Statistique et analyse des données

Alain Hillion
Jean-Marc Boucher

Filtrages des images radar (SAR)

Statistique et analyse des données, tome 16, nº 2 (1991), p. 35-57
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1991__16_2_35_0>

Statistiques et Analyse des Données
1991 - Vol. 16 n° 2 p. 35 - 57

FILTRAGES DES IMAGES RADAR (SAR)

Alain HILLION, Jean-Marc BOUCHER

Groupe Traitement d'Images
Département Mathématiques et Systèmes de Communication
Télécom Bretagne
BP 832 - 29285 BREST CEDEX

Résumé

Le problème du traitement du bruit granulaire ("speckle") qui entache les images radar à ouverture synthétique ("SAR") reste un problème largement ouvert dont l'importance ira croissant avec la profusion d'images de ce type (Satellites ERS 1, Radarsat, etc...).

On modélise généralement l'intensité des images SAR sous la forme :

$$I = S \cdot Z$$

(où S *et* Z *sont des variables aléatoires indépendantes représentant respectivement la réflectance* (S)*, liée à la nature du terrain, et le bruit de speckle* (Z)*). Le caractère multiplicatif de ce modèle ne permet pas une simple adaptation des filtres couramment utilisés pour le traitement des signaux entachés de bruit additif.*

Après avoir brièvement discuté la validité du modèle multiplicatif, on tentera une revue de quelques filtrages utilisés en imagerie radar pour présenter un filtre nouveau : le filtrage linéaire généralisé.

Mots clés : Image radar, modèle multiplicatif, moments d'ordre inférieur, filtrage adaptatif, filtrage linéaire généralisé.

Classification AMS : 62 G 25, 60 G 35

Classification STMA : 12 100, 02 090

Abstract

After discussing the relevance of multiplicative model and briefly surveying the classical filters, in the context of radar images processing, we introduce a new and adaptive procedure : the generalised-linear filtering.

Keywords : Radar images, Multiplicative model, adaptive filtering, generalised-linear filtering

Manuscrit reçu sous forme définitive le 22 janvier 1992.

I. INTRODUCTION - MODELISATION STOCHASTIQUE DES IMAGES RADAR

Les satellites dits actifs, équipés d'un radar à ouverture synthétique (SAR : "synthetic aperture radar") émettent vers le sol une onde dont ils mesurent l'énergie réfléchie par la surface de la terre (énergie rétrodiffusée). La section par le lobe d'antenne du radar de la surface du sol fournit une ligne d'image et l'ensemble des lignes acquises au cours du vol du satellite constitue une image.

Le premier satellite civil SEASAT a fourni assez d'images durant sa courte vie pour alimenter durant dix ans les utilisateurs de la télédétection. Une nouvelle génération (ERS1, RADARSAT...) va voir le jour durant cette décennie, suscitant de nouvelles recherches sur le traitement et l'exploitation de l'image radar en télédétection (cf [10]).

Les satellites SAR ont l'avantage de pouvoir opérer quel que soit le temps (nuages, obscurité) et de fournir par un choix adapté des caractéristiques du radar (fréquence, longueur d'antenne...) des informations précises sur la nature et la structure de la zone observée. L'inconvénient principal des images fournies, dû à un effet d'interférences entre ondes réfléchies par les diffuseurs, est de présenter un aspect granulaire (appelé encore **"speckle"** par les Anglo-Saxons et "mouchetage" par les Québécois) qui peut s'interpréter comme un bruit.

La modélisation stochastique la plus simple de ces images (qui va être rappelée) écrit l'intensité d'un pixel comme le produit d'une quantité ne dépendant que de la nature du sol (**la réflectance**) par le bruit de speckle. Le caractère multiplicatif de ce modèle, qui ne permet pas une simple adaptation des filtres couramment utilisés pour le traitement des signaux entachés de bruit additif, fait du traitement des images radar un problème largement ouvert.

1) Modélisation gaussienne du signal complexe

Pour une image numérique D, dont les **sites** (ou **"pixels"**) seront notés s = (0,0), (0,1)...(1,1), le signal complexe rétrodiffusé, correspondant au site so, X(so) + i Y(so), peut être écrit comme la somme (pondérée) des signaux émis par les autres sites de l'image sous la forme :

$$X(so) + i\, Y(so) = \sum_{s \in D} \delta(s, so)\{A(s) + i\, B(s)\} \tag{1}$$

(i) Le poids δ (s,so) indique l'influence du site s. Cette influence est en général réduite aux voisins proches du site so. Par exemple, notant V(so) l'ensemble des quatre voisins de so = (io, jo) à savoir (io + 1, jo), (io - 1, jo), (io, jo+1), (io, jo-1), on aura :

$$\delta(s, so) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad s = so \\ \varepsilon & \text{pour} \quad s \in V(so) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(ii) A(s) + i B(s) est la contribution du site s, qui résulte de la rétrodiffusion du signal par N(s) **diffuseurs** ("scatterers") répartis dans le site s.

Si Rj(s) et Uj(s) sont l'amplitude et la phase du signal rétrodiffusé par le diffuseur j, on écrira :

$$A(s) + i\ B(s) = \sum_{j=1}^{N(s)} R_j(s)\ \exp\ \{iU_j(s)\} \tag{2}$$

Posant que les variables aléatoires $\{Uj, Rj \ \ 1 \leq j \leq N(s)\}$ sont indépendantes, que les Uj obéissent à la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et que les Rj ont la même loi que R_1, on vérifie que :

$$\begin{aligned} &. E(A(s)) = E(B(s)) = 0 \qquad\qquad E(A(s).B(s)) = 0 \\ &. E(A^2(s)) = E(B^2(s)) = 2^{-1}\,.\,N(s)\,.\,E(R_1{}^2(s)) \end{aligned} \tag{3}$$

La quantité $N(s)\,.\,E\,(R_1{}^2(s))$ (qui est une des caractéristiques de la nature du site s) sera notée S(s) et est appelée **réflectance** (qui est proportionnelle au **coefficient de rétrodiffusion**).

