L. SCHWARTZ

Applications O-radonifiantes (suite et fin)

Séminaire d'analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1969-1970), exp. n° 17, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SAF_1969-1970____A18_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

SEMINAIRE L. SCHWARTZ 1969-1970

APPLICATIONS 0-RADONIFIANTES (suite et fin)

Exposé N° 17 9 Mars 1970

§ 1. FIN DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME (XVI,2;1)

D) Montrons l'équivalence des points 2 et 4 Supposons 2 réalisé, pour toute probabilité de Radon λ sur E. Soient Ω, μ, donnés. Un système fondamental de voisinages de 0 de $L^0(\Omega,\mu;G)$ est formé par les ensembles

$$\{\Psi \in L^0(\Omega,\mu;G) \; ; \; J_\beta(\mu,\|\Psi\|) \leq \varepsilon\}^{\bullet} \quad , \qquad 0<\beta<1, \; \varepsilon > 0 \; .$$

Par ailleurs, un système fondamental de voisinages de 0 sur $\mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$ est formé des ensembles $\{f \in \mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu)) \; ; \; \forall \; \xi \in E'$ tel que $\|\xi\| \leq 1$, $J_\alpha(\mu,|f(\xi)|) \leq \eta\}$, $0<\alpha<1$, $\eta>0$. Montrer la continuité de l'application $\varphi \mapsto u\circ\varphi$, de $L^0(\Omega,\mu;E)$ muni de la topologie induite par $\mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$, dans $L^0(\Omega,\mu;G)$, c'est donc monter que, quels que soient β, ε, il existe α, η, avec l'implication :

$$\text{(XVII,1;1)} \qquad (\forall \varphi \in L^0(\Omega,\mu;E)) \; : \; \Big(\sup_{\|\xi\|\leq 1} J_\alpha(\mu,|\xi\circ\varphi|) \leq \eta \Rightarrow$$

$$J_\beta(\mu,\|u\circ\varphi\|) \leq \varepsilon\Big) \; .$$

Or si $\lambda = \varphi(\mu)$, c'est une probabilité de Radon, et l'on a $\sup\limits_{\|\xi\|\leq 1} J_\alpha(\mu,|\xi\circ\varphi|) = \sup\limits_{\|\xi\|\leq 1} J_\alpha(\xi(\lambda)) = J^*_\alpha(\lambda)$, et $J_\beta(\mu,\|u\circ\varphi\|) = J_\beta(u(\lambda))$. Donc l'implication (XVII,1;1) résulte de l'inégalité 2 de (XVI,2;1), avec $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Inversement, supposons la continuité de $\varphi \mapsto u\circ\varphi$ réalisée, pour un (Ω,μ) tel que μ soit diffuse, pour des φ étagées. Alors, pour tous β, ε, il existe α, η, vérifiant (XVII,1;1). Soit λ une probabilité sur E, portée par un ensemble fini : $\lambda = \sum\limits_{n\leq N} C_n \, \delta_{(a_n)}$. Il existe une $\varphi : \Omega \to E$, μ-étagée, telle que $\varphi(\mu) = \lambda$; il suffit que l'on trouve una partition $\Omega = \bigcup\limits_{n\leq N} \Omega_n$, $\mu(\Omega_n) = C_n$, ce qui est possible puisque μ est diffuse, et que

$^{\bullet}$ Rappelons (page (V,1), ligne 3) que $\Phi(\lambda,\theta)$ veut dire $\Phi(\theta(\lambda))$, si Φ est un poids, λ une probabilité de Radon sur un espace topologique, θ une fonction s. c. i ≥ 0 sur cet espace.

φ soit égale à a_n sur Ω_n. Alors, de l'inégalité (XVII,1;1) on déduit $J_\beta(u(\lambda)) \leq M\ J^*_\alpha(\lambda)$, si $M = \frac{\varepsilon}{\eta}$.

