

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

BRUNO MASSÉ

Convolution et concentration

Statistique et analyse des données, tome 12, n° 1-2 (1987), p. 100-123

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1987__12_1-2_100_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONVOLUTION ET CONCENTRATION

par

Bruno MASSÉ¹

Laboratoire de Probabilités et Statistique
Université des Sciences et Techniques de
Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX .

Résumé :

Dans le but d'illustrer la dispersion des puissances successives de convolution d'une probabilité P sur \mathbb{R}^2 , nous considérons deux généralisations de la fonction de concentration de P. Lévy relative aux intervalles de \mathbb{R} ; l'une, notée Q , est définie à partir des boules de \mathbb{R}^2 et l'autre, notée \bar{Q} , à partir des convexes.

Nous montrons la décroissance vers 0 des suites $(Q(P^{*n}, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\bar{Q}(P^{*n}, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$, où t est un réel positif quelconque, respectivement en $1/n$ et $1/\sqrt{n}$.

Enfin nous prouvons que, si P admet une matrice de covariance, quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$, les suites $(Q(P^{*n}, n^\alpha t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $\alpha \in]0, 1/2[$ et $(\bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour $\alpha \in]0, 1[$ convergent vers 0.

Abstract : With intent to illustrate the dispersion of the successive powers of convolution of a probability measure on \mathbb{R}^2 , we consider two generalizations of the P. Levy's concentration function referring to the real intervals; one of them, noted Q , is defined through the spheres and the other, noted \bar{Q} , through the convex sets.

We show that the sequences $(Q(P^{*n}, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ and $(\bar{Q}(P^{*n}, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$, for each $t \in \mathbb{R}^+$, are decreasing to zero respectively in $1/n$ et $1/\sqrt{n}$.

Then we prove that, if P has a covariance matrix, for all $t \in \mathbb{R}^+$, the sequences $(Q(P^{*n}, n^\alpha t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ for $\alpha \in]0, 1/2[$ and $(\bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ for $\alpha \in]0, 1[$ converge to 0.

Mots clés : Lois de probabilité - Convolution - Fonctions de concentration - Vitesse de convergence

Indices de classification STMA : Principale : 01160 - Secondaire : 01110
Manuscrit reçu le 18.7.86 révisé le 25.11.87

0 - INTRODUCTION.-

Paul Lévy ([1]) a défini la fonction de concentration q d'une variable aléatoire réelle X par : pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$q(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P_X([x, x+t])$$

où P_X désigne la loi de X .

Il a utilisé cette notion pour illustrer la dispersion de la puissance n ème de convolution d'une probabilité P sur \mathbb{R} et a établi que la suite $(q_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$, où q_n désigne la fonction de concentration de P^{*n} , décroît vers 0 en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$.

L'objet de cet article est de comparer les manières dont évolue cette propriété selon le choix que l'on fait parmi les nombreuses généralisations possibles de q . Dans ce but nous placerons dans \mathbb{R}^2 , ce qui permet de répondre au problème posé en évitant aux démonstrations d'avoir une trop grande technicité. Considérant que les intervalles de \mathbb{R} de longueur t sont à la fois des boules de rayon $\frac{t}{2}$ et des convexes de mesure de Lebesgue t nous définirons la fonction de concentration d'une probabilité sur \mathbb{R}^2 , dans un premier temps, à partir des boules fermées et, dans un deuxième temps, à partir des convexes fermés de \mathbb{R}^2 .

P. Roger, ([4]), a dégagé les propriétés générales de la première de ces deux généralisations, notée Q , et l'auteur, [5], a dégagé celles de la deuxième, notée \bar{Q} , a proposé des méthodes d'estimation de Q et \bar{Q} et utilisé \bar{Q} pour définir et estimer l' ϵ -support d'une probabilité sur \mathbb{R}^2 .