Si, dans chaque site, le nombre de diffuseurs N(s) est grand et si les contributions des différents sites sont indépendantes, on peut, en utilisant le théorème central-limite, approcher le processus {A(s) + i B(s)}, par un **processus gaussien.** Précisément, on posera :

{A(s), $s \in D$} est un processus gaussien, centré, non corrélé tel que var (A(s)) = 2^{-1}. S(s) (4i)

{B(s), $s \in D$} est un processus gaussien, centré, non corrélé tel que var (B(s)) = 2^{-1}.S(s) (4ii)

les processus {A(s), $s \in D$} et {B(s), $s \in D$} sont indépendants. (4iii)

2) Modélisation de l'intensité

Les images radars utilisées sont habituellement des images obtenues par un traitement simple (racine carrée...), à partir des images en intensité.

Compte tenu de l'écriture (1) du signal complexe, et de la modélisation gaussienne adoptée en (4), il est simple de montrer que, notant I(so) = X^2(so) + Y^2(so) (I(so) est **l'intensité du pixel** so),

I(so) obéit à une loi exponentielle dont la moyenne est donnée par : (5i)

$$E\,(I(so)) = \sum_{s \in D} \delta^2(s, so)\;\; S(s) \tag{5ii}$$

Plus précisément, le processus {I(s), $s \in S$} est un **processus exponentiel** dont les moments du second ordre s'écrivent :

$$\operatorname{cov}\left(I(so),\, I(s_1)\right) = \left\{\sum_{s \in D} \delta(s, so)\; \delta(s, s_1)\; S(s)\right\}^2 \tag{5iii}$$

En fait, pour une image numérique correspondant à une scène naturelle **les variations des réflectances** de site en site traduisent une part de l'information géographique (ou thématique) contenue dans la zone à étudier.

On modélise cette dépendance spatiale en posant que :

(6) $\{S(s), s \in D\}$ est un processus dont on connaît certaines caractéristiques (moments du second ordre, lois marginales...) ou dont on a choisi le type de modélisation (processus gaussien, variables indépendantes, champs markoviens...).

On dispose alors d'un modèle stochastique complet pour les processus $\{S(s), A(s), B(s), I(s), s \in D\}$ en considérant que les formules (4i) (4ii) (4iii) définissent la **loi conditionnelle** du processus $\{A(s) + i\ B(s), s \in D\}$, sachant le processus $\{S(s), s \in D\}$.

Le problème du filtrage de l'image peut dont être posé comme le problème de **l'estimation** du processus des **réflectances** $\{S(s), s \in D\}$ à partir de **l'observation** du processus des intensités $\{I(s), s \in D\}$.

3) Modélisation multiplicative du speckle

On va faire, dans toute la suite, l'hypothèse que le signal correspondant au site so ne provienne que du signal rétrodiffusé par le site so (ce qui revient à poser $\delta(s, so) = 0$ si $s \neq so$ et $\delta(so,so) = 1$).

Dans ce cas, si on note $Z(s) = I(s)\ \{S(s)\}^{-1}$, les formules (4) et (5) montrent que :

(7i) le processus $\{ Z(s), s \in D\}$ **(processus de speckle)** est constitué de variables aléatoires, **indépendantes et de même loi** (exponentielle, de moyenne égale à 1)

(7ii) **le processus de speckle** $\{Z(s), s \in D\}$ et le **processus des réflectances** $\{S(s), s \in D\}$ (qui traduit la texture naturelle de la scène) sont **indépendants**

(7iii) Pour tout site s, $I(s) = S(s) . Z(s)$

Sur un site donné, la variance de l'intensité, qui est égale à $S^2(s)$, peut être importante, ce qui explique, en partie, l'aspect "granulaire" des images radar. Pour diminuer cette variance, on utilise fréquemment des **images multivues**, obtenues en considérant la moyenne de N vues indépendantes du même site. L'intensité des images de ce type dite **N-vues** ("N-look") s'écrit :

$$I(s) = N^{-1} . \sum_{i=1}^{N} I_i(s) = S(s) . \left\{ N^{-1} \sum_{i=1}^{N} Z_i(s) \right\} \tag{8}$$

ou, en posant $Z(s) = N^{-1} . \sum_{i=1}^{N} Z_i(s)$, de nouveau

$$I(s) = S(s)\, Z(s)$$

On a donc encore un **modèle multiplicatif** dont le processus de speckle est constitué de variables aléatoires, indépendantes et de même loi (de loi gamma $\Gamma(N,N)$, où $\Gamma(\lambda,\theta)$ est la loi de densité égale à $\theta^{\lambda} . \{\Gamma(\lambda)\}^{-1} . x^{\lambda-1} . \exp\{-\theta x\}$ pour $x \geq o$)

4) Filtrage du speckle

Filtrer le speckle dans un but de reconnaissance de la scène satellitaire, c'est en fait estimer le processus $\{S(s), s \in D\}$ à partir de l'observation du processus des intensités $\{I(s), s \in D\}$

Les hypothèses que nous adoptons pour la présentation des algorithmes qui vont suivre sont des versions modifiées (ou simplifiées) des hypothèses rappelées dans les paragraphes précédents. Dans **toute la suite de ce travail**, on supposera que :

(H1) les processus $\{Z(s), s \in D\}$ et $\{S(s), s \in D\}$ sont **indépendants.**

(H2) le processus de speckle $\{Z(s), s \in D\}$ est constitué de variables aléatoires (positives), **indépendantes et de même loi, de moyenne égale à 1** (on supposera souvent que cette loi est une loi exponentielle, gamma, ou log-normale)

(H3) $I(s) = S(s) . Z(s)$, $\forall s \in D$

(H4) Pour une **fenêtre d'observation** $F \subset D$, correspondant à une zone homogène (au sens thématique), le processus des réflectances $\{S(s),\ s \in F\}$ est constitué de variables aléatoires (positives), **indépendantes et de même loi.**