E) Pour terminer la démonstration du théorème (XVI,2;1), il reste à montrer que, si (Ω,μ) est donné avec μ diffuse, et si u est très approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, alors la continuité de $\varphi \mapsto u\circ\varphi$ indiquée dans le point 4 est réalisée pour des fonctions étagées. Nous utiliserons pour cela le théorème du graphe fermé, en plusieurs étapes assez longues, ce qui nous amène à introduire un nouveau paragraphe.

§ 2. L'APPLICATION DU THEOREME DU GRAPHE FERME.

Soit $\mathfrak{a}$ l'espace vectoriel des μ-classes d'applications μ-étagées de Ω dans E, plongeable dans $\mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$ par l'identification de $\varphi \in L^0(\Omega, ;E)$ et de $\varphi^* \in \mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$, $\varphi^*(\xi) = \xi\circ\varphi = <\varphi,\xi>$, et soit $\overline{\mathfrak{a}}$ l'adhérence de $\mathfrak{a}$ dans $\mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$.
Comme $\mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$ a une base dénombrable de voisinages, il est métrisable, et il est complet parce que $L^0(\Omega,\mu)$ l'est. Il en est donc de même de $\overline{\mathfrak{a}}$, et on peut donc le prendre comme espace-source pour l'application du théorème du graphe fermé.

Soit $f \in \overline{\mathfrak{a}}$; f est limite d'une suite $f_n = \varphi^*_n$, φ_n étagées $\Omega \to E$. Pour toute φ_n, la probabilité $\varphi_n(\mu) = \lambda_n$ est combinaison finie de masses ponctuelles ; f_n converge vers f uniformément sur la boule unité de E', a fortiori simplement, donc $f_n(\xi)$ converge vers $f(\xi)$ dans $L^0(\Omega,\mu)$, donc $(f_n(\xi)(\mu)$ converge étroitement vers $(f(\xi))(\mu)$, de sorte que, d'après le lemme 1 page (V,5), la probabilité cylindrique $\lambda_f = \lambda$ définie par f est limite cylindrique des λ_n ; enfin les f_n sont équicontinues de E' dans $L^0(\Omega,\mu)$ [soit en effet V un voisinage de 0 dans $L^0(\Omega,\mu)$, et soit W un voisinage de 0 équilibré tel que $W + W \subset V$. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $(f_n - f)(B') \subset W$, où B' est la boule unité de E', donc $f_n(B') \subset W + f(B') \subset k(W+W) \subset kV$ pour k convenable. Pour tout $n < n_0$, il existe k_n tel que $f_n(B') \subset k_n\ V$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(B') \subset V\ \mathrm{Sup}(k,(k_n)_{n<n_0})$, ce qui prouve l'équicontinuité],

donc les λ_n sont uniformément de type 0 (exposé XVI, § 1), et λ est de type 0 très approximable. Comme nous avons supposé u très approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, l'image $u(\lambda)$, associée à la fonction aléatoire $f\circ {}^t u : G' \xrightarrow{{}^t u} E' \xrightarrow{f} L^0(\Omega,\mu)$, est de Radon. Malheureusement, $\sigma(G'',G')$ n'a pas ses parties compactes métrisables, on ne peut donc pas appliquer la prop (XIII,3;1) et $f\circ {}^t u$ n'a pas de raison d'être décomposée.

Supposons d'abord $G = H'$, H Banach séparable. Alors les parties bornées de $\sigma(H',H)$ sont métrisables. Donc on peut appliquer la prop. (XIII,3;1). Or, si $u : E \to G \to \sigma(G'',G')$ est très approximativement 0-radonifiante, elle l'est aussi $E \to H' \to \sigma(H',H)$, car $H' \to \sigma(H',H)$ se factorise par $H' \to \sigma(H''',H'') \to \sigma(H',H)$ [H' est un sous-espace de H , d'où $H' \to \sigma(H''',H'')$; mais il en est aussi un quotient, en considérant l'application $\sigma(H''',H'') \to \sigma(H',H)$, qui, à tout élément de H''', forme linéaire continue sur H'', associe sa restriction à $H \subset H''$, donc un élément de H']. Donc $u(\lambda)$ est de Radon dans $\sigma(H',H)$, et alors $f\circ {}^t u$ est décomposée par une fonction $\Psi_f \in L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$. Nous avons donc bien défini une application linéaire $f \mapsto \Psi_f$, avec $\Psi_f^* = f\circ {}^t u$, de $\overline{\mathfrak{a}} \subset \mathcal{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$ dans $L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$, pour H Banach séparable, dès que u est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(H',H)$.
Munissons maintenant $L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$ de la topologie ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les ensembles

