si $\text{card}(M_{n+1} \cap M_n) \geq 2$, alors :

$$\forall\ s \in M_n ,\ \exists\ t \neq s \,/\, t \in M_n ,\ \|s-t\| \leq 2\alpha_n . \tag{1}$$

Sinon il existerait $s_o \in M_n$, tel que pour tout $t \in M_n$, distinct de s, on ait $\|s-t\| > 2\alpha_n$. Par suite, si $t_o \neq s_o$, $t_o \in M_n$ et si s_1 est le point du segment $[s_o,t_o]$ tel que $\|s_o-s_1\| = \alpha_n$, on a pour tout $t' \in M_n$

$$\|t'-s_1\| \geq \|t'-s_o\| - \|s_o-s_1\| > \alpha_n \ ,$$

ce qui contredit la définition de M_n , puisque $s_1 \in K$.
Par suite, en appliquant (1) à chaque $s \in M_n \cap M_{n+1}$, on déduit

$$\text{card } A_n \geq \text{card } M_n \cap M_{n+1} \ . \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

<u>Théorème (XXII,1;2)</u> : <u>Soient</u> S <u>un corps convexe borné de</u> $\mathbb{R}^k$, p_S <u>la jauge de</u> S <u>et</u> K <u>un compact de</u> $\mathbb{R}^k$ <u>,d'intérieur non vide. Soient</u> $(M_n)_n$ <u>une suite de parties</u> α_n <u>S-discernables de</u> K <u>et</u> $(\alpha_n)_n$ <u>une suite de réels</u> >0.
<u>Si la suite</u> $(M_n,\alpha_n)_n$ <u>satisfait</u> $P_{(K,p_S)}$, <u>alors</u>

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \leq 4^k \text{ card } M_{n+1} \quad ;$$

<u>si, de plus,</u> K <u>est convexe, alors</u>

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) = \mathcal{O}(\text{card } M_{n+1}) = \mathcal{O}((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad .$$

<u>Remarque</u> : $u_n = \mathcal{O}(v_n) \Leftrightarrow (\exists\ A>0,\ B>0 : A\,u_n \leq v_n \leq B\,u_n\ ,\ \forall\ n)$.

<u>Démonstration</u> : Tout d'abord, pour tout $s \in M_{n+1}$, le nombre d'éléments de M_n tels que $p_S(s-t) \leq 3\alpha_n$ est au plus égal à $M(s+3\alpha_n S,\alpha_n S)$, donc au plus égal à 4^k (cf. proposition 6, § 1, exposé XVIII).
En outre, K ayant un point intérieur, toujours d'après la proposition 6

$$M(K,\alpha_{n+1}S) = \mathcal{O}((\alpha_{n+1})^{-k})$$

$$P(K;K,\alpha_{n+1}S) = \mathcal{O}((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad ;$$

donc

$$\text{card } M_{n+1} = \mathcal{O}((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad .$$

D'où, si K est convexe

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) = \mathcal{O}(\text{card } M_{n+1}) = \mathcal{O}((\alpha_{n+1})^{-k}) \quad .$$

Remarque : Si $K = \prod_{i=1}^{k}[0,a_i]$ $(a_i > 0)$, si $p \in [1,\infty]$, si (ε_n) est une suite de réels > 0, telle que $\varepsilon_n \downarrow 0$, si $M_n = M_k(\varepsilon_n)$ [cf. exemple (XXI,3;1)], si $\alpha_n = k^{1/p}\,\varepsilon_n$ et si d est la distance associée à la norme $\|\cdot\|_p$, alors

$$\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) = \mathcal{O}(\text{card } M_{n+1}) = \mathcal{O}((\varepsilon_n)^{-k}).$$

2) Conséquences

a) Si $\widetilde{X} : K \to L^0(\Omega,P;E)$ est à trajectoires uniformément continues sur K, la condition (A) n'est pas toujours satisfaite.

Considérons pour cela l'exemple suivant : prenons pour K le compact $[0,1]$ de $\mathbb{R}$, pour d la distance $(x,y) \to |x-y|$ et pour $\widetilde{X}$ la fonction aléatoire $t \to t\,Y_o$ de $[0,1]$ dans $L^0(\Omega,P)$, où Y_o est une variable aléatoire réelle relative à (Ω,P), de loi celle de Cauchy, c'est-à-dire

$$P(Y_o \geq a) = \frac{1}{\pi}\int_a^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

(donc $P(|Y_o| \geq a) = \frac{2}{\pi}\,\text{Arctg}\,\frac{1}{a}$, si $a > 0$).

On a :

- $\widetilde{X}$ est à trajectoires (uniformément) continues sur $[0,1]$;
- $u_n = \text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \sup\limits_{\{s,t\}\in\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} P\{|X_s - X_t| \geq a\}$

$$\geq \text{card } M_{n+1}\cdot P\Big(|Y_o| \geq \frac{b_n}{\alpha_{n+1}}\Big) \geq \frac{1}{\alpha_{n+1}}\,\text{Arctg}\,\frac{\alpha_{n+1}}{b_n} \quad ,$$

d'où, quelles que soient les suites $(M_n,\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ telles que $(M_n,\alpha_n)_n$ vérifie $P_{(K,d)}$ et $\sum_n b_n < \infty$, la série de terme général u_n diverge.
La condition (A) n'est donc pas vérifiée. cqfd

b) <u>La condition</u> $(A_{\eta,K,d})$ <u>peut être satisfaite sans que</u> $(C_{\eta,K,d})$ <u>le soit</u>.