Quand on se limite à une fenêtre homogène, F, de taille n (dont les pixels sont numérotés de 1 à n), le filtrage du speckle sur le site so peut être posé (avec une modification évidente des notations) comme (9)

(9) Estimer S_1 à partir de l'observation d'un échantillon $I_i = S_i Z_i \qquad 1 \leq i \leq n.$

II. SURVOL DE QUELQUES METHODES DE FILTRAGE DU SPECKLE

En pratique, comme toujours en traitement de signal, les algorithmes sont déterminés en deux étapes. On commence par définir une procédure mathématique rendant optimal (ou sous-optimal) un certain critère (par exemple **la probabilité d'erreur a posteriori** ou **l'erreur quadratique moyenne**) pour la modélisation stochastique adoptée. L'écriture de la procédure retenue fait en général intervenir des paramètres inconnus du modèle qui sont estimés dans une deuxième étape.

On s'intéressera surtout, dans ce travail, à la première étape, c'est-à-dire, pour un **modèle multiplicatif** $I = SZ$, à la détermination des estimations $\hat{S}$ de S à partir de I. On se contentera de donner quelques indications pour l'estimation, à partir d'une fenêtre d'observation $I_1, I_2 \ldots I_n$ des paramètres inconnus figurant dans l'écriture des algorithmes.

Suivant le critère adopté, on étudiera successivement :

a) le filtre dit du **maximum a posteriori** qui propose comme estimation $\hat{S}$ le mode (ou un des modes) de la loi conditionnelle de la réflectance connaissant l'intensité (ce qui suppose une **modélisation complète des lois** de S et Z).

b) les filtres minimisant **l'erreur quadratique moyenne** parmi les estimateurs d'une **classe donnée** (en choisissant convenablement la classe à étudier, on peut s'arranger pour n'avoir qu'un **nombre faible de paramètres**, en général des moments, à **estimer** à partir de l'image).

A) Filtre du maximum a posteriori

L'indépendance de S et Z entraîne que la loi conditionnelle de I sachant $\{S = y\}$ est celle de y Z. Si g est la densité de Z et f celle de S, la densité conjointe de I et S s'écrit :

$$f_{I,S}(x,y) = y^{-1}.g(x\,y^{-1})\,.\,f(y) \tag{10}$$

et la densité conditionnelle de S sachant $\{I = x\}$

$$f_S^{I=x}(y) = y^{-1}.\,g(x\,y^{-1}).\,f(y).\left\{f_I(x)\right\}^{-1} \tag{11}$$

(où $f_I(x)$ est la densité de I)

L'estimateur de la réflectance par la méthode du maximum a posteriori, $\hat{S}_{MAP}$ est donc donné, en fonction de I, par l'équation

$$\hat{S}_{MAP} = \arg\left\{\sup_y \left[y^{-1}.\,g(Iy^{-1}).\,f(y)\right]\right\} \tag{12}$$

ou encore, dans le cas régulier, (quand $\hat{S}_{MAP}$ n'est pas une des bornes de l'intervalle des valeurs possibles) $\hat{S}_{MAP}$ est une des solutions de l'équation :

$$(13) \qquad -y^{-1} + \frac{d}{dy}\left[\mathrm{Log}\;g(Iy^{-1}) + \mathrm{Log}\;f(y)\right] = 0$$

Si le speckle Z obéit à une loi gamma $\Gamma(N,N)$, l'équation (13) devient :

$$(14) \qquad y^2.\,\frac{d}{dy}\,[\mathrm{Log}\;f(y)] - Ny + N.\,I = 0$$

Pour S obéissant à une loi gaussienne $N(\mu,\sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2, D.T. Kuan et al [14] écrivent (14) sous la forme

$$(15) \qquad y^2\,.\,(y - \mu)\,.\,\sigma^{-2} + N(y - I) = 0$$

équation du troisième degré, qui a toujours une racine comprise entre la moyenne de la réflectance $\mu = E(S)$ et la valeur observée I. Une modélisation plus précise (mathématiquement) poserait que S obéit à une loi gaussienne tronquée pour les valeurs positives de y, ce qui conduirait à la même équation, avec une interprétation différente de μ et σ^2 en termes de moments de S.

A. Lopes et al [16] étudient les cas où S **obéit à une loi** (symétrique) Beta (du premier type) ou à une **loi Gamma** et constatent que (14) est une équation du second degré.

En fait, les résultats précédents ne sont que des cas particuliers d'un résultat plus général : si la **loi de S appartient à la famille des distributions de Pearson** ([20]), c'est-à-dire si :

$$\frac{d}{dy}[\log f(y)] = (y-a).\left(b_0 + b_1 y + b_2 y^2\right)^{-1} \tag{16}$$

l'équation (14) est une **équation du troisième degré** dont les coefficients ne dépendent que des **quatre premiers moments de S**.

Comme le modèle multiplicatif entraîne que :

$$E(I^m) = E(S^m) \,.\, E(Z^m) \text{ pour } m = 1,2,3,4 \tag{17}$$

et que

$$E(Z^m) = N^{-m} \,.\, \Gamma(N+m) \,.\, \{\Gamma(N)\}^{-1} \tag{18}$$

il est possible d'estimer les quatre moments de S dans une **fenêtre homogène** par des quantités du type

$$n^{-1}.\left\{E(Z^m)\right\}^{-1}.\sum_{i=1}^{n} I_i^m \qquad m = 1, 2, 3, 4 \tag{19}$$

La formule (14) permet aussi de relier la forme fonctionnelle du filtre du maximum a posteriori à la loi de probabilité de la réflectance.

