Statistique et analyse des données

NADJI RAHMANIA

Remarques sur l'estimateur à noyau de la régression dans le cas α-mélangeant

Statistique et analyse des données, tome 13, n° 3 (1988), p. 65-75
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1988__13_3_65_0>

Statistique et Analyse des Données
1988 - Vol. 13 n° 3 p. 65-75

REMARQUES SUR L'ESTIMATEUR A NOYAU DE LA REGRESSION DANS LE CAS α-MELANGEANT.

Nadji RAHMANIA

Laboratoire de Statistique et Probabilités
Université des Sciences et Techniques
de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Bâtiment M2
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX

Résumé : *Soit* (X_i,Y_i) $i = 1,2,\ldots$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ *; on suppose l'existence d'une fonction* r *définie sur* $\mathbb{R}^p$ *, vérifiant* $\forall i \in \mathbb{N}$: $E(Y_i/X_i) = r(X_i)$.

On estime cette fonction r *à l'aide de l'estimateur à noyau* r_n *lorsque le processus* (X_i,Y_i) , $i \in \mathbb{N}$, *est* α*-mélangeant et non nécessairement stationnaire.*

On établit des propriétés de convergence de r_n *vers* r .

Abstract : *Let* (X_i,Y_i) $i = 1,2,\ldots$ *a process valued in* $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ *; we suppose the existence of a function* r *defined on* $\mathbb{R}^p$ *such that,* $\forall i \in \mathbb{N}$: $E(Y_i/X_i) = r(X_i)$.

We estimate the function r *with the kernel estimate when the process* (X_i,Y_i) , $i \in \mathbb{N}$ *is strongly mixing.*

We obtain asymptotic properties of the functional estimate r_n.

Mots clés : *Estimation non-paramétrique - Régression - Processus* α*-mélangeant.*

Indices de classification STMA : *04-080 - 07-120 - 11-000* .

Manuscrit reçu le 18 avril 1988
Révisé le21 novembre 1988

I - INTRODUCTION

Soit $U_i = (X_i,Y_i)$, $i = 1,2,\ldots$ un processus α-mélangeant (non nécessairement stationnaire) dont l'espace de base est (Ω,A,P) et l'espace d'états $(\mathbb{E} \times \mathbb{R})$ où $\mathbb{E}$ est un borélien non vide de $\mathbb{R}^p$, $p < \infty$.

On suppose l'existence d'une fonction r définie sur $\mathbb{E}$ telle que :

$$E(Y_i/X_i) = r(X_i) \quad , \quad \forall i \in \mathbb{N} \ .$$

En tout point x de $\mathbb{E}$, $r(x)$ est estimée par $r_n(x)$ défini par :

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ K((x-X_i)/h_n) \ / \ \sum_{i=1}^{n} K((x-X_i)/h_n) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $(h_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite réelle strictement positive de limite nulle et K est un noyau de $\mathbb{R}^p$, c'est-à-dire, une fonction de $\mathbb{R}^p$ satisfaisant :

$$|K(.)| \leq \tilde{K} < \infty \ , \quad \int |K(z)| \, dz = \bar{K} < \infty \ ,$$

$$z^p \, K(z) \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int K(z) \, dz > 0 \quad .$$

Cet estimateur non-paramétrique introduit par Nadaraya-Watson ([6], [10]) a été étudié par de nombreux auteurs dans le cas où les couples aléatoires sont indépendants et équidistribués. Nous renvoyons à Collomb [3] pour une revue bibliographique.

Il est clair que dans de nombreux problèmes de statistique appliquée, ces hypothèses d'indépendance et d'équidistribution ne sont pas vérifiées, alors que peuvent être plus acceptables des hypothèses d'indépendance asymptotique et de distributions non identiques mais possédant la même fonction de régression. Nous mentionnons à ce sujet les articles de Collomb [4], Collomb et Härdle [5], Rahmania [9], Sarda et Vieu [10] qui utilisent la φ-mélangeance et l'article de Peligrad [8] qui introduit la ρ-mélangeance.