Il suffit de considérer une fonction aléatoire réelle $\widetilde{X} : [0,1] \to L^0(\Omega,P)$ satisfaisant :

$$P(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)| \geq a) \leq \eta(|t-s|,a)$$

pour tout s, t dans $[0,1]$ et pour tout $a > 0$, avec

$$\eta(h,a) = \gamma\left(\frac{h}{a}\right)^{3/2},$$

où γ est constante. On prend $K=[0,1]$, d la distance $(x,y) \to |x-y|$. $(C_{\eta,[0,1],d})$ ne peut être satisfaite, car il existe $C > 0$, tel que

$$P^2([0,1],d,\alpha_{n+1})\eta(3\alpha_n,a) \geq \frac{C}{\alpha_{n+1}^2} \cdot \frac{(\alpha_{n+1})^{3/2}}{b_n^{3/2}} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

pour toutes les suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels > 0 vérifiant $\alpha_n \downarrow 0$ et $\sum_n b_n < +\infty$. Par contre $(A_{\eta,[0,1],d})$ est vérifiée : il suffit de prendre $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$ et $(M_n)_n$ une suite de parties de K telle que $(M_n, \frac{1}{2^n})$ vérifie $P_{([0,1],d)}$.

<u>Remarque</u> : il en est ainsi de la fonction aléatoire $t \to t\,Y_0$ de $[0,1]$ dans $L^0(\Omega,P)$ avec Y_0 variable aléatoire réelle, dont la loi est la loi stable d'indice $\frac{3}{2}$ (cf. définition § 5, exposé XV).

c) Comme application immédiate du théorème (XXII,1;2) nous avons le

<u>Théorème XXII,1;3</u> : <u>Soit</u> G <u>un espace vectoriel normé de dimension finie</u> k. <u>Soit</u> η <u>une fonction de</u> $]0,\alpha] \times \mathbb{R}^+$ <u>dans</u> $\mathbb{R}^+$ $(\alpha > 0)$ <u>telle que, pour tout</u> $a > 0$, $h \to \eta(h,a)$ <u>est une fonction croissante et</u> $\eta(h,a) \to 0$, <u>quand</u> $h \to 0$.

Soit $\widetilde{X} : G \to L^0(\Omega, P; E)$ une fonction aléatoire telle que, pour tout couple (t,s) de G vérifiant $d(s,t) \leq \alpha$, on ait

$$P\{\delta(\widetilde{X}(s), \widetilde{X}(t)) \geq b\} \leq \eta(d(s,t), b).$$

Alors, s'il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels > 0, telles que

$$\alpha_n \downarrow 0, \ \sum_n b_n < \infty, \ \sum_n \frac{\eta(3\alpha_n, b_n)}{\alpha_{n+1}^k} < +\infty \ , \tag{1}$$

$\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur G.

Remarque : Malheureusement, si K est un compact convexe d'un espace vectoriel normé de dimension infinie, nous n'avons pu généraliser le théorème (XXII,1;2). Nous ne savons même pas, si l'on a toujours $\dfrac{\text{card } M_{n+1}}{\text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)} \to 0$. Pour K fixé, on peut chercher à déterminer de manière précise card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ bien qu'une estimation non grossière de card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ ne soit pas toujours intéressante dans l'étude de la convergence de la série de terme général $u_n = \text{card } \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) . \eta(3\alpha_n, b_n)$. Nous allons, dans ce qui suit, donner un exemple de calcul de card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$ sans nous préoccuper de la série u_n.

Exemple : Prenons $G = c_o$ (c_o est l'espace de Banach formé des suites numériques tendant vers zéro avec la norme uniforme) ; soit $(a_i)_i$ une suite de réels > 0, telle que $a_i \downarrow 0$. Soit $\| \ \|_\infty$ la norme usuelle dans G et $U = \{x \in c_o : \|x\|_\infty < 1\}$. Considérons $K = \{y \in c_o \ ; \ y = (x_n a_n)_n \ , \ \sup_n |x_n| \leq 1\}$.

K est bien un compact convexe de c_o.

- Déterminons d'abord un $\varepsilon\overline{U}$-réseau pour K. Posons, pour tout n,

$$U_n = \{x; x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n),\ \sup_{1\le i\le n} |x_i| < 1\},$$

$$K_n = \prod_{i=1}^{n} [-a_i, a_i].$$

Soit, pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $(P_n(\varepsilon))_n$ où :

$$P_n(\varepsilon) \subset K_n,$$

$$P_n(\varepsilon) = \{x; x \in K_n, x = (x_1, \dots, x_n), x_i \neq \pm a_i,\ x_i/\varepsilon \in \mathbb{Z},\ i=1,\dots,n\}.$$

On vérifie que $P_n(\varepsilon)$ est un $\varepsilon\overline{U}_n$-réseau pour K_n et que $P_n(\varepsilon)$ est εU_n-discernable.
Considérons alors, pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $f(\varepsilon) = \sup\{n; a_n > \frac{\varepsilon}{2}\}$ et le sous-ensemble $R(\varepsilon)$ de K défini comme suit :

$$y \in R(\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in K \\ y_k = 0, \quad \text{si } k > f(\varepsilon) \\ (y_1, \dots, y_{f(\varepsilon)}) \in P_{f(\varepsilon)}(\varepsilon) \end{cases}$$

$R(\varepsilon)$ est un $\varepsilon\overline{U}$-réseau pour K et est une partie εU-discernable. Remarquons que

$$\operatorname{card} P_n(\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} \{2[\frac{a_i}{\varepsilon}] + \varepsilon_i^*\},$$

avec $\varepsilon_i^* = -1$, si $\frac{a_i}{\varepsilon}$ est entier, $\varepsilon_i^* = 1$, sinon.

- Estimons maintenant card $\mathfrak{M}_n(3\alpha_n)$, lorsque $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ et $M_n = R(\frac{1}{2^n})$. On supposera pour cela que pour tout i, $a_i = \frac{1}{2^i}$.

