Systèmes projectifs de mesures et théorème de Prokhorov

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. nº 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E L. S C H W A R T Z 1 9 6 9 - 1 9 7 0

SYSTEMES PROJECTIFS DE MESURES
ET THEOREME DE PROKHOROV

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-

Exposé n°1 27.10.1969

§ 1. MESURES DE RADON FINIES.

Tous les espaces topologiques considérés seront séparés. On appelle mesure de Radon (sous-entendu : finie ≥ 0) sur X, une fonction μ sur la tribu borélienne de X, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, dénombrablement additive et intérieurement régulière au sens suivant :

$$\mu(B) = \sup_{\substack{K \text{ compact} \\ K \subset B}} \mu(K), \text{ pour tout B borélien.}$$

En particulier, μ est portée par une réunion dénombrable de compacts.

On dit que μ est une probabilité de Radon si $\mu(X) = 1$. La théorie de l'intégration sera supposée connue.

§ 2. IMAGES DE MESURES.

Soit $h : X \to Y$ une application de X dans Y, espaces topologiques, et soit μ une mesure de Radon sur X. On dit que h est μ-mesurable Lusin si, pour tout $\delta > 0$, il existe un compact $K_\delta \subset X$, tel que : $\mu(X - K_\delta) \leq \delta$, et que la restriction de h à K_δ soit continue.

Si h est μ-mesurable, on définit la mesure image $h\mu$ par $(h\mu)(B) = \mu(h^{-1}B)$, pour B borélien de Y; c'est une mesure de Radon sur Y. Si f est une fonction sur Y à valeurs dans un Banach, elle est $h\mu$-intégrable, si et seulement si $h^*f = f \circ h$ est μ-intégrable, et l'intégrale est la même. Si f est une fonction sur Y à valeurs dans un espace topologique Z, elle est $h\mu$ -mesurable, si et seulement si $f \circ h$ est μ-mesurable, et il y a transitivité des images : $f(h\mu) = (f \circ h)(\mu)$.

Proposition (I;2,1).

Si $h : X \to Y$ est continue et injective, alors $h : \mu \mapsto h\mu$, opérant de l'espace des mesures sur X dans l'espace des mesures sur Y, est injective.

Soit ν une mesure finie sur Y. Pour qu'elle soit image par h d'une mesure finie sur X, il faut et il suffit qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1) Elle est portée par $h(X)$.
  Alors l'application $h^{-1} : h(X) \to X$ est définie ν presque partout sur Y.
- 2) h^{-1} est ν-mesurable.

<u>Démonstration</u> : $\nu^*(Y-h(X)) = \mu^*(\emptyset) = 0$ si $\nu = h\mu$, donc la première condition est nécessaire; supposons-la réalisée.

Si $\nu = h\mu$, l'application $h^{-1} \circ h = Id_X$ est μ-mesurable, donc h^{-1} est $h\mu$-mesurable, c'est-à-dire ν-mesurable.

Inversement, si h^{-1} est ν-mesurable, posons $\mu = h^{-1}\nu$; alors $h\,h^{-1}\nu = \nu$ ou $h\mu = \nu$. C.Q.F.D.

<u>Proposition (I;2,2)</u>.

Soit $h : X \to Y$ continue. Pour qu'une mesure ν sur Y soit image par h d'une mesure sur X, il faut et il suffit qu'elle soit portée par une réunion dénombrable d'images de compacts de X.

<u>Démonstration</u> : La condition est trivialement nécessaire, car si μ est portée par $\bigcup_n K_n$, $\nu = h\mu$ est portée par $\bigcup_n h(K_n)$.

Inversement, soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de X, et supposons ν portée par $\bigcup_n h(K_n)$.

- 1) Supposons d'abord X, Y compacts, h surjective, auquel cas la condition précédente est réalisée.

Alors ν est une forme linéaire continue sur $C(Y)$; les images réciproques $h^*\varphi = \varphi \circ h$ des $\varphi \in C(Y)$ forment un sous-espace vectoriel de $C(X)$, et $\varphi \circ h \mapsto \nu(\varphi)$ est une forme linéaire continue sur ce sous-espace. Par Hahn-Banach, elle se prolonge en une forme linéaire continue μ sur $C(X)$, de même norme $\|\mu\| = \|\nu\|$. Mais on a $\mu(1) = \nu(1) = \|\nu\| = \|\mu\|$, donc $\mu \geq 0$, d'où le résultat, car $h\mu = \nu$.

- 2) Passons au cas général. Soit ν_n le produit de ν par la fonction caractéristique de $h(K_n) - h(K_{n-1})$. Elle est portée par $h(K_n)$, donc elle est l'image, par l'injection $h(K_n) \to Y$, d'une mesure ν'_n sur $h(K_n)$.

En appliquant le résultat 1), $\nu'_n = h\mu'_n$, μ'_n mesure portée par K_n, de même masse que ν'_n ou ν_n. Alors si μ_n est l'image de μ'_n par l'injection $K_n \to X$, on vérifie sans peine que $h\mu_n = \nu_n$. Comme $\nu = \Sigma \nu_n$, et que $\mu_n(1) = \nu_n(1)$, la mesure $\mu = \sum_n \mu_n$ est finie et vérifie $h\mu = \nu$. C.Q.F.D.

§ 3. SYSTEME PROJECTIF DE MESURES.