L'hypothèse d'α-mélangeance, moins restrictive que la φ-mélangeance et la ρ-mélangeance, est plus réaliste dans le contexte des processus tels que certains ARMA par exemple, et permet d'avoir un champ d'application plus vaste, en particulier dans les problèmes de prédiction.

Nous établissons ici la convergence uniforme presque complète de r_n vers r en imposant des conditions aux suites h_n et $\alpha(n)$.

II - CONVERGENCE DE L'ESTIMATEUR

On désigne par G un compact de $\mathbb{E}$ et on suppose que :

(H1) $\exists \gamma > 0$, $P(X_i \in B) \geq \gamma\, \mu(B)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall B \in \mathcal{B}_{\hat{G}}$

où $\hat{G}$ est un ε-voisinage de G dans $\mathbb{E}$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^p$.

En outre, les v.a. X_i et Y_i , $i = 1,2,\dots$ sont assujetties aux hypothèses :

(H2) $\exists \Gamma < \infty$, $P(X_i \in B) \leq \Gamma\, \mu(B)$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{E}}$.

i.e. la loi P_{X_i} de X_i est uniformément (pour tout i de $\mathbb{N}$) absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{E}$.

(H3) $\exists M < \infty$, $|Y_i| \leq M$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Enfin, on désigne par $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que le processus $\{U_i = (X_i, Y_i)\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$ vérifie :

(H4) pour tous entiers n et k positifs

$$\sup_{\substack{A \in M_1^k \\ B \in M_{n+k}^{\infty}}} |P(A \cap B) - P(A)\, P(B)| \leqslant \alpha(n)$$

où M_1^k (resp. $M_{n+k}^{+\infty}$) est la tribu engendrée par la suite U_i , $i = 1,\dots,k$ (resp. $U_i = i = n+k$, $n+k+1$,...). Le processus $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est dit α-mélangeant si

(H5) $$\alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ .$$

Comme le fait remarquer [1], page 167, il n'y a pas de restriction de généralité à supposer $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ décroissante.

<u>Théorème 1</u>.- Si la suite $(h_n)_{\mathbb{N}}$ vérifie conjointement avec $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ l'hypothèse :

(H6)
- (H6.1) $\quad n\, h_n^p \,/\, k_n \operatorname{Log} n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
  où $(k_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite entière croissante vérifiant
- (H6.2) $\quad \exists A < \infty \ , \ n[\alpha(k_n)]^{2k_n/3n} / k_n \operatorname{Log} n \leqslant A \, , 1 \leqslant k_n \leqslant n \ , \ \forall n \in \mathbb{N},$

alors on a : $$r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{p.co.} r(x)$$

dès que x fixé dans G est un point de continuité pour r.

<u>Théorème 2</u>. Si le noyau K est lipschitzien et si les hypothèses (H6.1) et (H6.2) sont satisfaites, alors on a :

$$\sup_{x\in G} |r_n(x) - r(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.co.} 0$$

dès que r est continue sur un ε-voisinage de G dans $\mathbb{E}$.

Démonstration : L'estimateur $r_n(x)$ peut s'écrire :

$$r_n(x) = R_{1,n}(x) \;/\; R_{o,n}(x)$$

où pour $j = 0,1$:

$$R_{j,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i^j \, K_n(x-X_i) \;, \quad \text{avec} \quad K_n(u) = h^{-p}\, K(\tfrac{u}{h}) \;, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p$$

on a alors :
$$r_n(x) - r(x) = \big[(R_{1,n}(x) - E\,R_{1,n}(x)) - r(x)\,(R_{o,n}(x) - E\,R_{o,n}(x)) + (E\,R_{1,n}(x) - r(x)\,E\,R_{o,n}(x))\big] \;/\; R_{o,n}(x) \;.$$

et en tenant compte de l'hypothèse (H3), on obtient :

$$\sup_{x\in G_o} |r_n(x)-r(x)| \leq \Big[\sup_{x\in G_o} |R_{1,n}(x)-E\,R_{1,n}(x)| + M \sup_{x\in G_o} |R_{o,n}(x)-E\,R_{o,n}(x)| + \sup_{x\in G_o} |E\,R_{1,n}(x)-r(x)\,E\,R_{o,n}(x)|\Big] / \inf_{x\in G_o} R_{o,n}(x)$$

(avec $G_o = \{x\}$ pour le théorème 1 et $G_o = G$ pour le théorème 2).