Si $\hat{S}_{MAP} = \varphi^{-1}(I)$, la densité de la réflectance f obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dy}[\mathrm{Log}\ f(y)] = N.\, y^{-2}.(y - \varphi(y)) \tag{20}$$

Par exemple, pour que $\hat{S}_{MAP}$ soit un filtre linéaire, l'inverse de S, S^{-1}, doit suivre une loi $\Gamma(\lambda, \theta)$ et $\hat{S}_{MAP}$ s'écrit alors :

$$\hat{S}_{MAP} = (N + \lambda + 1)^{-1}(\theta + N I) \tag{21}$$

B) Filtres minimisant l'erreur quadratique moyenne

Le meilleur **F-estimateur,** $\hat{S}_F$, sera défini comme tout filtre minimisant l'erreur moyenne quadratique parmi les estimateurs appartenant à la **classe F, de fonctions de l'intensité I.**

Posant (22) $\Delta(\hat{S}) = E\left[\left\{\hat{S} - S\right\}^2\right]$ on aura donc :

$$\hat{S}_F \in F \tag{23i}$$

$$\Delta(F) = \Delta\left(\hat{S}_F\right) = \inf_{\hat{S} \in F} \Delta\left(\hat{S}\right) \tag{23ii}$$

. Si F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des variables aléatoires de variance finie, la relation (23ii) est équivalente à :

$$\hat{S}_F - S \perp \left\{B_i, i \in J\right\} \tag{23iii}$$

où {Bi, i Œ J} est une base de F et $\perp$ désigne l'orthogonalité pour le produit scalaire <X,Y> = E(XY)

Suivant la nature de F (ensemble de toutes les fonctions de I, ensemble des combinaisons linéaires de I, ...), on retrouve les filtres classiques (espérance a posteriori, filtres linéaires...). A partir du filtre linéaire, qui est couramment utilisé pour le traitement de bruit additif, on introduit les filtres homomorphique et multiplicatif qui essaient de mieux prendre en compte le caractère multiplicatif du modèle.

1) Espérance a posteriori

Si F est l'ensemble de toutes les fonctions de I, $\hat{S}_F$ est l'espérance conditionnelle de S sachant I, $E^I(S)$, qui est égale à :

$$E^{I=x}(S) = \int_0^{+\infty} y \,.\, f_S^{I=x}(y)\, dy \tag{24}$$

où (cf (11)), g étant la densité de Z, f celle de S, et f_I celle de I

$$f_S^{I=x}(y) = y^{-1} . \, g(xy^{-1}) . \, f(y) . \{f_I(x)\}^{-1}$$

et

$$f_I(x) = \int_0^{+\infty} y^{-1} . \, g(xy^{-1}) . \, f(y)\, dy = E\left[S^{-1} . \, g(xS^{-1})\right] \tag{25}$$

ce qui permet d'écrire (24) sous la forme :

$$\hat{S}_F \, E\left[S^{-1} . \, g(IS^{-1})\right] = E\left[g(IS^{-1})\right] \tag{26}$$

Si le speckle Z obéit à la loi gamma $\Gamma(N,N)$

on a
$$f_I(x) = N^N . \, x^{N-1} . \, \{ \Gamma(N) \}^{-1} . \, E\,[S^{-N}.\exp\{-x\, S^{-1}\, N\}\,] \tag{27}$$

(équation qui permet d'ailleurs de caractériser la loi de l'intensité d'un modèle multiplicatif à partir de la transformée de Laplace de mesure positives) et donc compte-tenu de (26),

$$\hat{S}_F \, E\left[S^{-N} . \exp\left\{-IS^{-1}N\right\}\right] = E\left[S^{-N+1} . \exp\left\{-IS^{-1}N\right\}\right] \tag{28}$$

Si, par exemple, l'inverse de S, S^{-1} suit une loi $\Gamma(\lambda,\theta)$ (cf (21)), la loi de S^{-1} sachant $\{I = x\}$ est une loi $\Gamma(N + \lambda, \theta + N x)$ ce qui conduit à :

$$E^I(S) = (N + \lambda - 1)^{-1} (\theta + N I) \tag{29}$$

Si la réflectance S obéit à une loi log-normale LN (μ,σ^2) (c'est-à-dire si Log S est gaussienne, E(S) = m, var (S) = σ^2) et si le **speckle Z obéit à la loi log-normale LN (1, s^2)**, un calcul facile de conditionnement de lois gaussiennes montre que (cf [11])

$$E^I(S) = I^{to} . \mu^{1-to} . \exp \{2^{-1} . to . w\} \tag{30}$$

où

$$w = \text{Log}(1 + s^2) \qquad v = \text{Log}(1 + \sigma^2 . \mu^{-2}) \tag{31i}$$

$$to = v . (v + w)^{-1} \tag{31ii}$$

En fait, sauf quelques cas particuliers comme ceux qui viennent d'être indiqués (cf aussi [12]), le calcul effectif de $E^I(S)$ est inextricable. Dans la pratique, comme les modèles a priori de la réflectance des images radar sont encore assez mal connus, on préfère **au filtre de l'espérance a posteriori, qui est le filtre optimal, des estimateurs sous-optimaux** dont on impose la forme fonctionnelle (c'est-à-dire la classe F).

2) Filtres linéaires

Si F est l'ensemble des fonctions de la forme a I + b, $\hat{S}_F$ est le **meilleur estimateur linéaire de S,** $\hat{S}(1)$ qui est caractérisé (cf (23 iii) avec $\{Bi, i \in J\} = \{1,I\}$) par :

$$E\left(\hat{S}(1)\right) = E(S) \quad (\hat{S}(1) \text{ est un estimateur sans biais de S}) \tag{32}$$

$$\text{cov}\left(\hat{S}(1) - S, I\right) = 0 \quad (\text{l'erreur d'estimation } \hat{S}(1) - S \text{ et } I \text{ ne sont pas corrélés}) \tag{33}$$

