

SÉMINAIRE D'ANALYSE FONCTIONNELLE ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. CHEVET

Existence de versions à trajectoires uniformément continues

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 21, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970__A23_0

© Séminaire Laurent Schwartz
(École Polytechnique), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire d'analyse fonctionnelle implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDICIS 11-77
(633)

S E M I N A I R E L . S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

EXISTENCE DE VERSIONS A TRAJECTOIRES UNIFORMEMENT CONTINUES

par S. CHEVET

Exposé N° 21

20 Avril 1970

Dans nos exposés, nous utiliserons les définitions des exposés N° 6 et N° 13.

§ 1. INTRODUCTION

Dans tout cet exposé, on se donne (Ω, P) un espace probabilité, T un espace uniforme, K un sous espace de T , métrisable et précompact pour la structure uniforme induite par celle de T et d une distance sur K compatible avec cette structure uniforme. On se donne aussi (E, δ) un espace métrique complet et \tilde{X} une fonction aléatoire relative à (Ω, P) , définie sur T et à valeurs dans E (c'est-à-dire une application de T dans $L^0(\Omega, P; E)$). On notera $\mathcal{P}(K)$ la famille des parties de K .

X est une version de \tilde{X} , si X est une application de T dans $L^0(\Omega, P; E)$ telle que, pour tout $t \in T$, $X(t)$ est un élément de (la classe) $\tilde{X}(t)$. Chacune des fonctions $t \rightarrow X(t)(\omega)$ ($\omega \in \Omega$) définies sur T est une trajectoire de X . Pour toute partie S de T , X_S désignera la restriction de X à S .

Définition (XXI,1;1) : La fonction aléatoire \tilde{X} est dite à trajectoires uniformément continues sur $S \subset T$, s'il existe une version X de \tilde{X} telle que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la restriction à S de la trajectoire $X(\cdot)(\omega)$ n'est pas uniformément continue sur S , muni de la structure uniforme induite par celle de T , est P -négligeable.

Définition (XXI,1;2) : Dans le cas où $E = \mathbb{C}$, on dit que la fonction aléatoire \tilde{X} est à trajectoires bornées sur $S \subset T$, s'il existe une version X de \tilde{X} telle que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la restriction à S de la trajectoire $X(\cdot)(\omega)$ n'est pas bornée sur S (c'est-à-dire si $\sup\{X(x)(\omega); x \in S\} = +\infty$) est P -négligeable.

Nous nous proposons de trouver certaines conditions suffisantes pour que \tilde{X} soit à trajectoires uniformément continues sur K ; ces conditions feront intervenir de manière essentielle la notion de ε -recouvrement introduite dans l'exposé N° 18. En particulier, nous donneront une condition suffisante au moyen de l' ε -entropie.

Commençons par rappeler un théorème bien connu.

Théorème fondamental : Soit D une partie de K , dénombrable et partout dense dans K . K est toujours un espace uniforme métrisable et précompact, (E, δ) un espace métrique complet et \tilde{X} une application de K dans $L^0(\Omega, P; E)$ (ici $K = T$). On a équivalence de :

- i) \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur K ;
- ii) \tilde{X} est continue et à trajectoires uniformément continues sur $D \subset K$.

Nous rappelons (exposé N° 6) que \tilde{X} est dite continue si l'application \tilde{X} de K dans $L^0(\Omega, P; E)$ est continue.

Rappelons aussi la preuve de ce théorème. L'implication "i) \Rightarrow ii)" est triviale. Montrons donc : "ii) \Rightarrow i)". Par hypothèse ii), il existe Ω_0 tel que ${}^c\Omega_0$ est P -négligeable et tel que pour tout $\omega \in \Omega_0$, la restriction à D de la trajectoire $x \rightarrow X(x)(\omega)$ est uniformément continue sur D muni de la structure uniforme induite de celle de K .

Soit alors $a \in E$ (fixé) et soit l'application $(x, \omega) \rightarrow Y(x, \omega)$ de $K \times \Omega$ dans E définie comme suit :

- . si $\omega \in \Omega_0$, $x \rightarrow Y(x, \omega)$ est le prolongement par uniforme continuité à K de l'application $x \rightarrow X_D(x)(\omega)$ (définie sur D).
- . si $\omega \notin \Omega_0$, $Y(x, \omega) = a$ pour tout $x \in K$.