Nous allons, dans cet article, établir la décroissance vers 0 en $\frac{1}{n}$ de $(Q(P^{*n}, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de $(\bar{Q}(P^{*n}, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour toute valeur de t et montrer que, si P admet une matrice de covariance inversible

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P^{*n}, n^\alpha t) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, \frac{1}{2}[$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, 1[.$$

Une partie des démonstrations de II.1. et de II.5. s'inspire de techniques utilisées par P. Lévy.

I - RAPPEL DES RESULTATS OBTENUS PAR P. LEVY POUR LES PROBABILITES SUR \mathbb{R}
{[1], p. 63}.-

Soit P une probabilité non dégénérée sur \mathbb{R} et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi P . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n la loi de $X_1 + \dots + X_n$.

Soit $\eta > 0$ tel que la loi de $X_1 - X_2$ conditionnée par $\{|X_1 - X_2| > \eta\}$, notée P'' , ne soit pas dégénérée.

Soit $t_0 = \frac{2\pi}{3\eta}$.

Alors, quelque soit $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$,

$$q_n(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} P_n([x, x + t]) \leq \frac{6 \text{Max}(t, t_0)}{K} \times \frac{1}{\sqrt{n}},$$

où, si $\sigma(P'')$ désigne l'écart type de P'' ,

$$K = \sqrt{2\pi P'([-n, n]) \sigma^2(P'')} .$$

Dans la suite de cet article, nous garderons les mêmes notations, mais P désignera une probabilité sur \mathbb{R}^2 .

II - CONCENTRATION SUR LES BOULES FERMEES ET CONVOLUTION.

Soit Q l'application, appelée fonction de concentration sur les boules fermées de \mathbb{R}^2 , définie par :

$$Q : M_b \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mu, t) \longrightarrow Q(\mu, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \mu(B(x, t)) ,$$

où M_b désigne l'ensemble des mesures bornées sur \mathbb{R}^2 et, quelque soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, $B(x, t)$ désigne la boule euclidienne de centre x et de rayon t .

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(Q(P_n, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens large car, quelque soit $n > 1$,

$$Q(P_n, t) \leq \min(Q(P_{n-1}, t), Q(P, t)) \quad ([2], \text{ p. 165}) .$$

Si P est une mesure de Dirac, $Q(P_n, t) = 1$ quelque soit $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$.

Dans ce qui suit nous supposons que P n'est pas une mesure de Dirac, $\| \cdot \|_1$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 , $\| \cdot \|_2$ la "norme du sup" sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire, si $\tau = (x, y)$, $\| \tau \|_2 = \text{Max}(|x|, |y|)$, et ψ la fonction caractéristique de P .

11.1. - Proposition. -

Quelque soit $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^{+*}$,

$$Q(P_n, t) \leq \frac{72 t^2}{\pi^2} \int_{\|\tau\|_2 \leq \frac{\pi}{6t}} |\varphi(\tau)|^n d\tau.$$

Démonstration :

Soit $\eta \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\hat{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \tau = (x, y) \longrightarrow \hat{g}(\tau) &= \left(1 - \frac{|x|}{\eta}\right) \left(1 - \frac{|y|}{\eta}\right) \quad \text{si } \|\tau\|_2 \leq \eta \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

\hat{g} est la fonction caractéristique d'une probabilité p sur \mathbb{R}^2 car, d'après le théorème de Polya, $\hat{g}(\cdot, 0)$ et $\hat{g}(0, \cdot)$ sont les fonctions caractéristiques de deux probabilités sur \mathbb{R} .

De plus, $|\hat{g}|$ étant intégrable, p est à densité g définie par, quelque soit $\xi \in \mathbb{R}^2$,

$$g(\xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\{(x, y) / |x| \leq \eta \text{ et } |y| \leq \eta\}} \cos(\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \xi \rangle) \left(1 - \frac{|x|}{\eta}\right) \left(1 - \frac{|y|}{\eta}\right) dx dy$$

Or, si $\|\xi\|_2 \leq \frac{\pi}{6\eta}$ et $\|\tau\|_2 \leq \eta$, alors $|\langle \tau, \xi \rangle| \leq 2 \|\tau\|_2 \|\xi\|_2 \leq \frac{\pi}{3}$.