Pour obtenir les 2 résultats énoncés, il suffit de montrer

- la convergence presque complète vers 0 de
  $\sup_{x\in G_o} |R_{j,n}(x) - E\,R_{j,n}(x)|$, $j = 0,1$ (Lemmes 1 et 2) ,
- la convergence vers 0 du terme non aléatoire :
  $\sup_{x\in G_o} |E\,R_{1,n}(x) - r(x)\,E\,R_{o,n}(x)|$ (Lemme 3)
- la minoration asymptotiquement presque complète de $\inf_{x\in G_o} R_{o,n}(x)$ par un nombre strictement positif (Lemme 4).

Lemme 1. Soit H une partie non vide de $\mathbb{E}$; si $(k_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite entière croissante vérifiant l'hypothèse (H6) on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{x \in H} P(|R_n(x) - E\,R_n(x)| > \varepsilon) \leq a\, e^{-bnh_n^p/k_n} \quad ,$$

pour tout entier naturel n suffisamment grand ; a et b sont des constantes positives indépendantes de n, h_n et k_n.

Démonstration : Nous suivrons Collomb [4] dans la démonstration de ce lemme.

En l'absence d'ambiguité les nombres h_n et k_n seront notés h et k respectivement.

Posons : $$R_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i\, K_n(x-X_i)$$

où $Z_i = Y_i$, $i = 1,\dots,n$ (cas $R_n = R_{1,n}$) ou

$Z_i = 1$, $i = 1,\dots,n$ (cas $R_n = R_{0,n}$)

donc , $|Z_i| \leq \tilde{M} < \infty$ $(\tilde{M} = \sup(M,1))$

pour tout x fixé dans H on a :

$$R_n(x) - E\,R_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

avec : $\Delta_i = \frac{1}{n} (Z_i\, K_n(x-X_i) - E\, Z_i\, K_n(x-X_i))$, $i = 1,\dots,n$.

Cette v.a.r. vérifie :

- $E\,\Delta_i = 0$
- $|\Delta_i| \leq d$
- $E\,\Delta_i^2 \leq D$

avec $d = 2n^{-1}\, h^{-p}\, \tilde{M}\, \tilde{K}$ et $D = h^{-p}\, n^{-2}\, \tilde{M}^2\, \tilde{K}\, \bar{K}\, \Gamma$.

On pose : $\beta = (8e\,\tilde{M}\,\tilde{K})^{-1}$.

En appliquant l'inégalité de Bernstein pour les processus α-mélangeants et non nécessairement stationnaires (voir [2]), on obtient :

$$\sup_{x\in H} P(|R_n(x) - E\,R_n(x)| > \varepsilon) \leqslant c_k\, e^{-(nh^p/k)t(\varepsilon,k)} \qquad (*)$$

avec : $$c_k = 2\exp(2\sqrt{e}\ .\ \alpha(k)^{2k/5n}\ .\ \frac{n}{k})$$

$$t(\varepsilon,k) = \beta\Big[\varepsilon - \delta\Big(\frac{B}{k} + C\,\frac{\tilde{\alpha}(k)}{k\,h^p}\Big)\Big]$$

où : $\delta = \frac{3}{4}\tilde{M}$; $B = \bar{K}\,\Gamma$; $C = 32\,\tilde{K}$

$$\tilde{\alpha}(k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha(i) \quad .$$

2 cas sont à envisager pour la suite croissante $(k_n)_{\mathbb{N}}$.