$\hat{S}(1)$ est compris entre E(S) et I

$$\hat{S}(1) = a(1)\, I + (1 - a(1))\, E(S) \tag{34}$$

où

$$a(1) = \{\text{var } I\}^{-1} . \text{cov}(I,S) \tag{35}$$

. Pour le modèle multiplicatif $I = SZ$, on trouve, si $E(S) = \mu$, var $(S) = \sigma^2$, $E(Z) = m = 1$, var $(Z) = s^2$,

$$a(1) = m \cdot \sigma^2 \cdot \{s^2 \ \sigma^2 + m^2 \ \sigma^2 + \ \mu^2 \cdot s^2 \ \}^{-1} \qquad (36)$$

Une version simplifiée de ce filtre, proposée par J.S. Lee [15], consiste à remplacer le modèle multiplicatif par le modèle additif approché (obtenu en négligeant le terme produit $\{S - E(S)\} \cdot \{Z - E(Z)\}$)

$$I = S \cdot E(Z) + E(S)\,(Z - E(Z)) \quad S \text{ et } Z \text{ indépendantes.} \qquad (37)$$

Les formules (34), (35) restent valables, la formule (36) étant remplacée par :

$$a(1) = m \cdot \sigma^2 \,(m^2 \,\sigma^2 + \mu^2 \, s^2)^{-1} \qquad (38)$$

3) le filtre homomorphique

En prenant les logarithmes (notant L_I = Log I, L_S = Log S,..), suivant un procédé classique en traitement de signal ([1], [23]), on **transforme le modèle multiplicatif** de speckle en un **modèle additif.**

$$L_I = L_S + L_Z \qquad L_S \text{ et } L_Z \text{ indépendantes} \qquad (39)$$

On cherche alors le meilleur estimateur de L_S (linéaire en L_I), noté $\hat{L}_S$, qui vérifiera donc (cf II, B,2)

$$\hat{L}_S = t_o\,(L_I - E(L_I)) + E\,(L_S) \qquad (40)$$

où $\qquad t_o = \{\text{var } L_I\}^{-1} \cdot \text{cov}\,(L_I, L_S)$

$$\qquad = \text{var } L_S \cdot \{\text{ var } L_S + \text{var } L_Z \}^{-1}$$

Le **filtre homomorphique,** $\hat{S}_H$, est ensuite défini en effectuant l'opération inverse par :

$$\hat{S}_H = \exp\left\{\hat{L}_S\right\} \qquad (42)$$

$$\hat{S}_H = a . I^{t_o} \tag{42 bis}$$

où

$$a = \exp \{ (1 - t_o) E(L_S) - t_o E(L_Z) \} \tag{43}$$

Le filtre homomorphique est facile à mettre en œuvre puisque c'est un filtre linéaire fondé sur le logarithme d'intensité, mais il ne possède aucun caractère d'optimalité théorique. En règle générale, **ce n'est pas un estimateur sans biais** de la réflectance (bien qu'il arrive, si la réflectance et le speckle obéissent à des lois log-normales, par exemple, que filtre homomorphique et espérance a posteriori coïncident).

4) le filtre multiplicatif

C.R. Moloney et M.E. Jernigan [17] cherchent le meilleur estimateur s'écrivant comme une puissance de I ($F = \{I^t, t \in R\}$). Le calcul de la dérivée de $J(t) = E[\{S - I^t\}^2]$ permet de définir le **filtre multiplicatif** $\hat{S}_M$ par $\hat{S}_M = I^{t_1}$ où t_1 est une racine de l'équation :

$$J'(t_1) = 0 = E [\{S - I^{t_1} \} . I^{t_1} . L_I] \tag{44}$$

En pratique, on résoud une version approchée de (44) obtenue en gardant les premiers termes du développement de $I^t = 1 + t L_I + ...$, ce qui conduit à une équation du deuxième (ou du premier) degré en t_1.

Tous les filtres présentés (linéaire, homomorphique, multiplicatif...) ont la même écriture fonctionnelle $\hat{S} = a I^t + b$, ce qui nous a amenés ([2], [9]) à introduire les filtres **t-linéaire** et **linéaire généralisé**, qui seront présentés en détail dans le paragraphe suivant.

III. FILTRE t-LINEAIRE - FILTRE LINEAIRE GENERALISE

Pour $t > 0$, a et b réels, on pose $\hat{S}(t; a, b) = a\, I^t + b$ dont l'erreur d'estimation est :

$$\Delta(t; a, b) = E\left[\left\{\hat{S}(t, a, b) - S\right\}^2\right] \tag{45}$$

Si, **pour t fixé**, on minimise $\Delta(t; a, b)$, on définit le meilleur estimateur t-linéaire (ou **filtre t linéaire**), $\hat{S}(t)$, qui est le meilleur F_t-estimateur avec $F_t = \{a\, I^t + b, a \in R, b \in R\}$

On a alors des relations analogues à (32), (33)

$$E\left(\hat{S}(t)\right) = E(S) \qquad (\hat{S}(t) \text{ est un estimateur sans biais de S}) \tag{46}$$

$$\mathrm{cov}\left(\hat{S}(t) - S, I^t\right) = 0 \qquad (\text{l'erreur d'estimation } \hat{S}(t) - S \text{ et } I^t \text{ ne sont pas corrélées}) \tag{47}$$

$\hat{S}(t)$ s'écrit (48) $\hat{S}(t) = a(t)\, I^t + b(t)$

où

$$a(t) = \{\mathrm{var}\, I^t\}^{-1} . \mathrm{cov}\,(I^t, S) \tag{49}$$

$$b(t) = E(S) - a(t)\, E\,(I^t) \tag{50}$$

L'erreur d'estimation $\Delta(t) = \inf_{a, b} \Delta(t; a, b)$ est égale à :