Donc, grâce au théorème de Fubini, si $\|\xi\|_2 \leq \frac{\pi}{6\eta}$,

$$g(\xi) \geq \frac{1}{4\pi^2} \times \frac{1}{2} \times \int_{|x| \leq \eta} \left(1 - \frac{|x|}{\eta}\right) dx \times \int_{|y| \leq \eta} \left(1 - \frac{|y|}{\eta}\right) dy = \frac{\eta^2}{8\pi^2}.$$

Donc, quelque soit $a \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
 P_n(B(a, \frac{\pi}{6\eta})) &\leq \frac{8\pi^2}{\eta^2} \int_{\mathbb{R}^2} g(a-z) P_n(dz) \\
 &\leq \frac{8\pi^2}{\eta^2} \times \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\exp(-i\langle \tau, a \rangle) \widehat{g}(\tau) \psi^n(\tau)| d\tau \\
 &\leq \frac{2}{\eta^2} \int_{\|\tau\|_2 \leq \eta} |\psi(\tau)|^n d\tau,
 \end{aligned}$$

car, puisque $|\widehat{g} \times \psi^n| \leq |\widehat{g}|, |\widehat{g} \times \psi^n|$ est intégrable.

Il ne reste plus qu'à poser $t = \frac{\pi}{6\eta}$ pour obtenir le résultat annoncé.

Cette proposition nous incite à étudier l'ensemble $I = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / |\psi(\tau)| = 1\}$.

II.2. - Lenne.-

Si I est de cardinal infini et possède un point d'accumulation, alors P est portée par une droite D et I est un ensemble \mathcal{D} , au plus dénombrable, de droites orthogonales à D telles que l'ensemble $\{\Delta \cap D / \Delta \in \mathcal{D}\}$ ne possède pas de point d'accumulation.

Démonstration : Supposons que I soit de cardinal infini et possède au moins un point d'accumulation τ_0 .

1) $|\psi|$ étant continue, I est fermé et, par conséquent, $\tau_0 \in I$.
 Il existe donc $A_0 \subset \mathbb{R}^2$ et $a_0 \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(A_0) = 1$$

et, quelque soit $x \in A_0$,

$$\langle x, \tau_0 \rangle = a_0 \quad (2\pi).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons τ_n un élément de I vérifiant $0 < \|\tau_0 - \tau_n\|_1 < \frac{1}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $A_n \subset \mathbb{R}^2$ et $a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(A_n) = 1$$

et, quelque soit $x \in A_n$,

$$\langle x, \tau_n \rangle = a_n \quad (2\pi).$$

Soit $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$. Alors $P(A) = 1$ et, puisque P n'est pas une mesure de Dirac, A n'est pas un singleton.

Soit x_0 et x_1 deux éléments distincts de A et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\|x_1 - x_0\|_1 \leq 2m\pi.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\langle x_1 - x_0, \tau_n - \tau_0 \rangle = 0 \quad (2\pi)$$

et, pour tout $n \geq m$,

$$|\langle x_1 - x_0, \tau_n - \tau_0 \rangle| \leq \|x_1 - x_0\|_1 \times \|\tau_n - \tau_0\|_1 < 2\pi.$$

Donc, pour tout $n \geq m$,

$$\langle x_1 - x_0, \tau_n - \tau_0 \rangle = 0.$$

Soit $x \in A$ distinct de x_0 et $m' \geq m$ tel que

$$\|x - x_0\|_1 \leq 2m'\pi.$$

Alors $\langle x - x_0, \tau_m, \tau_0 \rangle = 0$.

Donc x est sur la droite D passant par x_0 et x_1 car $m' \geq m$. Donc $A \subset D$ et, finalement,

$$P(D) = 1.$$

2) a) Si l'équation de D est $y = ax + b$, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ telle que $Z = (X, aX + b)$ soit de loi P .