$$\{\Psi \in L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H)) \ ; \ J_\beta(\mu,\|\Psi\|) \leq \varepsilon\} ,$$

$0 < \beta < 1$, $\varepsilon > 0$. Elle induit sur $L^0(\Omega,\mu;H')$ la topologie définie au § 1.D. C'est bien une topologie d'espace vectoriel. [Si h et k sont 2 fonctions ≥ 0 μ-mesurables, $J_{\alpha+\beta}(\mu,h+k) \leq J_\alpha(\mu,h) + J_\beta(\mu,k)$; car h est majorée par $J_\alpha(\mu,k)$ sauf sur un ensemble de μ-mesure $\leq$ ♦, donc $h+k$ est majorée par $J_\alpha(\mu,h) + J_\beta(\mu,k)$ sauf sur un ensemble de μ-mesure $\leq \alpha+\beta$; donc, si V est le voisinage défini par β, ε, le voisinage W défini par $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\varepsilon}{2}$, vérifie $W \cdot W \subset V$], métrisable puisqu'ayant une base dénombrable de voisinages de 0 ; et

♦ et k majorée par $J_\beta(\mu,k)$ sauf sur un ensemble de μ-mesure $\leq \beta$, Lemme (XVII,2;1) : l'espace $L^{o}(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$ est complet.

Démonstration : soit $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Il suffit de montrer qu'une suite partielle est convergente. Or il existe une suite partielle $(\Psi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, telle que

$$J_{\frac{1}{2^{k+1}}}(\mu,\|\Psi_{n_{k+1}}-\Psi_{n_k}\|)\leq\frac{1}{2^{k+1}} \quad .$$

Pour simplifier les notations, posons $\Psi_{n_{k+1}}-\Psi_{n_k}=\theta_k$, $\Psi_{n_o}=\theta_o$. Il s'agit de montrer que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\theta_k$ converge dans $L^{o}(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$, avec $J_{\frac{1}{2^{k+1}}}(\mu,\|\theta_k\|)\leq\frac{1}{2^{k+1}}$. Pour tous $l\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$,

$$J_{\frac{1}{2^l}}(\mu,\|\theta_l\|+\|\theta_{l+1}\|+\ldots+\|\theta_{l+m}\|)\leq J_{\frac{1}{2^{l+1}}}(\mu,\|\theta_l\|)+$$

$$+J_{\frac{1}{2^{l+m+1}}}(\mu,\|\theta_{l+m}\|)\leq\frac{1}{2^{l+1}}+\frac{1}{2^{l+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{l+m+1}}\leq\frac{1}{2^l} \quad .$$

Comme l'ensemble $\Omega_{l,m}$ $\{\omega\in\Omega;\|\theta_l(\omega)\|+\ldots+\|\theta_{l+m}(\omega)\|>\frac{1}{2^l}\}$ croît avec l, et que sa mesure reste $\leq\frac{1}{2^l}$, il en sera de même pour l'ensemble réunion $\Omega_l=\{\omega\in\Omega;\|\theta_l(\omega)\|+\ldots+\|\theta_{l+m}(\omega)\|+\ldots>\frac{1}{2^l}\}$; donc, pour μ-presque tout $\omega\in\Omega$, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\|\theta_k(\omega)\|$ converge, a fortiori la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\theta_k(\omega)$ converge dans H' ; soit $\theta(\omega)$ sa somme. Alors θ est une fonction définie μ-presque partout à valeurs dans H', et on a $\|\theta(\omega)-\sum\limits_{k=0}^{l-1}\theta_k(\omega)\|\leq\frac{1}{2^l}$ pour $\omega\notin\Omega_l$, la suite des Ω_l étant décroissante, avec $\mu(\Omega_l)\leq\frac{1}{2^l}$.