(51) $$\Delta(t) = E\left[\left\{\hat{S}(t) - S\right\}^2\right]$$

$$= \mathrm{var}\, S - \{\mathrm{var}\, I^t\}^{-1} . \mathrm{cov}^2\,(I^t, S)$$

Pour t **tendant vers 0**, on vérifie que, sous des conditions classiques de régularité, $\hat{S}(t)$ converge (en moyenne quadratique) vers un estimateur noté $\hat{S}_{LOG}$ s'écrivant :

$$\hat{S}_{LOG} = \hat{S}(0) = a_L . L_I + b_L \tag{52}$$

où

$$a_L = \{\mathrm{var}\, L_S + \mathrm{var}\, L_Z\} . \mathrm{cov}\,(L_S, S) \tag{53}$$

$$b_L = E(S) - a_L . E(L_I) \tag{54}$$

Les relations (53) et (54) entraînent :

$$E\left(\hat{S}_{LOG}\right) = E(S) \tag{55}$$

$$\operatorname{cov}\left(\hat{S}_{LOG} - S, L_I\right) = 0 \text{, ce qui entraîne que } \hat{S}_{LOG} \text{ qui sera} \tag{56}$$

appelé **le filtre log-linéaire** est le meilleur F-estimateur pour $F = \{ a L_I + b, a \in R, b \in R \}$

On aura l'erreur d'estimation $\Delta(0) = E\left[\left\{\hat{S}_{LOG} - S\right\}^2\right]$ donnée par :

$$\Delta(0) = \lim_{t \to 0} \Delta(t) \tag{57}$$

$$= \operatorname{var} S - \{ \operatorname{var} L_S + \operatorname{var} L_Z \}^{-1} . \operatorname{cov}^2(L_S, S)$$

Les filtres classiques rappelés au paragraphe précédent s'écrivent en fonction des filtres $\hat{S}(t)$. $\hat{S}(1)$ est le filtre linéaire (cf II, B, 2). Le filtre homomorphique est de la forme $\hat{S}(t_\sigma; a, 0)$ (cf II, B, 3) et le filtre multiplicatif de la forme $\hat{S}(t_1; 1, 0)$

1) le filtre linéaire généralisé

On définira le **filtre linéaire généralisé**, noté $\hat{S}_G$, comme tout estimateur vérifiant :

$$E\left[\left\{\hat{S}_G - S\right\}^2\right] = \inf_{0 \le t \le 1} \Delta(t) \tag{58}$$

La détermination de $\hat{S}_G$ suppose donc **l'étude des variations de la fonction** Δ qui peut-être écrite (cf 51) sous la forme :

$$\operatorname{var} S - \Delta(t) = \{\operatorname{var} I^t\}^{-1} . \operatorname{cov}^2 (I^t, S)$$

De la relation de définition du modèle multiplicatif ($I = S.Z$), on déduit

$$E(I^t) = E(S^t)\, E(Z^t), \text{ pour tout } t \tag{59}$$

et notant i(t), s(t), z(t) les fonctions définies par

$$z(t) = E(Z^t) = E\{\exp\{t L_Z\}\}, i(t) = \ldots \qquad (60)$$

les expressions de la variance et de la covariance **en fonction des moments de la réflectance et du speckle**

$$\operatorname{var} I^t = s(2t)\, z(2t) - s^2(t)\, z^2(t) \qquad (61)$$

$$\operatorname{cov}(I^t, S) = z(t)\,[\, s(t+1) - s(t)\, s(1)\,] \qquad (62)$$

Pour **t tendant vers 0**, si l'on fait l'hypothèse que S, Z, L_S, L_Z sont de variances finies, on aura, par exemple :

$$z'(t) = E(L_Z.Z^t),\ z'(o) = E(L_Z),\ z''(o) = E(L^2{}_Z) \qquad (63)$$

de sorte que $\Delta(0)$ (cf 57) s'exprime en fonction de

$$\operatorname{var} L_I = s''(o) - [s'(o)]^2 + z''(o) - [z'(o)]^2 \qquad (64)$$

$$\operatorname{cov}(L_S, S) = s'(1) - s(1)\, s(o) \qquad (65)$$

S'il existe a $\in$] 0,1 [tel que $\hat{S}_G = \hat{S}(\alpha)$, **on peut caractériser le filtre linéaire généralisé par une propriété d'orthogonalité** (dans l'espace des variables aléatoires de variance finie)

Dérivant $\Delta(t) = \operatorname{var}\left(\hat{S}(t) - S\right)$

on aura :

$$\begin{aligned}\Delta'(t) &= 2\operatorname{cov}\left(\hat{S}'(t), \hat{S}(t) - S\right) \\ &= 2\operatorname{cov}\left(a'(t) I^t + b'(t) + a(t) L_I . I^t, \hat{S}(t) - S\right)\end{aligned} \qquad (66)$$

et comme, cf (46), (47), $\hat{S}(t) - S \perp \{1, I^t\}$

$$\Delta'(t) = 2\, a(t) \operatorname{cov}\left(\hat{S}(t) - S, L_I . I^t\right) \qquad (67)$$

qui peut être écrite en fonction des moments sous la forme :

$$\Delta'(t) = 2 \, . \, \{\text{var } I^t\}^{-2} \, . \, \text{cov } (I^t, S) \, . \, c(t) \tag{68}$$

où

$$c(t) = \text{cov } (S, I^t) \, . \, \text{cov } (I^t, L_I.I^t) - \text{var } I^t \, . \, \text{cov } (S, L_I \, . \, I^t) \tag{69}$$

Si $\hat{S}_G = \hat{S}(\alpha)$ (et $a(\alpha) \neq 0$), la relation (67) entraîne

$\text{cov}\left(\hat{S}(\alpha) - S, L_I. I^\alpha\right) = 0$, c'est-à-dire que **le filtre linéaire généralisé vérifie la condition d'orthogonalité**

$$\hat{S}_G - S \perp \left\{1, I^\alpha, L_I. I^\alpha\right\} \tag{70}$$

2) Quelques calculs

Le calcul effectif de $\Delta(t)$ à partir des formules (61) à (65) est en général assez compliqué.