Soit $\tau = (s_1, s_2)$ un élément de I . Alors, puisque

$$\varphi(\tau) = E(e^{i\langle Z, \tau \rangle}) = e^{ibs_2} E(e^{iX(s_1 + as_2)}) , |E(e^{iX(s_1 + as_2)})| = 1. \quad (1)$$

Et toute la droite d'équation $ay = -x + (s_1 + as_2)$ est incluse dans I . De même, quelque soit $\tau' = (s'_1, s'_2) \in I$, toute la droite d'équation $ay = -x + (s'_1 + as'_2)$ est incluse dans I et

$$|E(e^{iX(s'_1 + as'_2)})| = 1. \quad (2)$$

Or (1) et (2) prouvent que les rapports $s_1 + as_2 / s'_1 + as'_2$ prennent un nombre de valeurs au plus dénombrable.

Donc I est bien constitué d'un ensemble \mathcal{D} , au plus dénombrable, de droites perpendiculaires à D .

b) Si l'équation de D est $x = a$, on remplace Z par Y telle que $Z = (a, Y)$ soit de loi P et on montre que, si $\tau = (s_1, s_2) \in I$,

toute la droite d'équation $y = s_2$ est incluse dans I .

3) Si l'ensemble $\{\Delta \cap D / \Delta \in \mathcal{D}\}$ possédait un point d'accumulation τ'_0 , on pourrait construire une suite $(\tau'_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \subset I$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tau'_n \in D$ et

$$0 < \|\tau'_n - \tau'_0\|_1 < \frac{1}{n}.$$

Et les arguments utilisés dans la première partie de cette démonstration prouveraient que, si D_1 désigne la droite perpendiculaire à D passant par τ'_0 ,

$$P(D_1) = 1.$$

Ce qui est impossible puisque $P(D) = 1$ et P n'est pas une mesure de Dirac.

11.3. - Corollaire. -

$$\lambda^2(I) = 0.$$

Démonstration : Si toute partie bornée de \mathbb{R}^2 ne contient qu'un nombre fini de points de I , I est au plus dénombrable et $\lambda^2(I) = 0$.

Sinon, I possède au moins un point d'accumulation et le lemme II.2. indique que I est un ensemble au plus dénombrable de droites. Donc $\lambda^2(I) = 0$.

On en déduit aisément la proposition suivante.

II.4. - Proposition.-

Quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n, t) = 0 .$$

Démonstration : Soit $(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^{**} \times \mathbb{R}^{**}$.

Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, posons

$$I_\alpha = \{ \tau \in \mathbb{R}^2 / \|\tau\|_2 \leq \frac{\pi}{6t} \text{ et } |\psi(\tau)| \geq 1-\alpha \} .$$

Alors $I_0 = \bigcap_{\alpha \in]0, 1[} I_\alpha$ et $\lambda^2(I_1) = \frac{\pi^2}{36t^2} < +\infty$.

Donc, d'après le corollaire II.3. ,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^2(I_\alpha) = \lambda^2(I_0) = 0 .$$

Soit $\eta \in]0, 1[$ tel que

$$\lambda^2(I_\eta) \leq \frac{\pi^2}{72t^2} \frac{\epsilon}{2} .$$

Alors, d'après la proposition II.1. , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} Q(P_n, t) &\leq \frac{72t^2}{\pi^2} \int_{\|\tau\|_2 \leq \frac{\pi}{6t}} |\psi(\tau)|^n d\tau \\ &\leq \frac{72t^2}{\pi^2} \left[\int_{\|\tau\|_2 \leq \frac{\pi}{6t}} (1-\eta)^n d\tau + \int_{I_\eta} d\tau \right] \\ &\leq 8(1-\eta)^n + \epsilon/2 . \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure car ϵ est arbitraire.

Nous allons maintenant établir la décroissance en $\frac{1}{n}$ vers 0 de $(Q(P_n, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans le cas où P n'est pas portée par une droite.