On a l'estimation immédiate :

$$\text{card}\ \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \le 8^{f(\alpha_n)}\ \text{card}\ M_{n+1} \quad ; \qquad (1)$$

d'autre part, on sait que :

"estimation grossière" : $\text{card}\ \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \le \text{card}\ M_n\ \text{card}\ M_{n+1}$, (2)

"estimation inférieure" : $\text{card}\ \mathfrak{M}_n(3\alpha_n) \ge \frac{1}{2}\ \text{card}\ M_{n+1}$. (3)

Posons $\rho_n = 8^{f(\alpha_n)}\ \text{card}\ M_{n+1}$, $\delta_n = \text{card}\ M_n\ \text{card}\ M_{n+1}$ et comparons ρ_n, δ_n et card M_{n+1} en considérant les rapports $\frac{\rho_n}{\delta_n}$, $\frac{\rho_n}{\text{card}\,M_{n+1}} = 8^{f(\alpha_n)}$.

Comme $f(\alpha_n) = n$ et

$$\text{card}\ M_{n+1} = \text{card}\ P_{f(\alpha_{n+1})}(\alpha_{n+1}) = P_{n+1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2^{(n+1)(n+2)/2} ,$$

on a $\frac{\rho_n}{\delta_n} = \frac{8^{f(\alpha_n)}}{\text{card}\,M_n} = 2^{-n(n-5)/2}$.

Il est alors immédiat que l'estimation (1) est bien meilleure que l'estimation grossière.

3) Donnons maintenant un cas où $(A_{\eta,K,d})$ et $(C_{\eta,K,d})$ sont équivalentes.

<u>Théorème (XXII,1;4)</u> : Soient α un réel >0 et $\Phi :]0,\alpha] \to \mathbb{R}_*^+$ une fonction croissante telle que $\Phi(h) \to 0$, quand $h \to 0$. Soit K un espace uniforme précompact et métrisable et soit d une distance sur K compatible avec la structure uniforme de K.

Considérons la fonction η :

$$(h,a) \to \eta(h,a) = \frac{\Phi(h)}{\pi a} \exp\left(-\frac{\pi a^2}{\Phi^2(h)}\right) .$$

Alors :

i) la condition $(C_{\eta,K,d})$ est satisfaite si et seulement si il existe deux suites $(\alpha_n)_n$ et $(b_n)_n$ de réels >0, telles que $\alpha_n \downarrow 0$, $\sum_n b_n < \infty$ et la série (S) de terme général $P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, b_n)$ est convergente.

De plus, pour que (S) soit convergente, il faut que :

$$\sum_n \sqrt{H_K(K;d,\alpha_{n+1})}\ \Phi(3\alpha_n) < +\infty \ ; \tag{1}$$

ii) si $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels >0, telle que $\alpha_n \downarrow 0$ et (1) est vérifiée, alors, si la série de terme général $\sqrt{\Phi(3\alpha_n)}$ converge (<u>ou</u> s'il existe un réel $M > 0$ et un entier n_o tel que

$$H_K(K;d,\alpha_n) \geq M \ \mathrm{Log}\, n \ , \ \forall\, n \geq n_o)$$

la condition $(C_{\eta,K,d})$ est vérifiée ;

iii) si K est un compact convexe d'un espace vectoriel normé $(G, \|\cdot\|)$ les conditions $(C_{\eta,K,\|\cdot\|})$ et $(A_{\eta,K,\|\cdot\|})$ sont équivalentes.

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord que la convergence de la série $\sum_n P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, b_n)$ implique celle de la série

$$\sum_n P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, \lambda\, b_n)$$

où $\lambda > 1$.

Posons $u_n = P(K;d,\alpha_{n+1})\ \eta(3\alpha_n, b_n)$, $w_n = \Phi(3\alpha_n)/b_n$ et $a_n = \Phi(3\alpha_n)\sqrt{H_K(K;d,\alpha_{n+1})}$.

<u>Montrons i)</u> : Supposons la série $\sum_n u_n$ convergente et montrons que l'on a $(C_{\eta,K,d})$.

On a :

$$u_n = \exp\left[H_K(K,d,\alpha_{n+1}) - \pi \frac{b_n^2}{\Phi^2(3\alpha_n)}\right] \cdot \frac{\Phi(3\alpha_n)}{\pi\ b_n} \ ,$$

c'est-à-dire

$$u_n = \frac{w_n}{\pi} \quad \exp\left[\frac{1}{w_n^2}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2} - \pi\right)\right]$$

La série $\sum_n u_n$ étant convergente, il existe un réel >0 M_o tel que

$$a_n^2 \leq \pi\, M_o\, b_n^2 \;. \tag{2}$$

(Sinon, il existerait une sous-suite w_{n_k} telle que $\Sigma\, x_{n_k} \exp\left(\frac{k}{w_{n_k}}\right) < +\infty$, ce qui est impossible).

Montrons alors que la série de terme général $v_n = P^2(K;d,\alpha_{n+1})$ $\eta(3\alpha_n, \sqrt{M_o+1}b_n)$ est convergente.

On a :

$$v_n = \exp\left[\frac{1}{w_n^2}\left(2\,\frac{a_n^2}{b_n^2} - \pi(M_o+1)\right)\right]\frac{w_n}{\pi\sqrt{M_o+1}} \quad ;$$

et ainsi, par (2),

$$v_n \leq \frac{1}{\sqrt{M_o+1}}\, u_n \;.$$

Par suite, la série de terme général v_n converge et $(C_{\eta,K,d})$ est donc satisfaite.

D'autre part, d'après (2), si l'on a $(C_{\eta,K,d})$, on a aussi $\sum_n a_n < \infty$, c'est-à-dire (1).