1^er^ cas : " $k_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ " ; les hypothèses (H5) et (H6.1) montrent alors qu'il existe un entier n_o pour lequel on a :

$$k_n^{-1} < \frac{\varepsilon}{4\delta B} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{\alpha}(k)}{k_n\,h^p} < \frac{\varepsilon}{4\delta C} \quad , \quad \forall n > n_o$$

d'où : $$t(\varepsilon,k_n) \geqslant \beta\,\frac{\varepsilon}{2}\ , \quad \forall n \geqslant n_o \quad .$$

Il suffit de choisir $k = k_n$, $\forall n \geqslant n_o$ dans l'inégalité (*) pour obtenir le résultat annoncé, avec

$$b = \beta\,\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad a = 2\exp(2\sqrt{e}\,A) \quad .$$

2^ème^ cas : " $\exists\, n_1\ ,\ k_o \in \mathbb{N}\ ,\ k_n = k_o\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ n \geqslant n_1$ " : l'hypothèse (H6) et l'hypothèse " $\alpha(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ " montrent alors qu'il existe un entier k indépendant de n tel que :

$$k \geqslant k_o \qquad k^{-1} < \frac{\varepsilon}{4\delta B} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{\alpha}(k)}{k\,h^p} < \frac{\varepsilon}{4\delta C} \quad ,$$

d'où : $t(\varepsilon,k) \geq \beta\,\frac{\varepsilon}{2}$.

La décroissance de la suite $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ et la condition (H6.2) permettent d'écrire que :

$$n\,\frac{\alpha(k)^{2k/3n}}{k} \leq n\,\frac{\alpha(k_o)^{2k_o/3n}}{k_o} \leq A\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}\ , \quad n \geq n_1\ .$$

En posant $b = (\beta\,\frac{\varepsilon}{2})\,\frac{k_o}{k}$ et $a = 2 \exp 2\sqrt{e}\,A$.

On obtient l'inégalité annoncée pour tout entier $n \geq n_o$, avec $n_o = \max(k,n_1)$.

Lemme 2. Sous l'hypothèse (H6), on a pour tout x fixé dans G :

$$R_n(x) - E\,R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{p.co.} 0\ .$$

Si de plus K est lipschitzien, on a :

$$\sup_{x\in G} |R_n(x) - E\,R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.co.} 0\ .$$

Démonstration : En appliquant le lemme 1 à $H = \{x\}$ on obtient :

$\forall\varepsilon > 0\ , \sum_{n\geq 1} P(|R_n(x) - E\,R_n(x)| > \varepsilon) \leq \sum_{n\geq 1} a\,e^{-b_n h_n^p/k_n}$ et l'hypothèse (H6.1) entraîne la convergence de la série constituant le 2ème membre de l'inégalité ci-dessus ; d'où le 1er résultat du lemme.

Pour la démonstration de : $\sup_{x\in G} |R_n(x) - E\,R_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{p.co.} 0$ on peut se référer à [4].

Lemme 3. Sous l'hypothèse (H6), on a pour tout x fixe dans G :

$$\exists\delta > 0 : \sum_{n\geq 1} P(R_{o,n}(x) \leq \delta) < \infty$$

et si K est lipschitzien, on a :

$$\exists\delta > 0\ , \sum_{n\geq 1} P(\inf_{x\in G} R_{o,n}(x) \leq \delta) < \infty\ .$$

Lemme 4. Si r est continue en x, on a :

$$|E\, R_{1,n}(x) - r(x)\, E\, R_{o,n}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et si elle est continue sur un ε-voisinage de G, on a :

$$\sup_{x\in G} |E\, R_{1,n}(x) - r(x)\, E\, R_{o,n}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour la démonstration de ces 2 derniers lemmes, on peut se référer à [4].

III - REMARQUES

i) Les résultats obtenus peuvent s'étendre aisément au cas de variables (Y_i), $i \in \mathbb{N}$, non nécessairement bornées ; en effet, si on suppose que ces variables possèdent des moments absolus d'ordre $\beta > 2$ ou des moments exponentiels d'ordre $s > 0$, il suffit d'utiliser une méthode de troncation (voir [5] et [9]) qui consiste à introduire les v.a.r.