Dans le cas contraire, on se ramène aisément aux fonctions de concentration sur \mathbb{R} et, d'après le paragraphe I, la décroissance est alors en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

II.5. - Lemme.-

Si P n'est pas portée par une droite, il existe $(t_0, \beta) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$ tel que, si $\|\tau\|_1 \leq t_0$,

$$|\psi(\tau)| \leq e^{-\beta \|\tau\|_1^2}.$$

Démonstration : Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1] \subset \mathbb{C}$ la fonction

$$\tau \longrightarrow |\psi(\tau)|^2$$

caractéristique de la loi P' de $X_1 - X_2$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}^{++}$, si $\|\tau\|_1 \leq t$,

$$1 - \psi(\tau) = \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \cos \langle \tau, x \rangle) P'(dx)$$

$$\geq \frac{1}{8} \int_{\|x\|_1 \leq \frac{\pi}{2t}} \langle \tau, x \rangle^2 P'(dx) \tag{1}$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}^{++}$ tel que la restriction de P' à $A_{t_0} = \{x / \|x\|_1 \leq \frac{\pi}{2t_0}\}$ ne soit pas dégénérée et tel que $P'(A_{t_0}) > 0$.

Soit P'' la loi de $X_1 - X_2$ conditionnée par $\{X_1 - X_2 \in A_{t_0}\}$.

Soit τ tel que $\|\tau\|_1 \leq t_0$, C le cercle unité et

$$y = \frac{\tau}{\|\tau\|_1} \in C.$$

Alors, d'après (1),

$$\begin{aligned}
 1 - \Psi(\tau) &\geq \frac{1}{8} \int_{A_{t_0}} \langle \tau, x \rangle^2 P'(dx) = \frac{\|\tau\|_1^2 P'(A_{t_0})}{8} \int_{\mathbb{R}^2} \langle y, x \rangle^2 P''(dx) \\
 &= \frac{\|\tau\|_1^2 P'(A_{t_0})}{8} y' \Gamma y \quad (2)
 \end{aligned}$$

où Γ désigne la matrice de covariance de P' et y' la transposée de y .

Mais, puisque P'' n'est pas portée par une droite, quelque soit $y \in C$,

$$y' \Gamma y > 0 .$$

Et, puisque $y' \Gamma y$ est une fonction continue de y sur le compact C , il existe $\alpha > 0$ tel que, quelque soit $y \in C$,

$$y' \Gamma y \geq \alpha > 0 .$$

Ce qui, avec (2), entraîne, si $\|\tau\|_1 \leq t_0$,

$$1 - \Psi(\tau) \geq \frac{\|\tau\|_1^2 P'(A_{t_0})}{8} \alpha > 0 .$$

D'où, si $\|\tau\|_1 \leq t_0$,

$$|\psi(\tau)| \leq \exp\left(-\frac{\alpha P'(A_{t_0})}{16} \|\tau\|_1^2\right) .$$

Il ne reste plus qu'à poser $\beta = \frac{\alpha P'(A_{t_0})}{16}$.

II.6. - Proposition. -

Si P n'est pas portée par une droite, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leq \frac{K}{n}.$$

Démonstration : D'après le lemme précédent, il existe

$(t_0, \beta) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ tel que, si $\|\tau\|_1 \leq t_0$,

$$|\varphi(\tau)| \leq e^{-\beta \|\tau\|_1}.$$

Alors, grâce à la proposition II.1., si $t \leq \frac{\pi}{6t_0}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} Q(P_n, t) &\leq Q(P_n, \frac{\pi}{6t_0}) \leq \frac{2}{t_0^2} \int_{\|\tau\|_2 \leq t_0} e^{-n\beta \|\tau\|_1^2} d\tau \\ &\leq \frac{2}{t_0^2} \times 2\pi \int_0^{+\infty} \rho e^{-n\beta \rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{t_0^2 \beta} \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Et, si $t > \frac{\pi}{6t_0}$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} Q(P_n, t) &\leq \frac{72 t^2}{\pi^2} \int_{\|\tau\|_2 \leq \frac{\pi}{6t}} e^{-n\beta \|\tau\|_1^2} d\tau \\ &\leq \frac{72 t^2}{\pi \beta} \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Le lemme II.5. permet également d'obtenir une majoration plus fine pour de petites valeurs de t . C'est l'objet de la proposition suivante où on reprend les conditions et les notations de la démonstration précédente.