<u>Montrons ii)</u>. S'il existe $M>0$ et $n_o \in \mathbb{N}$, tel que $H_K(K;d,\alpha_n) \geq M \,\mathrm{Log}\, n$ $(n \geq n_o)$, on a, en prenant $b_n = a_n.(1+\frac{2}{M}).\frac{1}{\pi}$, convergence de la série $\sum_n u_n$, si la série $\sum_n a_n$ converge. D'autre part, si les séries $\sum_n a_n$ et $\sum_n \sqrt{\Phi(3\alpha_n)}$ sont convergentes, on a, en posant $b_n = \sup(a_n, \sqrt{\Phi(3\alpha_n)})$ sont

convergentes, on a, en posant $b_n = \sup (a_n, \sqrt{\Phi(3\alpha_n)})$,

$$\Sigma\, b_n < \infty \quad \text{et} \quad u_n \leq w_n \leq \sqrt{\Phi(3\alpha_n)} \;;$$

par conséquent $(C_{\eta,K,d})$ est vérifiée.

Enfin, <u>on a iii</u>), d'après la partie i) de ce théorème et le théorème (XXII,1;1).

<u>Remarque</u> : Si $(c_n)_n$ est une suite de réels >0, telle que $c_n \downarrow 0$, on a équivalence de :

- il existe P réel >0 tel que $c_n \leq \dfrac{P}{\sqrt{\operatorname{Log} n}}$ $(n \geqslant n_o)$;

- il existe P' réel >0 tel que la série $\sum_n c_n \exp\left(-\dfrac{P'}{c_n^2}\right)$ converge. C'est ceci qui nous a amenés à considérer le cas "$H_K(K;d,\alpha_n) \geq M \operatorname{Log} n$, pour $n \geq n_o$".

4) Terminons ce paragraphe en faisant une remarque sur la famille $\mathfrak{S}$ des suites (M_n,α_n,b_n) d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ telles que $(M_n,\alpha_n)_n$ vérifie $P_{(K,d)}$, $\sum_n b_n < \infty$ et

$$\sum_n \operatorname{card} \mathfrak{M}_n(3\alpha_n)\ \eta(3\alpha_n, b_n) < +\infty .$$

Nous allons montrer (au moyen d'un exemple) que l'on peut trouver des suites $(M_n,\alpha_n,b_n)_n$ de $\mathfrak{S}$ pour lesquelles il existe une autre suite (P_n,β_n) extraite de la suite (M_n,α_n) telle que

$$(P_n,\beta_n,b'_n) \notin \mathfrak{S}$$

quelle que soit la suite $(b'_n)_n$ de réels >0 vérifiant $\sum_n b'_n < \infty$.

<u>Exemple</u> : Soit α un réel >0, inférieur à $\frac{1}{e}$, Soit θ un réel >0 et soit $\widetilde{X} : [0,1]^k \to L^0(\Omega, P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée telle que

$$E(|\widetilde{X}(s)-\widetilde{X}(t)|^2) \le \left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\|s-t\|_\infty}\right)^{-(\theta+1)}$$

pour tous les s et t dans $[0,1]^k$ vérifiant $\|s-t\|_\infty < \alpha$.

On en déduit

$$P(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)| \ge a) \le \eta_\theta\,(\|s-t\|_\infty, a)$$

avec

$$\eta_\theta(h,a) = \frac{\Phi_\theta(h)}{\pi\, a}\,\exp\left(\frac{-\pi\, a^2}{\Phi_\theta^2(h)}\right), \quad \Phi_\theta(h) = \left(\left|\mathrm{Log}\,\frac{1}{h}\right|\right)^{-\frac{(\theta+1)}{2}}.$$

<u>Prenons</u> $K = [0,1]^k$. On a :

$$H_K(K; \|\cdot\|_\infty, \alpha_n) = \mathcal{O}\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\alpha_n}\right) \quad ;$$

d'où

$$\sqrt{H_K(K;\|\cdot\|_\infty, \alpha_{n+1})}\;\Phi_\theta(3\alpha_n) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{3\alpha_n}\right)^{-\theta-1}\left(\mathrm{Log}\,\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)}\right).$$

Par conséquent, si $(\alpha_n)_n$ est une suite de réels >0, s et B deux réels >0 tels que $\alpha_n \downarrow 0$, $\alpha_n \le \frac{B}{n^s}$ (si n assez grand), on a équivalence de :

1. il existe une suite $(b_n)_n$ de réels >0, telle que

$$\sum_n b_n < \infty \;,\; \sum_n P(K;\|\cdot\|_\infty, \alpha_{n+1})\;\eta_\theta(3\alpha_n, b_n) < \infty \quad ;$$

2. La série S_θ de terme général $\sqrt{\operatorname{Log} \frac{1}{\alpha_{n+1}} \left(\operatorname{Log} \frac{1}{3\alpha_n}\right)^{-(\theta+1)}}$ converge.

On constate immédiatement que :

- si $\alpha_n = 1/2^{2^n}$, S_θ converge pour tout $\theta > 0$ (donc pour tout $\theta > 0$, $(A_{\eta_\theta}, K, \|.\|_\infty)$ est satisfaite) ;
- si $\alpha_n = 1/2^{n^k}$, S_θ converge si et seulement si $\theta > \frac{2}{k}$;
- si $\alpha_n = 1/2^{n^k}$, S_θ converge si et seulement si $\theta > 1$;
- si $\alpha_n = 1/n^k$ ou si $\alpha_n = 1/2^{2^{2^n}}$, S_θ diverge pour tout θ.

§ 2. FONCTIONS ALEATOIRES GAUSSIENNES A TRAJECTOIRES CONTINUES

Dans ce paragraphe, nous allons donner une condition suffisante pour qu'une fonction aléatoire gaussienne soit à trajectoires continues sur un compact K. Cette condition redonne un théorème de FERNIQUE (Continuité des processus gaussiens, C. R. A. S. Paris 258 (1964, 6058-60)).