On vérifie que $x \rightarrow Y(x, \cdot)$ est bien une version de \tilde{X} à trajectoires uniformément continues sur K . Par définition

$$Y(x) \in \tilde{X}(x), \quad \forall x \in D ;$$

si $x \in K \setminus D$, il existe une suite $\{x_n\}$ d'éléments de D telle que $x_n \rightarrow x$ dans K , d'où

$$Y(x_n, \omega) = X(x_n)(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} Y(x, \omega), \quad \forall \omega \in \Omega_0.$$

Par conséquent

$$Y(x, \cdot) \in \mathcal{L}^0(\Omega, P; E), \quad \forall x \in K ;$$

et comme \tilde{X} est continue

$$Y(x) \in \tilde{X}(x), \quad \forall x \in K.$$

Remarque : Si $T = K$, si $(\Omega', P', \tilde{X}')$ est isonome à (Ω, P, \tilde{X}) et si \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur K , alors \tilde{X}' est aussi à trajectoires uniformément continues sur K .

Si K est compact, on peut dans le théorème remplacer i) par i') :

" \tilde{X} est à trajectoires continues sur K ".

§ 2. LIEN AVEC L'EXPOSE N° 13

Soit G un espace vectoriel localement convexe séparé, \mathcal{K} la famille des parties compactes de G et $f : G' \rightarrow L^0(A, \mu)$ une fonction aléatoire linéaire sur G .

Si pour tout $A \in \mathcal{A}$, A est métrisable, alors, d'après la proposition (XIII, 3;1), f est décomposée, si et seulement si la mesure cylindrique λ_f associée à f est de Radon. Il est donc nécessaire que f admette une version à trajectoires linéaires continues sur G'_f avec \mathcal{J} topologie localement convexe séparée sur G' compatible avec la dualité entre G et G' et c'est suffisant si G est souslinien.

Dans certains cas, on peut se limiter à chercher si f est à trajectoires uniformément continues sur certains compacts métrisables. Donnons quelques exemples.

Exemple (XXI.2;1) : Soit G un Banach séparable ; soit $f : G' \rightarrow L^0(A, \mu)$ une fonction aléatoire sur G' . Notons U_λ la boule fermée de rayon λ de G' , munie de la structure uniforme induite par $\sigma(G', G)$. U_λ est donc un compact métrisable. On a équivalence de :

- i) la mesure cylindrique λ_f associée à f est de Radon sur G ;
- ii) f est à trajectoires uniformément continues sur G'_K ;
- iii) $f : G'_K \rightarrow L^0(A, \mu)$ est continue et f est à trajectoires uniformément continues sur $D \cap G'_K$, avec D partie dénombrable de U_λ , partout dense dans U_λ .

Remarquons que si l'on a iii), il existe un \mathbb{Q} -sous espace vectoriel de G' dénombrable partout dense dans G'_K , soit F_1 , et il existe une version de f , foit f_1 , telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $x \rightarrow f_{1F_1}(x)(\omega)$ est linéaire continue sur F_1 muni de la structure uniforme induite par celle de G'_K . On en déduit facilement que f est décomposée.

Exemple (XXI,2;2) : Soit H un Hilbert réel séparable, et soit $f : H' \rightarrow L^0(\Lambda, \mu)$ une fonction aléatoire linéaire sur H' associée à la mesure cylindrique de Gauss sur H , soit n [c'est-à-dire la transformée de Fourier de n est $x \rightarrow \exp(-\pi \|x\|_H^2)$]. Soit C un disque fermé borné de H' et C^0 le polaire de C . On a :

1°) Si f est à trajectoires bornées sur C , C est un compact de H ;

2°) Si C est un compact de H' , on a équivalence de :

a) f est à trajectoires uniformément continues sur C muni de la structure uniforme induite par celle de H ;

b) f est à trajectoires uniformément continues sur C muni de la structure uniforme induite par $\sigma(H'_C, H_{C^0})$;

c) la mesure cylindrique image de la mesure cylindrique n par l'application canonique $i : H \rightarrow H_{C^0}$ est de Radon.