Sur tout $\complement\Omega_l$, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\theta_k$ converge uniformément vers θ, uniformément par rapport à la structure uniforme de H' définie par la norme, puisque, pour $\omega\notin\Omega_l$, et pour tout $l'\geq l$ donc $\omega\notin\Omega_{l'}$,

$\|\theta(\omega)-\sum_{k=0}^{l'-1}\theta_k(\omega)\|\leq\frac{1}{2^{l'}}$. Alors θ est μ-mesurable de Ω dans $\sigma(H',H)$ [pour tout l, il existe $\tilde{\Omega}_l\supset\Omega_l$, $\mu(\tilde{\Omega}_l)\leq\frac{1}{2^{l-1}}$, tel que les restrictions des θ_k à $\complement\tilde{\Omega}_l$ soient toutes continues de $\complement\tilde{\Omega}_l$ dans $\sigma(H',H)$, et $\sum_{k\in\mathbf{N}}\theta_k$ converge vers θ uniformément sur $\complement\tilde{\Omega}_l$, pour la structure uniforme définie par H' donc a fortiori pour celle qui est définie par $\sigma(H',H)$; donc la restriction de θ à $\complement\tilde{\Omega}_l$ est continue de $\complement\tilde{\Omega}_l$ dans $\sigma(H',H)$, donc θ est μ-mesurable de Ω dans $\sigma(H',H)$], soit $\theta\in L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$, et $\sum_{k\in\mathbf{N}}\theta_k$ converge vers θ dans $L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$, ce qui démontre le lemme.

Donc $L^0(\Omega,\mu;\quad\sigma(H',H))$ peut être pris comme espace-but pour l'application du théorème du graphe fermé.
La situation est maintenant la suivante : nous avons une application linéaire $f\mapsto\Psi_f$, avec $\Psi_f^*=f\circ{}^tu$, de $\overline{\mathfrak{a}}$ dans $L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$, pour H Banach séparable ; et on peut appliquer le théorème du graphe fermé aux espaces $\overline{\mathfrak{a}}\subset\mathfrak{L}(E';L^0(\Omega,\mu))$ et $L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$. Montrons donc que $f\mapsto\Psi_f$ a son graphe fermé. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $\overline{\mathfrak{a}}$, ayant une limite f, et telle que Ψ_{f_n} ait une limite Ψ. Les $f_n\circ{}^tu$ convergent vers $f\circ{}^tu$ dans $\mathfrak{L}(G';L^0(\Omega,\mu))$; mais les $\|\Psi_{f_n}-\Psi\|$ convergent vers 0 dans $L^0(\Omega,\mu)$, donc a fortiori $\Psi_{f_n}^*$ converge vers Ψ^* dans $\mathfrak{L}(G';L^0(\Omega,\mu))$. Donc $\Psi_{f_n}^*=f_n\circ{}^tu$ entraîne $\Psi^*=f\circ{}^tu=\Psi_f$, et le graphe est fermé.

Donc l'application $f\mapsto\Psi_f$, définie pour $G=H'$, H Banach séparable, est de graphe fermé, donc continue. Si on la restreint à $\mathfrak{a}\subset\overline{\mathfrak{a}}$, pour $f=\varphi^*$, $\varphi\in L^0(\Omega,\mu;E)$ étagée, on a $\Psi_f=u\circ\varphi\in L^0(\Omega,\mu;H')$, et nous avons observé que la topologie de $L^0(\Omega,\mu;H')$ était induite par celle de $L^0(\Omega,\mu;\sigma(H',H))$, on a bien (XVI,2;1), si $G=H'$, H Banach séparable, pour des φ étagées.