Commençons par rappeler quelques définitions.
Une variable aléatoire réelle gaussienne f relative à un espace probabilisé (Ω, P) admet des moments de tous ordres. Elle est dite <u>centrée</u> si

$$\int_\Omega f(w)\ f(dw) = 0.$$

Une fonction <u>aléatoire réelle</u> $f : T \to L^0(\Omega, P)$ est <u>dite gaussienne (centrée)</u> si toute combinaison linéaire des variables aléatoires $f(t)$ $(t \in T)$ est gaussienne (centrée). Si H est un espace de Hilbert réel, <u>une fonction aléatoire</u> $f : H' \to L^0(\Omega, P)$ <u>linéaire gaussienne</u> est dite canonique ou <u>normale</u> si la transformée de Fourier de la probabilité cylindrique λ_f sur H, associée à f, est la fonction $x \to \exp(-\pi\|x\|^2)$ de H' dans $\mathbb{R}$.

Théorème (XXII,2;1) : Soient (T,d) un espace métrique et Φ une fonction de $]0,\alpha]$ dans $\mathbb{R}^+$ croissante et telle que $\Phi(h)\to 0$, quand $h\to 0$. Posons, pour tout $\varepsilon>0$, $\psi(\varepsilon)=\sup\{t;\Phi(t)<\varepsilon\}$.

Si $\widetilde{X}: T\to L^0(\Omega,P)$ est une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée vérifiant

$$E(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|^2)\leq \Phi^2(d(s,t))$$

pour tous s et t de T tels que $d(s,t)\leq\alpha$, alors $\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur tout compact K de T satisfaisant

$$\sum_n \frac{1}{2^n}\sqrt{H(K,\psi(2^{-n})}<\infty \quad . \tag{1}$$

Remarque : Si Φ admet une fonction réciproque, soit Φ^{-1}, on a $\Phi^{-1}=\psi$.

Démonstration : Soit K un compact de T, tel que l'on ait (1). On a :

$$P(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|\geq a)\leq \eta(d(s,t),a)$$

avec

$$\eta(h,a)=\frac{\Phi(h)}{\pi\, a}\exp\left(-\frac{\pi\, a^2}{\Phi^2(h)}\right) .$$

Posons $3\alpha_n=\psi(\frac{1}{2^n})$; d'où $\frac{1}{2^{n+1}}\leq\Phi(3\alpha_n)\leq\frac{1}{2^n}$.

On a trivialement

$$\sum_n \sqrt{\Phi^2(3\alpha_n)}<+\infty \quad \text{et} \quad \sum_n \sqrt{H_K(K,\alpha_{n+1})}\ \Phi(3\alpha_n)<\infty \ .$$

On en déduit, par le théorème (XXII,1;4), que $\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur K. cqfd

Corollaire 1 : Soient (T,d) un espace métrique, K un compact de (T,d) et $\widetilde{X} : T \to L^0(\Omega,P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée. Supposons qu'il existe $g : \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}^+$ ayant une fonction réciproque et telle que, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit $H(K,\varepsilon) \leq g(\varepsilon)$. Alors, si Φ est une fonction de $]0,\alpha]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

a) Φ est croissante

b) $E(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|^2) \leq \Phi^2(d(s,t))$, $\forall\ s,t \in T$ tels que $d(s,t) < \alpha$,

c) il existe M réel >0 tel que $\int_M^\infty \varphi \circ g^{-1}(x^2)dx < \infty$,

$\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur K.

Démonstration : Ψ étant défini comme dans le théorème (XXII,2;1), montrons que l'on a (1). En posant $x_n = \sqrt{g(\Psi(2^{-n}))}$, on a :

$$\int_M^{+\infty} \Phi(g^{-1}(x^2))dx \geq \sum_{n\geq N_0} \frac{1}{2^n}(x_{n+1}-x_n) = \sum_{n\geq N_0} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x_{n+1} - \frac{x_{N_0}}{2^{N_0}} =$$

$$= \sum_{n\geq N_0} \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{x_{N_0}}{2^{N_0}}$$

avec N_0 entier tel que $x_{N_0} \geq M$.

Ainsi, on a convergence de la série $\sum_{n>N_0} 2^{-n}\sqrt{H(K,\Psi(2^{-n}))}$. cqfd

Corollaire 2 : Soit $\widetilde{X} : \mathbb{R}^n \to L^0(\Omega,P)$ une fonction aléatoire réelle gaussienne centrée et soi $|\circ|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors, si Φ est une fonction de $\mathbb{R}^+_*$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

a') Φ est croissante sur un certain intervalle $]0,\alpha]$ $(\alpha>0)$,

b') $E(|\widetilde{X}(t)-\widetilde{X}(s)|^2) \leq \Phi^2(|s-t|)$, $\forall\ s,t \in T$,

c') il existe M réel >0, tel que $\int_M^\infty \Phi(e^{-x^2})dx < +\infty$,

$\widetilde{X}$ admet une version à trajectoires continues sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque : Si $a > \frac{1}{2}$, la fonction $\Phi : h \to (|\text{Log}\, h|)^{-a}$ vérifie a') et c') et si $\alpha > 1$, la fonction $\Phi : h \to |\text{Log}\, h|^{-1/2} (|\text{Log}|\text{Log}\, h||)^{-\alpha}$ vérifie a') et c').

Démonstration : C'est immédiat, car tout compact de $\mathbb{R}^n$ est contenu dans un cube dont l'ε-entropie est asymptotique à $\text{Log}\, \frac{1}{\varepsilon}$ (quand $\varepsilon \overset{>}{\to} 0$).