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dll, dashed, "p_i"'] \arrow[dl, dashed, "p_j"] \arrow[d, dashed, "p"] \\ X_i & X_j \arrow[l, "\pi_{i,j}"] & X_\infty \arrow[l, "\pi_j"] \end{tikzcd}$$

I ordonné filtrant

Soit $(X_i, \pi_{i,j})$ un système projectif d'espaces topologiques ($\pi_{i,j}$ application continue de X_j dans X_i pour $i \leq j$, avec $\pi_{i,i} = Id_{X_i}$, $\pi_{i,k} = \pi_{i,j} \circ \pi_{j,k}$ pour $i \leq j \leq k$). Soit X_∞ la limite projective, π_i son application canonique dans X_i.

Soit X un espace topologique, $p_i : X \to X_i$ des applications continues, avec $p_i = \pi_{i,j} \circ p_j$ pour $i \leq j$. Par la propriété universelle des limites projectives, la donnée des p_i est équivalente à celle d'une application continue $p : X \to X_\infty$, avec $p_i = \pi_i \circ p$.

Un système projectif de probabilités relatif au système précédent est la donnée d'une famille de probabilités de Radon, μ_i sur X_i, telles que $\mu_i = \pi_{i,j}\mu_j$ pour $i \leq j$. On se pose le problème suivant : existe-t-il une probabilité de Radon μ sur X, telle que $\mu_i = p_i\mu$ pour tout i ?

THEOREME DE PROKHOROV (I;3,1).

Pour qu'il existe une probabilité μ sur X, verifiant $\mu_i = p_i\mu$ pour tout i, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X tel que, pour tout i, $\mu_i(p_i(K) \geq 1-\varepsilon$. Si, en outre, les p_i séparent les points de X, μ est unique.

Démonstration : La condition est trivialement nécessaire, montrons qu'elle est suffisante.

1er Cas : Les X_i sont compacts, $X = X_\infty$, $p = Id_{X_\infty}$. C'est le cas de la limite projective de mesures de Radon sur des compacts, traité dans Bourbaki, Intégration, Chap.III, § 4, prop.8. (Bourbaki s'est canulé inutilement en supposant les $\pi_{i,j}$ surjectives; on se convaincra que c'est inutile, car de toute façon μ_i est portée par $\pi_{i,j} X_j$, donc aussi par $\pi_i X_\infty = \bigcap_{j \geq i} \pi_{i,j} X_j$, car on peut passer à la limite des mesures par un ordonné filtrant décroissant de compacts); la condition de Prokhorov est toujours réalisée, avec $K = X_\infty$.

2ème Cas : Les X_i sont quelconques, $X = X_\infty$, $p = Id_{X_\infty}$. Supposons les X_i donc X_∞ complètement réguliers. Ils sont plongeables dans leurs compactifiés de Cech $\check{X}_i$, et les $\pi_{i,j}$ se prolongent en $\check{\pi}_{i,j} : \check{X}_j \to \check{X}_i$. Soit Z la limite projective des $(\check{X}_i, \check{\pi}_{i,j})$ (distincte de $\check{X}_\infty$). On a toujours, sur les $\check{X}_i$, $\mu_i = \check{\pi}_{i,j} \mu_j$. Donc, il existe une limite projective μ sur Z, par le 1er cas. Mais X_∞ est un sous-espace de Z. Montrons que μ est portée par X_∞, d'où le résultat. Soit $\varepsilon > 0$ et soit K_∞ un compact de X_∞ tel que $\mu_i(\pi_i K) \geq 1-\varepsilon$ pour tout i. Alors $\mu(\check{\pi}_i^{-1} \check{\pi}_i K_\infty) \geq 1-\varepsilon$. Mais, d'après une propriété de la limite projective, K_∞ étant fermé dans Z, $K = \bigcap_i \check{\pi}_i^{-1} \pi_i K_\infty$ et comme c'est un ordonné filtrant décroissant de fermés :
$\mu(K) = \operatorname{Inf} \mu(\check{\pi}_i^{-1} \check{\pi}_i K_\infty) \geq 1-\varepsilon$, ce qui prouve notre assertion.

On peut s'affranchir de l'hypothèse de complète régularité des X_i; nous ne le ferons pas, la démonstration est plus délicate et dans la suite, les X_i seront des espaces vectoriels topologiques, donc complètement réguliers.

3ème Cas, Cas général : Si la condition de Prokhorov est réalisée pour X et les p_i, elle l'est a forfiori pour X_∞ et les π_i, en prenant, pour tout $\varepsilon > 0$, $K_\infty = p(K)$, où K est associé à ε sur X. D'après le 2ème cas, il existe donc une mesure μ_∞ sur X_∞, telle que $\mu_i = \pi_i \mu_\infty$ pour tout i. En outre, $\mu_\infty(p(K)) \geq 1-\varepsilon$, donc μ_∞ est portée par une réunion dénombrable d'images par p de compacts de X, donc $\mu_\infty = p\mu$, μ de Radon sur X, d'après la proposition (I;2,2); et on a bien $\mu_i = p_i\mu$ pour tout i.

Unicité. Il y a toujours unicité dans le 1er Cas (Bourbaki). Donc aussi dans le 2ème, car une solution sur X_∞ pour les π_i l'est a fortiori sur Z pour les $\check{\pi}_i$. Il y a unicité dans le cas général, si et seulement si $p : X \to X_\infty$ est injective (prop.(I;2,1)), c'est-à-dire si et seulement si les p_i séparent les points de X.