$$g_n^-(x) = \frac{1}{n\, h_n^p} \sum_{i=1}^{n} Y_i\, K_n(x-X_i)\ 1_{\{|Y_i|<M_n\}}$$

$$g_n^+(x) = \frac{1}{n\, h_n^p} \sum_{i=1}^{n} Y_i\, K_n(x-X_i)\ 1_{\{|Y_i|>M_n\}}$$

où $(M_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite strictement croissante de nombres réels positifs vérifiant : $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$.

ii) L'hypothèse conjointe (H6) sur les suites $(h_n)_{\mathbb{N}}$ et $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ est vérifiée dès que l'une des trois conditions ci-dessous est satisfaite :

- le processus (X_i, Y_i), $i \in \mathbb{N}$ est géométriquement mélangeant, i.e. : $\exists \rho > 0$, $a > 0$, $\rho < 1$, $a < \infty$: $\alpha(n) \leqslant a\, \rho^n\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to\infty} n\, h_n^p / n^\delta\, \mathrm{Log}\, n = \infty$ $(1/2 < \delta < 1)$.

- $\exists a > 0$, $s > 0$, $a < \infty$,

$\alpha(n) \leqslant a\, n^{-s}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n\, h_n^p / n(\mathrm{Log}\, n)^{1-\delta} = \infty$

$(0 < \delta < 1)$.

- $\exists a > 0$, $\rho > 0$, $a < \infty$, $\rho < 1$:

$\alpha(n) \leqslant a\, \rho^{e^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n\, h_n^p / n^\delta\, \mathrm{Log}\, n = \infty$

$(0 < \delta < 1)$.

iii) Lorsque le processus (X_i , Y_i) , $i \in \mathbb{N}$ est ϕ-mélangeant l'hypothèse conjointe (H6.2) sur $(k_n)_{\mathbb{N}}$ et $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ devient : $\exists A < \infty$, $n\, \alpha(k_n) / K_n\, \mathrm{Log}\, n \leqslant A$; celle-ci est naturellement moins restrictive.

iv) Les résultats de [8] relatifs à la convergence du régressogramme peuvent s'étendre au cas d'un processus (X_i , Y_i) , $i \in \mathbb{N}$, α-mélangeant, l'hypothèse conjointe sur $(k_n)_{\mathbb{N}}$ et $(\alpha(n))_{\mathbb{N}}$ étant

$\exists A < \infty$, $n[\alpha(k_n)]^{2k_n/3n} / k_n\, \mathrm{Log}\, n \leqslant A$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BILLINGSLEY, P. - Convergence of probability measures. Wiley, New-York (1968).

[2] CARBON, M. - Inégalité de Bernstein pour les processus fortement mélangeants, non nécessairement stationnaires. Applications. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 297, Série I, 303-306 (1983).

[3] COLLOMB, G. - Estimation non-paramétrique de la régression : revue bibliographique. Int. Stat. Rev., 49, 75-93 (1981).

[4] COLLOMB, G. - Propriétés de convergence presque complète du prédicteur à noyau. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 66, 441-460 (1984).

[5] COLLOMB, G. et HÄRDLE, W. - Strong uniform convergence rates in robust nonparametric time series analysis and prediction : kernel regression estimation from dependent observations. Stochastic Processes and their Applications, 23, 77-89 (1986).

[6] MACK, Y.P. and SILVERMAN, B.W. - Weak and strong uniform consistency of kernel regression estimates. Z. Wahr. verw. Geb., 61, 405-415 (1980).

[7] NADARAYA, E.A. - Remarks on nonparametric estimates for density functions and regression curves. theor. Probability Appli. 15, 134-137 (1970).

[8] PELIGRAD, M. - Properties of uniform consistency of the kernel estimators of density and of regression functions under dependence assumptions. Preprint.

[9] RAHMANIA, N. - Convergence uniforme presque complète du régressogramme pour des observations dépendantes et non nécessairement équi-distribuées. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 306, Série I, p. 203-205 (1988).

[10] SARDA, P. et VIEU, P. - Vitesse de convergence uniforme de l'estimateur à noyau de la régression pour des observations dépendantes. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 302, Série 1, n° 11, p. 423-426 (1986).

[11] WATSON, G.S. - Smooth regression analysis. Sankhya, 26, ser. A, 359-372 (1964).