Corollaire 3 (DUDLEY) : Soit H un espace de Hilbert réel, de boule unité U. Toute fonction aléatoire réelle linéaire gaussienne normale $\tilde{X} : H \to L^0(\Omega, P)$ est à trajectoires continues sur tout disque compact K de H tel que

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{H(K, 2^{-n} U)} < +\infty \quad , \tag{2}$$

donc en particulier sur tout disque compact K de H tel que $\rho(K,U) < 2$.

Démonstration : D'après le théorème (XXII,2;1), si l'on a (2), $\tilde{X}$ est à trajectoires continues sur K.
Vérifions que si $\rho(K,U) < 2$, l'on a (2).
Si $\rho(K,U) < 2$, il existe deux réels > 0, ε_0 et b, tels que

$$\sup_{0<\varepsilon\leq\varepsilon_0} \frac{\text{Log}\sqrt{H(K, \varepsilon U)}}{\text{Log}\, 1/\varepsilon} \leq b < 1$$

donc tels que

$$\varepsilon \sqrt{H(K, \varepsilon U)} \leq (\varepsilon)^{1-b} \;, \; \forall\, \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad (\varepsilon > 0).$$

On en déduit que l'on a bien (2). cqfd

Remarque 1 : SUDAKOV a montré que si $\rho(K,U) > 2$, $\tilde{X}$ ne peut être à trajectoires continues sur K (cf. appendice).

Remarque 2 : Si $\rho(K,U) = 2$, $\widetilde{X}$ peut être ou ne pas être à trajectoires continues sur K. DUDLEY a même montré qu'on peut trouver deux disques compacts K_1 et K_2 de $H = l^2$ tels que :

- $\widetilde{X}$ est à trajectoires continues sur K_1 et n'est pas à trajectoires continues sur K_2,
- $H(K_2, \varepsilon U)/H(K_1, \varepsilon U) \to 0$, quand $\varepsilon \overset{>}{\to} 0$,
- $v_n(K_2, U)/v_n(K_1, U) \to 0$, quand $n \to \infty$.

Il a considéré :

$$K_1 = \{x = (x_n)_n \; ; \; (x_n)_n = (a_n y_n)_n \; , \; \sum_n |y_n| \leq 1 \}$$

$$K_2 = \{x = (x_n)_n \; ; \; (x_n)_n = (b_n y_n)_n \; , \; \sum_n |y_n|^2 \leq 1 \}$$

avec, pour $n \geq 3$,

$$a_n = (\text{Log Log } n)^{-1/4} \cdot (\text{Log } n)^{-1/2} \; , \; b_n = (n \text{ Log } n \text{ Log Log } n)^{-1/2} .$$

Remarque 3 : Si $EV(K,U) > -\frac{1}{2}$, alors $\widetilde{X}$ n'est pas à trajectoires continues sur K [puisque $\rho(K,U) \geq -1/EV(K,U)$].

En tenant compte de l'exemple (XXI,2;2), le corollaire 3 donne le :

Corollaire 4 : Soit H un Hilbert réel séparable, de boule unité U et soit V un voisinage disqué fermé de H. Soit $V^o = \{x ; x \in H, \langle x, y\rangle \leq 1 , \forall y \in V\}$. Pour que la mesure cylindrique image de la mesure cylindrique de Gauss normale sur H par l'application $i : H \to H_V$ soit de Radon, il est nécessaire que $\rho(V^o, U) \leq 2$ et il est suffisant que $\rho(V^o, U) < 2$.

APPENDICE

Théorème : Soit H un Hilbert réel, de boule unité U, de norme $\|.\|$ et soit $f : H \to L^0(\Omega,P)$ une fonction aléatoire réelle linéaire gaussienne normale.

Si K est un disque compact de H, tel que $\rho(K,U) > 2$, f n'est pas à trajectoires bornées sur K.

Démonstration : Supposons f à trajectoires bornées sur K. Il existe donc une version f_1 de f telle que

$$P\{\omega \,;\, \omega \in \Omega \,,\, \sup_{x \in K} |f_1(x)(\omega)| < +\infty\} = 1 \;;$$

par conséquent, il existe α et a dans $\mathbb{R}_*^+$ tels que

$$P\{\omega \,;\, \omega \in \Omega \,,\, \sup_{x \in K} |f_1(x)(\omega)| \le \alpha\} = a \;.$$

On peut toujours se ramener au cas $\alpha = 1$: il suffit de remplacer K par $K_1 = \alpha^{-1}K$ (on a $\rho(K_1,U) = \rho(K,U)$). On supposera dans ce qui suit $\alpha = 1$.

Comme $\rho(K,U) > 2$, il existe b réel et une suite $(\alpha_n)_n$ de réels > 0 tels que

$$\alpha_n \downarrow 0 \;,\; \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{Log} C(K,\alpha_n U)}{\operatorname{Log} 1/\alpha_n} > b > 2 \;.$$

Soit alors $(M_n)_n$ une suite de parties de K, α_n-discernables et telles que

$$\operatorname{card} M_n = M(K,\alpha_n U) \;;$$

notons m_k ce nombre.