Pour les **deux modèles classiques du speckle** (loi gamma et loi log-normale), on utilise les formules suivantes donnant $x(t) = E(X^t)$

. Si **X obéit à la loi log-normale** $LN(\mu, \sigma^2)$

$$x(t) = \mu^t \, . \, \exp \{ -2^{-1} \, . \, t \, . \, (1 - t) \, . \, v \} \tag{71}$$

(où $v = \text{Log } (1 + \sigma^2 \, . \, \mu^{-2})$ (cf 31 i)

$$x'(t) = x(t) . \left\{vt + \text{Log } \mu - \frac{v}{2}\right\} \tag{72}$$

. Si **X obéit à la loi gamma** Γ (λ, θ)

$$x(t) = \theta^{-t} \, . \, [\, \Gamma \, (l) \,]^{-1} \, . \, \Gamma(l + t) \tag{73}$$

$$x'(t) = x(t) \, . \, \{ \, - \text{Log } \theta \, + \psi \, (t + \lambda) \, \} \tag{74}$$

(où y est la fonction digamma $\psi(t) = \{ \text{ Log } \Gamma \text{ (t) } \}'$)

Le cas où la **réflectance obéit à une loi uniforme** sur $[0, 2\mu]$ et **le speckle à une loi log-normale** LN $(1, s^2)$ a déjà été étudié (cf [2])

Ecrivant $\Delta(t)$ sous la forme

$\text{var } S - \Delta(t) = 3 \cdot \text{var } S \cdot [\, g(t)\,]^{-1}$

on a :

$$g(1) = 3\,(1 + 4\, s^2) \tag{75}$$

$$g(o) = 4\,(1 + w) \quad \text{où cf (31 i)} \quad w = \text{Log}\,(1 + s^2) \tag{76}$$

Si le bruit est faible, on préfère le filtre linéaire au filtre log-linéaire ; c'est le contraire dès que s^2 est assez grand (c'est-à-dire si (cf I,3) le nombre de vues N est faible $(N \leq 8)$.

Si S et Z obéissent à des lois log-normales LN (μ, τ^2) et LN $(1, s^2)$, on vérifie que :

(77) $$\text{var } S - \Delta(t) = \mu^2 \cdot (e^{vt} - 1)^2 \cdot (e^{t^2(v+w)} - 1)^{-1}$$

et que $\Delta(t)$ passe par un minimum pour la valeur $\alpha = v \cdot (v + w)^{-1}$.

Dans ce cas (cf II, B,1), le **filtre linéaire généralisé est le filtre optimal**

$\hat{S}_G = \hat{S}(\alpha) = E^I(S)$

3) Mise en œuvre du filtre généralisé

On suppose que la **distribution du speckle est connue** : en pratique, on choisit un modèle gamma ou log-normal, dont la moyenne est connue $(m = 1)$ et dont la variance s^2 dépend du nombre de vues.

a) Connaissance a priori sur la réflectance

Bien que ce soit, pour le moment, rarement le cas (cf [5]), il arrive qu'on puisse raisonnablement poser que la **distribution de la réflectance appartient à une famille de lois de probabilité** (uniforme, gamma, beta, log-normale, triangulaire...). On commence par **estimer le paramètre inconnu**, $\theta \in R^k$, (moyenne, variance...) **de la loi de la réflectance.** La méthode la plus simple (si la loi de I ne permet aucune procédure plus élaborée, ce qui est presque toujours le cas) est **la méthode des moments** (déjà utilisée pour le filtre du maximum a posteriori (cf II, A et aussi [5]) qui consiste à écrire :

$$\theta = f\,(\,s(1), s(2),..., s(k)\,) \tag{78}$$

et à estimer s(j) (ou le $j^{\text{ième}}$ moment centré) par (cf 19)

$$\hat{s}(j) = n^{-1}.\{z(j)\}^{-1}.\sum_{i=1}^{n} I_i^j$$

ce qui fournit une estimation $\hat{\theta}$ de θ.

On calcule alors les quantités $\hat{s}(t)$ correspondant aux moments de la loi de paramètre $\hat{\theta}$ et on peut écrire $\Delta(t)$ **comme une fonction de t** (et de $\hat{\theta}$) qu'il reste à minimiser.

b) La loi de la réflectance est inconnue

Quand le type de distribution de la réflectance est inconnu, il devient impossible d'estimer $\Delta(t)$ comme une fonction de t ; tout au plus, peut-on **estimer les valeurs prises par Δ pour $t \in T$** (sous-ensemble fini de [0,1]) en transformant les formules (62) et (65) pour ne faire intervenir que les moments de Z (qui sont connus) et les moments de S (qui seront estimés, comme précédemment, dans une fenêtre homogène), en

$$\text{cov}\,(I^t, S) = [\text{cov}\,(I^t, I) - \{\,z(t+1)\,\}^{-1}.\text{cov}\,(Z^t, Z).E\,(I^{t+1})\,].\{z(1)\}^{-1} \tag{73}$$

$$\text{cov}\,(L_I, S) = [\,\text{cov}\,(L_I, I) - \{z(1)\}^{-1}.\text{cov}\,(L_Z, Z).E(I)\,].\{\,z(1)\,\}^{-1} \tag{74}$$

La minimisation de la fonction Δ interpolée, cf [2], à partir des valeurs $\{\Delta(t), t \in T\}$ est pénible et peu réaliste, ce qui amène à proposer une **procédure sous-optimale.**

c) Version approchée du filtre généralisé

. On limite les **valeurs possibles de α** (valeur optimale de t) à un **sous-ensemble fini de valeurs typiques** T = { 0, 1/2, 1} ou T = { 0,1}

. A partir des formules (51), (73), (74) les estimations des moments de I sur une fenêtre homogène de taille petite, 3 x 3, 5 x 5, 7 x 7 (cf [2], [9]) conduisent à des estimations $\{ \hat{\Delta}(t), t \in T \}$

. On définit alors le **filtre linéaire généralisé (approché)** par :

$$\hat{S}_G = \hat{S}(\alpha) \quad \text{où} \quad \alpha = \arg\left\{ \inf_{t \in T} \hat{\Delta}(t) \right\} \tag{75}$$

IV. CONCLUSIONS - PERSPECTIVES

Le principal **avantage** de la méthode proposée est son caractère **adaptatif.** Suivant la connaissance que l'on a du terrain, on peut choisir une version plus ou moins élaborée du filtre linéaire généralisé (cf III, 3). **La forme fonctionnelle du filtre** (c'est-à-dire la valeur a optimale) **varie avec la distribution de la réflectance** (c'est-à-dire la nature thématique des pixels) : la carte des variations de a peut donc servir de première approche de segmentation ou de détection de contours (cf [3]).