Soit maintenant $G=H'$, H Banach quelconque, et montrons la continuité de $\varphi\mapsto u\circ\varphi$, pour des φ étagées, u étant toujours supposée approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(H',H)$. Comme les espaces considérés sont métrisables, il suffit de montrer que, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $L^o(\Omega,\mu;E)$, formée de fonctions étagées, telle que φ_n^* converge vers 0 dans $\mathcal{L}(E';L^o(\Omega,\mu))$, alors $u\circ\varphi_n$ converge vers 0 dans $L^o(\Omega,\mu;H')$. Chaque φ_n prend ses valeurs dans un sous-espace E_n de dimension finie de E, donc $u\circ\varphi_n$ dans un sous-espace H'_n de dimension finie de H'. Alors H'_n est le dual de H/H'^o_n ; la norme d'un élément de H'_n est la borne supérieure des modules de ses produits scalaires avec des éléments d'une partie dénombrable dense de la boule unité ouverte de H/H'^o_n, donc, par relèvement, des modules de ses produits scalaires avec les éléments d'une partie dénombrable N_n de la boule unité ouverte de H. Soit $\widetilde{H}$ le sous-espace vectoriel fermé de H engendré par les N_n, $n \in \mathbb{N}$: c'est un Banach séparable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$

$$\|(u\circ\varphi_n)(\omega)\| = \sup_{\substack{\xi\in\widetilde{H}\\ \|\xi\|\leq 1}} |<(u\circ\varphi_n)(\omega),\xi>| \;;$$

autrement dit, la convergence des $u\circ\varphi_n$ vers 0 dans $L^o(\Omega,\mu;H')$, équivaut à la convergence vers 0 des $\rho\circ u\circ\varphi_n$ dans $L^o(\Omega,\mu;\widetilde{H}')$, où $\rho : H' \to \widetilde{H}'$ est la transposée de l'injection $\widetilde{H} \to H$, et $\widetilde{H}' = H'/\widetilde{H}^o$. Mais $\rho\circ u$ est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(\widetilde{H}',\widetilde{H})$, et le résultat antérieur nous démontre bien que $\rho\circ u\circ\varphi_n$ converge vers 0 dans $L^o(\Omega,\mu;\widetilde{H}')$.

Enfin, si G est un Banach arbitraire, et u approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, alors $\varphi \mapsto u\circ\varphi$ sera continue de $L^o(\Omega,\mu;E)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{L}(E';L^o(\Omega,\mu))$, dans $L^o(\Omega,\mu;G'')$; mais $u\circ\varphi \in L^o(\Omega,\mu;G)$, dont la topologie est induite par celle de $L^o(\Omega,\mu;G'')$, donc l'implication $1 \Rightarrow 4$ du théorème (XVI,2;1) est complètement démontrée, ce qui achève la démonstration de ce théorème. Ouf !

§ 3. SUPPRESSION DES HYPOTHESES D'APPROXIMATION ET DU RECOURS AU BIDUAL G".

On démontrera exactement comme à la proposition (XI,2:1), cas 1 et 2, et à la proposition (XII,1;1), cas 1 :

Proposition (XVII . 3;1) : soient E, G, des Banach, $u : E \to G$ linéaire continue, approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G",G')$. Alors on peut supprimer "approximativement" si le couple (E,E') a la propriété d'approximation métrique, et on peut remplacer $\sigma(G",G')$ par G, si G est un Banach réflexif ou un dual fort séparable d'un Banach.