Montrons 1°) et 2°) : notons p_{C^0} la jauge de C^0 et H_{C^0} le complété de $H/p_{C^0}^{-1}(0)$ muni de la norme \dot{p}_{C^0} correspondant à p_{C^0} .

Preuve du 1°) : Soit $D \subset C$, dénombrable et partout dense dans C . Si f est à trajectoires bornées sur C , on a :

$$\mu\{\omega ; \sup_{x \in D} |f(x)(\omega)| < +\infty\} = 1.$$

Mais, d'après l'exposé N° 18, cela exige que D soit un précompact de H' , donc que C soit un compact de H' . D'où 1°).

Preuve du 2°) : a) est équivalent à b) car, d'une part, C est $\sigma(H'_C, H_{C^0})$ compact (H'_C étant le dual de H_{C^0}) et d'autre part, sur C , la structure uniforme séparée $\sigma(H'_C, H_{C^0})$ est moins fine que la structure uni-

forme de H' (puisque l'application $i : H \rightarrow H_{C_0}$ est continue, donc l'application $t_i : H' \rightarrow H'_C$ est uniformément continue pour les structures uniformes $\sigma(H', H)$ et $\sigma(H'_C, H_{C_0})$).

b) est équivalent à c), par l'exemple (XXI,2;1) puisque $i : H \rightarrow H_{C_0}$ est compacte.

§ 3. ETUDE SYSTEMATIQUE DES VERSIONS DE X A TRAJECTOIRES UNIFORMEMENT CONTINUES SUR K

Pour cela, introduisons quelques définitions et quelques notations.

Définition (XXI,3;1) : K étant toujours un espace uniforme métrisable et précompact et d une distance sur K compatible avec la structure uniforme de K , on dit que la suite $(M_n, \alpha_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+$ satisfait la propriété $p(K, d)$ si :

- a) $\alpha_n > 0, \alpha_n \downarrow 0$;
- b) M_n est une partie finie de K telle que pour tout $x \in K$, il existe $y \in M_n$ tel que $d(x, y) < \alpha_n$ [c'est-à-dire M_n est un α_n -réseau fini de (K, d)].

Si de plus

c) $\text{card } M_n = N(K, \alpha_n), \forall n$
 (avec $N(K, \alpha_n)$ égal au plus petit nombre d'éléments que peut comporter un recouvrement de (K, d) par des parties de diamètre $\leq \alpha_n$) on dit que la suite $(M_n, \alpha_n)_n$ satisfait $P(K, d)$.

Remarque 1 : Si la suite $(M_n, \alpha_n)_n$ vérifie $p(K, d)$, $D = \bigcup_n M_n$ est dénombrable et partout dense dans K .

Remarque 2 : Plus généralement, on peut définir les suites $(M_n, W_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathcal{P}(K^2)$ vérifiant p_K , comme les suites $(M_n, W_n)_n$ telles que

- a') $(W_n)_n$ est une suite fondamentale décroissante d'entourages symétriques de l'espace uniforme K ,

et

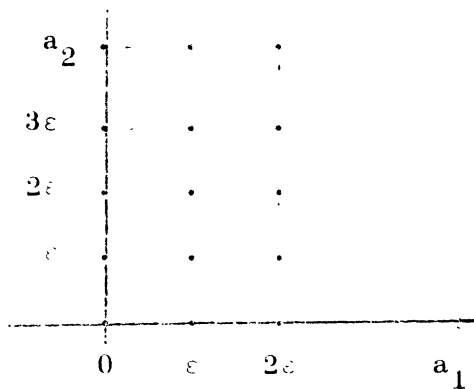
- b') M_n est un W_n -réseau fini pour K (pour tout n).

Notation : Soit une suite $(M_n, \alpha_n)_n$ satisfaisant $p_{(K, d)}$. A la suite $(M_n)_n$ et à tout $\beta > 0$, on associe la suite $(\mathfrak{M}_n(\beta))_n$ où $\mathfrak{M}_n(\beta)$ est la famille des parties de K à deux éléments s et t tels que (s, t) ou (t, s) appartienne à $M_n \times M_{n+1}$ et $d(s, t) \leq \beta$.