Nous allons montrer que l'on obtient une contradiction en prouvant que :

$$P\{\omega ; \sup_{x\in M_n} f_1(x)(\omega) \leq 1\} \to 0 \ , \text{ quand } n \to \infty \ .$$

Pour cela, commençons par établir le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soient E_{n+1} un Hilbert de dimension n+1, M et ε deux réels >0. Soit $\{e_1,\ldots,e_{n+1}\}$ une base orthonormale de E_{n+1} et soit E_n l'espace vectoriel engendré par les e_i d'indice $i \leq n$.
Soient alors $a_1,\ldots,a_n$ n éléments de E_n tels que

$$\sup_{1\leq i\leq n} \|a_i\| \leq M \quad , \ \|a_i - a_j\| \geq \varepsilon \quad (i \neq j \ ; \ i,j = 1,\ldots,n) \ . \tag{1}$$

Alors, si on pose $F(\lambda) = \int_\lambda^{+\infty} \exp(-\pi t^2)dt \quad (\lambda \in \mathbb{R})$, $a_i^* = a_i - e_{n+1}$, $e_i^* = \frac{\varepsilon}{2(M^2+1)} e_i - e_{n+1}$ $(i=1,\ldots,n)$ et si G est la mesure de Gauss normale sur E_{n+1}, on a :

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq I_4$$

avec

$$I_1 = F(1) \times G(\{z ; z \in E_{n+1} \ , \ <z,a_i> \leq 1, \quad i = 1,\ldots,n\}) \quad ,$$

$$I_2 = G\{z \ ; \ z \in E_{n+1} \quad , \quad <z,a_i^*> \leq 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,n\} \quad ,$$

$$I_3 = G\{z \ ; \ z \in E_{n+1} \quad , \quad <z,e_i^*> \leq 0 \quad , \quad i = 1,\ldots,n\} \quad ,$$

$$I_4 = \frac{1}{2^n} + \int_0^\infty e^{-\pi\lambda^2} \left[1 - F\left(\frac{2\lambda(M^2+1)}{\varepsilon}\right)\right] d\lambda \quad .$$

Preuve de ce lemme

- $I_1 \le I_2$, puisque

$$(z = x+\lambda\ e_{n+1}\ ,\ x \in E_n) \Rightarrow \langle z, a_i^*\rangle = \langle x, a_i\rangle - \lambda$$

et que

$$I_1 = G\{z\ ;\ z = x+\lambda\ e_{n+1}\ ,\ \lambda \ge 1,\ x \in E_n,\ \langle x, a_i\rangle \le 1\ ,\ i = 1,\dots,n\}\ .$$

- $I_2 \le I_3$

Soient les matrices $n \times m$ $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$ avec

$$a_{ij} = \frac{\langle a_i^*, a_j^*\rangle}{\|a_i^*\|\ \|a_j^*\|}\quad ,\quad b_{ij} = \frac{\langle b_i^*, b_j^*\rangle}{\|b_i^*\|\ \|b_j^*\|}\ .$$

On a, si $i \ne j$,

$$a_{ij} = \frac{\langle a_i, a_j\rangle + 1}{\sqrt{\|a_i\|^2+1}\ \sqrt{\|a_j\|^2+1}}\quad \text{et}\quad b_{ij} = \frac{1}{1+\varepsilon^2/4(M^2+1)^2}\ .$$

On vérifie que, par (1),

$$\begin{cases} a_{ij} \le b_{ij} & i, j = 1,\dots,n \\ a_{ii} = b_{ii} = 1 & i = 1,\dots,n \end{cases}\ .$$

On en déduit alors, par un théorème de SLEPIAN (Bell System Tech. J 41 (1962),463,p.481 et p.483), que $I_2 \le I_3$.

- <u>$I_3 \le I_4$</u>. Posons $C = 2(M^2+1)$. On a :

$$I_3 = \int_{\substack{x_i \le \frac{\lambda C}{\varepsilon} \\ 1\le i\le n}} e^{-\pi(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)} \, e^{-\pi\lambda^2} \, dx_1 \ldots dx_n \, d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \Big(\int_{-\infty}^{\lambda C/\varepsilon} e^{-\pi u^2} \, du\Big)^2 \, d\lambda$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \Big[F^n(\frac{\lambda C}{\varepsilon}) + F^n(\frac{-\lambda C}{\varepsilon})\Big] \, d\lambda$$

$$\le \frac{1}{2^n} + \int_{0}^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \Big[1 - F(\frac{\lambda C}{\varepsilon})\Big]^n \, d\lambda \, .$$

<u>cqfd</u>

<u>Revenons à la preuve du théorème</u>

Posons $M = \sup\{\|x\| ; x \in K\}$ et $C = 2(M^2+1)$.

On a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P\{\omega : \sup_{x \in M_k} f(x)(\omega) \le 1\} \le \frac{1}{2^{m_k}} + \int_{0}^{\infty} e^{-\pi\lambda^2} \Big[1 - F(\frac{\lambda C}{\alpha_k})\Big]^{m_k} \, d\lambda \, .$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda > 0$,

$$\Big(1 - F(\frac{\lambda C}{\alpha_k})\Big)^{m_k} \le \exp\Big(-m_k \, F(\frac{\lambda C}{\alpha_k})\Big) \, .$$

Comme

$$F(\frac{\lambda C}{\alpha_k}) = \int_{\lambda C/\alpha_k}^{\infty} e^{-\pi u^2} \, du \ge \frac{\lambda C}{\alpha_k} \exp\Big[-2\pi C\lambda^2 (\frac{1}{\alpha_k})^2\Big] \, ,$$

$$m_k \ge \exp\Big[(\frac{1}{\alpha_k})^b\Big] \, , \quad b > 2$$

on a, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$m_k \ F(\frac{\lambda C}{\alpha_k}) \to \infty \ , \quad \text{quand } k \to \infty$$

et par suite

$$P\{\omega \ ; \ \sup_{x \in M_k} \{f_1(x)(\omega)\} \leq 1\} \to 0, \ \text{quand } k \to \infty \ . \qquad \underline{\text{cqfd}}$$

COMPLEMENT A L'EXPOSE XXII

DEMONSTRATION DU THEOREME DE SLEPIAN cité dans l'Appendice de cet exposé.