Démonstration : pour la suppression de la condition d'approximation, on devra appliquer, comme pour (XII,1;1), la prop.(V,4;1) ; si λ est de type 0 sur E, il existe un poids A de la forme $\sup\limits_{0<\alpha<1} \varphi(\alpha)\, J_\alpha$, $\varphi > 0$, telle que λ soit de type A (voir démonstration C du théorème (XVI,2;1)) ; A est un poids plus fort que L^0 (§ 2 de l'exposé IV), donc la prop. (V,4;1) dit que λ est de type A approximable si (E,E') a la propriété d'approximation métrique, donc a fortiori de type 0-approximable, ce qui assure le résultat. Pour le remplacement de $\sigma(G",G')$ par G, c'est le théorème de Phillips si G est un Banach réflexif. Si $G = H'$, H' séparable H Banach, on a besoin d'un analogue du lemme démontré à l'additif de l'exposé XI : si $u : E \to G$ est approximativement 0-radonifiante de E dans $\sigma(G",G')$, elle est faiblement compacte de E dans G (car alors, comme à l'additif cité, si λ est cylindrique de type 0 sur E, elle est scalairement concentrée sur les boules de E, donc $u(\lambda)$ sera scalairement concentrée sur les faiblement compacts convexes de G). Je ne connais pas de démonstration directe de ce fait ; mais nous verrons au corollaire 2 du § suivant, que u est a fortiori q-sommante, pour tout $q \geq 0$, et cela assurera le résultat.

Remarques :

1) Si u est approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, $p<1$ (en particulier $p=0$), peut-on en déduire qu'elle est approximativement p-radonifiante de E dans G, si E est un Banach réflexif, ou un Banach de dual séparable (prop. (XII,2;2)) ?

2) Existe-t-il des $u : E \to G$ qui soient approximativement 0-radonifiantes de E dans $\sigma(G'',G')$ sans l'être de E dans G ? Je n'en connais pas. Les seuls cas connus où on ne peut pas remplacer $\sigma(G'',G')$ par G, sont relatifs à des applications p-radonifiantes, $p=1$ ou $+\infty$.

§ 4. LES APPLICATIONS (p,q)-RADONIFIANTES.

Proposition (XVII,4;1) (Kwapien) : Soit u une application linéaire continue d'un Banach E dans un Banach G, ayant la propriété suivante : pour toute λ cylindrique sur E, de type q approximable, $u(\lambda)$ est de Radon dans $\sigma(G'',G')$. Alors, pour toute λ cylindrique de type q approximable, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre q dans $\sigma(G'',G')$, autrement dit u est approximativement q-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$.

Démonstration : comme toute application linéaire continue est ∞-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, on peut se borner à q fini >0. En utilisant le théorème du graphe fermé comme au § 2, on montrera que, si (Ω,μ) est donné, si $\mathcal{A}$ est l'espace des μ-classes d'applications μ-étagées de Ω dans E, muni de la topologie induite par $\mathcal{L}(E'. L^q(\Omega,\mu))$, alors $\varphi \to u\circ\varphi$ est continue de $\mathcal{A}$ dans $L^0(\Omega,\mu;G)$. Soit Φ le poids sur $\mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}}_+)$:

$$\nu \to \Phi(\nu) = \int_{\overline{\mathbb{R}}_+} \operatorname{Inf}(1,t)\,d\nu(t) .$$

C'est un poids équivalent à L^0 (§ 2 de l'exposé IV). Donc l'ensemble

$$\{\Psi \in L^0(\Omega,\mu;G) \ ; \ \Phi(\mu,\|\Psi\|) \le \frac{1}{2}\}$$

est un voisinage de 0 de $L^0(\Omega,\mu;G)$.
Alors il existe, d'après la continuité de $\varphi \to u\circ\varphi$, un $R>0$ tel que l'inégalité

$$\sup_{\substack{\xi\in E' \\ \|\xi\|\le 1}} \|\xi\circ\varphi\|_{L^q(\Omega,\mu)} \le R$$

entraîne $$\Phi(\mu,\|u\circ\varphi\|) \le \frac{1}{2} \quad .$$

Si on a choisi un (Ω,μ) avec μ non diffuse, on en déduira, comme au D du § 1, que, pour toute λ de Radon portée par un ensemble fini, l'inégalité $\|\lambda\|_q^* \le R$ entraîne $\Phi(u(\lambda)) \le \frac{1}{2}$, ou