Exemple (XXI, 3; 1) : Soit $T = \mathbb{R}^k$ et soit $K = \prod_{i=1}^k [0, a_i]$ ($a_i > 0$, $i = 1, \dots, k$).

Pour tout $\varepsilon > 0$, posons

$$M_k(\varepsilon) = \{x; x \in K, x = (x_i)_{1 \leq i \leq k}, \frac{x_i}{\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ ou } x_i = a_i\}.$$



Notons, dans \mathbb{R}^k , $\|\cdot\|_p$ la norme induite par celle de $l^p\{1, \dots, k\}$ ($1 \leq p \leq \infty$).

On vérifie aisément que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_n$ de réels > 0 tels que $\varepsilon_n \downarrow 0$ et pour tout $p \in [1, \infty]$, la suite $(M_k(\varepsilon_n), \varepsilon_n k^{1/p})_n$ satisfait $p_{(K, \|\cdot\|_p)}$.

Donnons une condition d'existence d'une version de \tilde{X} à trajectoires uniformément continues sur K , dans le cas où K est un ensemble dénombrable, au moyen du lemme suivant :

Lemme (XXI, 3; 1) : Soient $(b_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suites de réels > 0 . On suppose $\sum_n b_n < \infty$. Si $T = K$, si K est un ensemble dénombrable et si X est une version de \tilde{X} , on a équivalence de :

- 1°) \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur K ;
- 2°) Il existe une suite $(\beta_{\sigma(n)})_n$ extraite de la suite β_n telle que

$$\sum_n P[\{\omega \in \Omega, \sup[\delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)); (s, t) \in K^2, d(s, t) \leq \beta_{\sigma(n)}] \geq b_n\}] < \infty$$

3°) Il existe une suite $(M_n, \alpha_n, \eta_n, \varepsilon_n, \varepsilon'_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times (\mathbf{R}_*^+)^4$ et un entier k_0 tels que

C_1 . $(M_n, \alpha_n)_n$ vérifie $p(K, d)$ et $\eta_n \rightarrow 0, \varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon'_n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$

C_2 . $P(\lim_n A_n) = 1$, avec

$$A_n = \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{(s, t) \in M_n \times M_{n+1}} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varepsilon_n \right. \\ \left. d(s, t) \leq \alpha_n + \alpha_{n+k_0} + \eta_n \right\}$$

C_3 . $P(\lim_n B_n) = 1$, avec

$$B_n = \left\{ \omega \in \Omega ; \forall s \in K, \exists t \in M_n / d(s, t) \leq \alpha_n, \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varepsilon'_n \right\}$$

Remarque 1 : Ici $\lim_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k \geq n} A_k$; si $\omega \in \lim_n A_n$, $\lim 1_{A_n}(\omega)$ existe et est égale à 1. Si $P(\lim_n A_n) = 1$, il existe une variable aléatoire $\omega \rightarrow N(\omega)$ à valeurs entières positives, telle que si $n \geq N(\omega)$, $\omega \in \bigcap_{k \geq n} A_k$.

Remarque 2 : La condition C_2 signifie que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $n_0(\omega)$ tel que si

$$n \geq n_0(\omega), (s, t) \in M_n \times M_{n+1}, d(s, t) \leq \eta_n + \alpha_n + \alpha_{n+k_0}$$

alors

$$\delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varepsilon_n.$$

La condition C_3 signifie que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $n'_0(\omega)$ tel que pour tout $n \geq n'_0(\omega)$ et pour tout $s \in D$, il existe $t \in M_n$ tel que $d(s, t) \leq \alpha_n$ et $\delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varepsilon'_n$.

Preuve du lemme : 1°) signifie que l'on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P\left[\bigcup_n \left\{ \omega; \sup_{\substack{(s,t) \in K^2 \\ d(s,t) \leq \beta_n}} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq b_k \right\}\right] = 1$$

On en déduit que 1°) implique 2°).