Théorème (SLEPIAN) : Soit E_m un espace de Hilbert réel de dimension m. Notons $\| \ \|$ la norme de E_m et G_m la mesure de Gauss normale sur E_m. Si l'on se donne deux famille $(a_1, \ldots, a_p)$ et $(b_1, \ldots, b_p)$ de p éléments non nuls de E_m satisfaisant

$$a_{ij} = \frac{\langle a_i, a_j \rangle}{\|a_i\| \, \|a_j\|} \leq \frac{\langle b_i, b_j \rangle}{\|b_i\| \, \|b_j\|} = b_{ij} \qquad i, j = 1, \ldots, p \quad ,$$

alors

$$G_m\{x \; ; \; x \in E_m, \langle x, a_i \rangle \leq 0, \; i=1, \ldots, p\} \leq G_m\{x ; x \in E_m, \langle x, b_j \rangle \leq 0, j=1, \ldots, p\} \tag{1}$$

Démonstration : Notons respectivement par A et B les matrices $p \times p$ $((a_{ij}))$ et $((b_{ij}))$. Pour montrer le théorème il suffit de montrer que pour tout $m' \in \mathbb{N}_*$ et pour tout couple $(C, D) = (((c_{ij})), ((d_{ij})))$ de matrices $m' \times m'$ réelles inversibles de type positif et telles que

$$c_{ii} = d_{ii} \;, \; i = 1, \ldots, m' \quad ; \quad c_{ij} \leq d_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, m'$$

l'on a (2) :

$$\frac{1}{\sqrt{\det C}} \int_{\substack{x_i > 0 \\ i=1, \ldots, m'}} e^{-\pi \langle C^{-1} x, x \rangle} \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{\det D}} \int_{\substack{x_i > 0 \\ i=1, \ldots, m'}} e^{-\pi \langle D^{-1} x, x \rangle} \, dx$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a (2) avec $C = A + \varepsilon I$ et $D = B + \varepsilon I$ (ou I est la matrice unité $p \times p$). En faisant tendre ε vers zéro, on en déduit (1) d'apres un théorème de comparaison des convergences des fonctions caractéristiques et des fonctions de répartition associées.

Montrons donc (2).

Si $x = (x_1, \ldots, x_{m'}) \in \mathbb{R}^{m'}$, on notera $x > 0$ si $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m'$. Considérons pour tout $\lambda \in [0,1]$ la matrice $P(\lambda) = ((p_{ij}(\lambda))) = \lambda C + (1-\lambda) D$ et soit $(\lambda \in [0,1])$

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det P(\lambda)}} \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^{m'} \\ x > 0}} \exp(-\pi < P^{-1}(\lambda)x, x >)dx .$$

Nous allons montrer que $\lambda \mapsto I(\lambda)$ est une fonction croissante sur $[0,1]$, ce qui impliquera (2).

Commençons pour cela par introduire quelques notations. $\mathfrak{M}_{m'}$ désignera la famille des matrices $m' \times m'$ à coefficients réels $P = ((p_{ij}))$ telles que $\det P > 0$ et $p_{ii} = c_{ii}$ $(i = 1, \ldots, m')$ et τ l'application $P = ((p_{ij})) \mapsto (p_{ij})_{i<j; i,j=1,\ldots,m'}$ de $\mathfrak{M}_{m'}$ dans $\mathbb{R}^{m'(m'-1)/2}$; τ est injective. Soient aussi les applications $g : \mathbb{R}^{m'} \times \tau(\mathfrak{M}_{m'}) \mapsto \mathbb{R}^+$ et $J : \tau(\mathfrak{M}_{m'}) \mapsto \mathbb{R}^+$ telles que, pour tout $P \in \mathfrak{M}_{m'}$, tout $x \in \mathbb{R}^{m'}$,

$$g(x ; \tau(P)) = \frac{1}{\sqrt{\det P}} \exp(-\pi < P^{-1}x, x >)$$

et

$$J(\tau(P)) = \int_{\substack{x \in \mathbb{R}^{m'} \\ x > 0}} g(x ; \tau(P))dx.$$

Trivialement, pour tout $\lambda \in [0,1]$, $P(\lambda)$ est dans $\mathfrak{M}_{m'}$. Posons $p(\lambda) = \tau(P(\lambda))$. Nous avons

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = \sum_{i<j} \frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(p(\lambda))(d_{ij} - c_{ij})$$

et montrons que $\frac{dI}{d\lambda}(\lambda)$ est positif pour tout $\lambda \in [0,1])$.

Soit $P \in \mathfrak{M}_{m'}$ et $i < j$ $(i,j = 1,\ldots,m')$; pour tout $y \in \mathbb{R}^{m'}$

$$\frac{\partial g}{\partial p_{ij}}(y,\tau(P)) = \frac{\partial}{\partial p_{ij}} \int_{\mathbb{R}^{m'}} \exp(-\pi < Px,x >)\exp(2\pi i < x,y >)\,dx$$

$$= \frac{\partial^2 g}{\partial y_i\, \partial y_j}(y,\tau(P))$$

et par suite

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(\tau(P)) = \int_{\substack{\tilde{x}\in R_{ij} \\ \tilde{x} > 0}} g_{ij}(\tilde{x},\tau(P))\,d\tilde{x}$$

où $R_{ij} = \prod_{\substack{1\le k\le m' \\ k\neq i,j}} R_k$, $R_k = \mathbb{R}$ et $g_{ij}(\tilde{x},\tau(P)) = g(x,\tau(P))$ avec $x_k = \tilde{x}_k$ si $k \neq i,j$ et $x_i = x_j = 0$.

Par conséquent, pour tout $P \in \mathfrak{M}_{m'}$ et pour tout (i,j) tel que $i < j$; $i,j = 1,\ldots,m'$

$$\frac{\partial J}{\partial p_{ij}}(\tau(P)) \geq 0 \quad ;$$

et ainsi

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = 0 \quad , \quad \forall\, \lambda \in [0,1].$$

<u>cqfd</u>