$$\int_E \operatorname{Inf}(1,\|u(x)\|)\,d\lambda(x) \le \frac{1}{2} \quad .$$

Soit alors $a=(a_n)_{n\le N}$ une suite finie de points de E, $\neq 0$, avec aussi $u(a_n)\neq 0$, et $(C_n)_{n\le N}$ une suite de nombres >0 avec $\sum_{n\le N} C_n = +1$, et appliquons à $\lambda = \sum_{n\le N} C_n\,\delta_{(C_n^{-1/q}a_n)}$. On a toujours $\|\lambda\|_q^* = \|a\|_q^* = \sup_{\|\xi\|\le 1} \|\langle a,\xi\rangle\|_{l^q} = M_q(a)$ de l'exposé VII (voir page XI,2) ; ceci est indépendant du choix des C_n. Ensuite $\Phi(\mu(\lambda)) = \sum_{n\le N} C_n \operatorname{Inf}(1,\|u(a_n)\|C_n^{-1/q})$. Ceci au contraire dépend fortement du choix des C_n. Choisissons $C_n = \dfrac{\|u(a_n)\|^q}{\|u(a)\|_q^q}$; alors $C_n>0$, $\sum_{n\le N} C_n = 1$, et $\|u(a_n)\|C_n^{-1/q} = \|u(a)\|_q$ pour tout n.

On voit alors que $\Phi(u(\lambda)) = \operatorname{Inf}(1,\|u(a)\|_q)$, et $\Phi(u(\lambda)) \le \frac{1}{2}$ équivaut à $\|u(a)\|_q \le \frac{1}{2}$.
Nous avons alors montré que $\|a\|_q^* \le R$ entraîne $\|u(a)\|_q \le \frac{1}{2}$, pour toute suite finie $a=(a_n)_{n\le N}$ de points de E, avec $a_n\neq 0$, $u(a_n)\neq 0$, et cela subsiste manifestement pour une suite où certains des a_n ou $u(a_n)$ sont nuls.

Par homogénéité, on en déduit que, pour toute suite finie a, $\|u(a)\|_q \leq \frac{1}{2R} \|a\|_q^*$, donc que u est q-sommante, avec $\pi_q(u) \leq \frac{1}{2R}$, c.q.f.d.

Conséquences :

On dira que $u : E \to G$ est approximativement (p,q)-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, si, pour toute λ cylindrique de type p approximable sur E, $u(\lambda)$ est de Radon d'ordre q sur $\sigma(G'',G')$.
De telles applications n'existent pas, à moins d'être nulles, si $q > p$. En effet, s'il existe un $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$, prenons pour λ la probabilité image de $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ par $t \to tx$; on voit que $u(\lambda)$ est l'image de ν par $t \to tu(x)$, et que, pour $\xi \in E'$, $\xi(\lambda)$ est l'image de ν par $t \to t\langle x,\xi\rangle$; alors $\|\lambda\|_p^{*a} = \|\lambda\|_p^* = \|x\| \, \|\nu\|_p$, et $\|u(\lambda)\|_q = \|u(x)\| \, \|\nu\|_q$; de sorte que, pour toute probabilité ν sur $\mathbb{R}$, $\|\nu\|_p < +\infty$ doit entraîner $\|\nu\|_q < +\infty$, ce qui exige $q \leq p$. Mais, pour $q \leq p$, on a :

Corollaire 1 : si u est approximativement (p,q)-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, elle est approximativement (p,p)-radonifiante, c-à-d p-radonifiante, de E dans $\sigma(G'',G')$.

En effet, u est a fortiori approximativement $(p,0)$-radonifiante, et la prop. (XVII,4;1) prouve qu'elle est approximativement p-radonifiante.

Donc, essentiellement, il n'y a pas de théorie des applications (p,q)-radonifiantes. Au contraire, il existe une théorie des applications (p,q)-sommantes♦, pour $q \geq p$ (elles sont nulles pour $q < p$).

Corollaire 2 : toute application approximativement p-radonifiante de E dans $\sigma(G'',G')$, est approximativement q-radonifiante, pour $q \geq p$.

En effet, u est a fortiori approximativement $(p,0)$-radonifiante, donc $(q,0)$, donc (q,q) par la prop.(XVII,4;1).

♦On les appelle habituellement (q,p)-sommantes !