Le principal **inconvénient** (qui est d'ailleurs inhérent à toutes les procédures adaptatives appliquées à des images naturelles, peu homogènes) réside dans la **détermination de la taille de la fenêtre d'estimation** des diverses caractéristiques de l'image.Si la fenêtre est trop grande, elle contient des zones de nature thématique différente (un mélange de distributions de réflectance). Si elle est trop petite, l'estimation des moments est médiocre (cf [22], pour une première approche de détermination de taille de fenêtre homogène, en termes de variation de variances).

Le filtre linéaire généralisé (ou la forme adaptative du maximum a posteriori) ne sont que des **réponses très partielles** aux questions difficiles que sont le traitement, le filtrage et la classification des images radar. Dans ce travail, n'a été abordé que le **filtrage statistique, pixel par pixel, pour un modèle de bruit multiplicatif.** Pour obtenir des algorithmes, plus efficaces en situation réelle, il faut compléter les études sur les **lois de probabilité de la réflectance et de l'intensité des images** radar et prendre en compte la **dépendance spatiale** par la définition de modèles stochastiques traduisant à la fois la texture thématique des scènes et la complexité du phénomène de speckle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **Arsenault, H., Denis M.** (1983) "Image processing in signal-dependent noise" Com. J. Phys, vol 61, pp. 309-317.

[2] **Boucher, JM., Hillion , A.** "Alpha-linear processing of a multiplicative noise with applications to radar images" Proc IAESTED 87, Genève, pp. 42-44.

[3] **Boucher, JM., Hillion, A.** "Non linear filtering and edge detection in speckled radar images" IGARSS'88, Edinburgh, pp. 1267-1268.

[4] **Crimmins, T.R.** (1985) "Geometric filter for speckle reduction" Applied optics, vol 24, n° 10, pp. 1438-1443.

[5] **Delignon, Y., Garello, R., Hillion,A.** "A statistical characterisation of sea-state SAR images" Proc. Oceans'90, Washington, pp. 398-401.

[6] **Derin, H., Kelly, PA., Vezina, G., Labitt,S.G.** (Jan. 90) "Modeling and segmentation of speckled images using complex data" IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol 28, n° 1, pp 76-87.

[7] **Durand, JM., Gimonet, B.J., Perbos, J.R.,** (1987) "SAR data filtering for classification" IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol 25, n° 5, pp 629-637

[8] **Goodman, J.W.** (Nov. 76) "Some fundamental properties of speckle" J. Opt. Soc. Amer, vol 66, pp 1145-1149.

[9] **Hillion, A., Boucher, JM.** (88) "A new non-linear filtering algorithm with application to radar images" Proc RADAR 88, Ann Arbor, pp 177-181.

[10] **Hillion, A., Boucher, JM. Roux, C.** (1989) "Le traitement des images de télédétection : aperçus et perspectives" in "Télédétection en francophonie" Ed. AUPELF-UREF, Paris, pp 97-110

[11] **Hillion, A., Boucher, JM.** "A unified approach to non-linear processing of multiplicative noise with applications to radar images" Proc. EUSIPCO 90, Barcelona, pp 2027-2029.

[12] **Kasturi, R., Walkup, JF., Krile, T.F.** (May-June 85) "Adaptive point estimation in signal-dependent noise" IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol 15, n° 3, pp 352-359

[13] **Kelly, P.A., Derin, H., Hartt, K.D.** (Oct. 88) "Adaptive segmentation of speckled images using a hierarchical random field model" IEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol 36, n° 10, pp 1628-1641.

[14] **Kuan, D.T., Sawchuk, A.A., Strand, T.C., Chavel, P.** (Mar 87) "Adaptive restoration of images with speckle" IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol 35, n° 3, pp 373-383

[15] **Lee, J.S.** (1981) "Speckle analysis and smoothing of synthetic aperture radar images" Computer graphics and Image Processing, vol 17, pp 24-32.

[16] **Lopes, A., Nezry, E.,Touzi, R., Laur, H.** "Maximum a posteriori speckle filtering and first order texture models in SAR images" Proc IGARSS 90, Washington, pp 2409-2412

[17] **Moloney, C.R., Jernigan, M.E.** "Non-linear adaptive restoration of images with multiplicative noise" Proc ICASSP 89, Glasgow, pp 1433-1436.

[18] **Sadjadi, F.A.** (Jan 90) "Perspective on techniques for enhancing speckled imagery" Optical Engineering, vol 29, n° 1, pp 25-30

[19] **Safa, F., Flouzat, G.** (1989) "Un exemple de filtrage morphologique du speckle dans les images radar" Photo-interprétation, vol 5, pp 39-41

[20] **Stuart, A., Ord, J.K.** (1987) "Kendall's advanced theory of statistics : distribution theory", Griffin, London.

[21] **Ulaby, F.T., Kouyate, F., Brisco, B., Williams, T.H.L.** (1986) "Textural information in SAR images" IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol 24, n° 2, pp 235-245.

[22] **Wu, Y., Maître, H.** (1989) "Smoothing speckled SAR images by using maximum homogeneous region filter" Rapport interne, Télécom Paris.

[23] **Yan, P.F., Chen, C.H.** (1986) "An algorithm for filtering multiplicative noise in wide range" Traitement du Signal, vol 3, n° 2, pp 91-96