2°) \Rightarrow 3°) : Posons $\alpha_n = \frac{1}{3} \beta_{\sigma(n)}$ et soit alors une suite $(M_n)_n$ de parties de K telles que $(M_n, \alpha_n)_n$ vérifie $p_{(K,d)}$. Il suffit alors de prendre $k_0 = 0$, $\eta_n = \alpha_n$, $\varepsilon_n = \varepsilon'_n = b_n$ pour que 3°) soit satisfaite.

3°) \Rightarrow 1°) : Soit $(s, s') \in K^2$ et soit $\omega \in B_n \cap B_{n+k_0}$; il existe alors $(t, t') \in M_n \times M_{n+k_0}$ tel que

$$d(s, t) \leq \alpha_n, \quad d(s', t') \leq \alpha_{n+k_0}$$

et

$$\delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varepsilon'_n, \quad \delta(X(s')(\omega), X(t')(\omega)) \leq \varepsilon'_{n+k_0},$$

d'où

$$\delta(X(s)(\omega), X(s')(\omega)) \leq \varepsilon'_n + \varepsilon'_{n+k_0} + \delta(X(t)(\omega), X(t')(\omega)).$$

Supposons maintenant $d(s, s') \leq \eta_n$; alors :

$$(t, t') \in M_n \times M_{n+k_0} \quad \text{et} \quad d(t, t') \leq \alpha_n + \alpha_{n+k_0} + \eta_n.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \omega \in A_n \cap B_n \cap B_{n+k_0} & \Rightarrow \delta(X(s)(\omega), X(s')(\omega)) \leq \varepsilon_n + \varepsilon'_n + \varepsilon'_{n+k_0}. \\ (s, s') \in K^2, d(s, s') \leq \eta_n & \end{aligned}$$

On en déduit aisément 1°) (car $P(\bigcap_{k \geq n} B_k \cap A_k) \rightarrow 1$, quand $1 \rightarrow \infty$).

Le lemme est donc démontré.

Proposition (XXI,3;1) : Soient $(P_n, \beta_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+$ vérifiant $p_{(K,d)}$ et $(b_n)_n$ une suite de réels > 0 , telle que $\sum_n b_n < +\infty$. Soit X une version de \tilde{X} .

Si \tilde{X} est continue, on a équivalence de :

- 1°) \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur K ;
 2°) il existe une suite extraite de $(P_n, \beta_n)_n$, soit $(M_n, \alpha_n)_n$,
 telle que

$$P\left[\lim_n \left\{ \omega ; \sup_{\{s,t\} \in \mathfrak{D}_n(3\alpha_n)} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq b_n \right\} \right] = 1. \quad (I)$$

Démonstration :

1°) \Rightarrow 2°). C'est trivial

2°) \Rightarrow 1°). D'après le théorème fondamental, il suffit de montrer que \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur $D = \bigcup_n M_n \subset K$. Vérifions pour cela que la partie 3°) du lemme est satisfaite quand on prend

$$\eta_n = \alpha_n ; \quad \varepsilon_n = b_n, \quad \varepsilon'_n = \sum_{k \geq n} b_k, \quad k_0 = 1.$$

Trivialement C_1 et C_2 sont satisfaites. Montrons donc que l'on a bien C_3 .
 Posons :

$$\Lambda_n = \bigcap_{k \geq n} \left\{ \omega ; \sup_{\{s,t\} \in \mathfrak{M}_k(3\alpha_n)} \delta(X(t)(\omega), X(s)(\omega)) \leq b_n \right\}$$

D'où, pour tout $\omega \in \Lambda_n$

$$\sum_{k \geq n} \left(\sup_{\{s,t\} \in \mathfrak{D}_k(3\alpha_k)} \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \right) \leq \varepsilon'_n = \sum_{k \geq n} b_k.$$

Soit alors $s \in K$; on peut lui associer une suite $(s(k))_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$s(k) \in M_k, \quad d(s, s(k)) \leq \alpha_k$$

donc telle que

$$\{s(k+1), s(k)\} \in \mathfrak{M}_k(3\alpha_k).$$

La suite $(s(k))_{k \in \mathbb{N}}$ ayant été fixée pour tout $s \in K$, on a :

$$\omega \in \Lambda_n \Rightarrow \sum_{k \geq n} \sup_{s \in K} \delta(X(s(k+1))(\omega), X(s(k))(\omega)) \leq \varepsilon'_n.$$

Donc, pour tout $s \in K$ et pour tout ω de $\bigcup_n \Lambda_n$ (c'est-à-dire pour presque tout $\omega \in \Omega$), la suite $(X(s(n))(\omega))_n$ est de Cauchy. Mais comme E est un espace métrique complet, il existe donc $Y_s(\omega) \in E$ tel que, pour tout $s \in K$ et pour tout $\omega \in \bigcup_n \Lambda_n$

$$X(s(n))(\omega) \rightarrow Y_s(\omega), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Soit a fixé dans E et posons, pour tout $(\omega, s) \in \left(\bigcap_n \Lambda_n\right) \times K$, $Y_s(\omega) = a$.

On vérifie aisément que, pour tout $s \in K$,

$$Y_s(\cdot) \in \mathcal{L}^0(\Omega, P; E)$$

et

$$\delta(Y_s(\omega), X(s(n))(\omega)) \leq \sum_{k \geq n} \delta(X(s(k+1))(\omega), X(s(k))(\omega)), \quad \forall \omega \in \bigcup_n \Lambda_n \quad (1)$$

Mais comme \tilde{X} est continu en probabilité et que $P(\bigcup_n \Lambda_n) = 1$, on a donc

$$Y_s(\cdot) \in \tilde{X}(s), \quad \forall s \in K.$$

D'où C_3 est satisfaite.

Remarque 1 : Les notations étant celles utilisées dans la démonstration ci-dessus, on a ainsi montré qu'il existe une version de \tilde{X} , soit Y , à trajectoires uniformément continues sur K , telle que, pour presque tout ω , il existe un entier $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(n \geq n_0(\omega), s \in K) \Rightarrow \delta(Y_s(\omega), Y_{s(n)}(\omega)) \leq \sum_{k \geq n} \delta(Y_{s(k+1)}(\omega), Y_{s(k)}(\omega)).$$

Remarque 2 : Soit $K = \prod_{i=1}^k [0, 1]$; soit $(p_n)_n$ une suite d'entiers > 0 telle que $p_n \uparrow +\infty$.

Considérons $(M_n, \alpha_n) = (M(\frac{1}{p_n}), \frac{k^{1/p}}{p_n})$ et $d : (x, y) \rightarrow \|x - y\|_p$.

Alors, pour tout $s \in K$, on peut prendre pour $s(n)$ le point $\left(\frac{[p_n s_i]}{p_n}\right)_{1 \leq i \leq k}$
 $(s = (s_i)_{1 \leq i \leq k})$.

Corollaire 1 : Soit φ une fonction positive croissante sur $]0, \infty]$ et X une version de \tilde{X} .

Si \tilde{X} est continu et si l'on a

$$P\left[\lim_n \bigcap_{\{s,t\} \in \mathfrak{D}_n(3\alpha_n)} \{\omega; \delta(X(s)(\omega), X(t)(\omega)) \leq \varphi(d(s,t))\}\right] = 1 \quad (\text{II})$$

et

$$\sum_n \varphi(3\alpha_n) < +\infty \quad (\text{III})$$

alors \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur K .

Preuve : La condition (III) étant satisfaite, la proposition est satisfaite avec $b_n = \varphi(3\alpha_n)$.

Remarque : Ce théorème sera utile dans la recherche de l'existence de conditions de Hölder pour les trajectoires d'une version X de \tilde{X} .

Corollaire 2 : Supposons \tilde{X} continue. S'il existe une suite $(M_n, \alpha_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{P}(K) \times \mathbb{R}_*^+$ vérifiant $p_{(K,d)}$ et une suite $(b_n)_n$ de réels > 0 avec $\sum_n b_n < +\infty$, telles que :

$$\sum_n \text{card } \mathfrak{D}_n(3\alpha_n) P\{\delta(X(s), X(t)) \geq b_n\} < +\infty$$

alors \tilde{X} est à trajectoires uniformément continues sur K .