II.7. - Proposition.-

Si $t \leq t_0$, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) \leq \frac{e^{t^2/2}}{28n}.$$

Démonstration : Soit $t \leq t_0$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^2$.

Soit g la densité et \hat{g} la fonction caractéristique de la loi normale centrée de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si $\|y\|_1 \leq t$,

$$g(y) \geq \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/2};$$

et, puisque $|\hat{g}|$ est intégrable, $|\hat{g} \psi^n|$ l'est aussi.

$$\begin{aligned} \text{Donc } P_n(B(x, t)) &\leq 2\pi e^{t^2/2} \int_{\|x-z\|_1 \leq t} g(x-z) P_n(dz) \\ &\leq 2\pi e^{t^2/2} \times \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\langle \tau, x \rangle} \hat{g}(\tau) \psi^n(\tau) d\tau \\ &\leq \frac{e^{t^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\tau\|_1^2/2} |\psi(\tau)|^n d\tau \\ &\leq \frac{e^{t^2/2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-(2n\beta+1) \frac{\|\tau\|_1^2}{2}) d\tau \\ &\leq \frac{e^{t^2/2}}{28n}. \end{aligned}$$

111 - CONCENTRATION SUR LES CONVEXES FERMES ET CONVOLUTION.

Soit \bar{Q} l'application, appelée fonction de concentration sur les convexes fermés de \mathbb{R}^2 , définie par :

$$\begin{aligned} \bar{Q} : M_b \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\mu, t) &\longrightarrow \bar{Q}(\mu, t) = \sup_{C \in C_t} \mu(C) \end{aligned}$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, C_t désigne l'ensemble des convexes fermés de \mathbb{R}^2 de mesure de Lebesgue t .

Si P est portée par une droite, il en est de même de P_n , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$,

$$\bar{Q}(P_n, t) = 1.$$

Dans ce qui suit nous supposons que P n'est pas portée par une droite.

Quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(\bar{Q}(P_n, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante au sens large car la démonstration figurant dans ([2], p. 165) reste valable si on remplace les boules fermées par des convexes fermés.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, notons β_α l'ensemble des bandes de \mathbb{R}^2 de largeur α .

111.1. - Lemme.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, il existe $K_1 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{B \in \beta_\alpha} P_n(B) \leq \frac{K_1}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration : Reprenons les notations de la démonstration du lemme II.5.

Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, notons P_θ et P''_θ les projections, respectives de P et P'' sur la droite D_θ passant par l'origine de \mathbb{R}^2 et admettant le vecteur de composantes $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur et, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, désignons par α_θ le point $(\alpha \cos \theta, \alpha \sin \theta)$ de \mathbb{R}^2 .

Alors, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\sigma^2(P''_\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \Gamma \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ est la variance de P''_θ .

Or, quelque soit $\theta \in [0, 2\pi]$, $\sigma^2(P''_\theta) > 0$ car, puisque P'' n'est pas portée par une droite, P''_θ n'est pas une mesure de Dirac.

Donc, puisque $[0, \pi]$ est compact et $(\cos ., \sin .) \Gamma \begin{pmatrix} \cos . \\ \sin . \end{pmatrix}$ est une fonction continue de θ ,

$$A = \inf_{\theta \in [0, \pi]} \sigma(P''_\theta) > 0 .$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. D'après le paragraphe I il existe $K'_1 > 0$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sup_{B \in \beta_\alpha} P_n(B) &= \sup_{\theta \in [0, \pi]} \sup_{z \in D_\theta} P_\theta^{*n}([z, z + \alpha_\theta]) \\ &\leq \sup_{\theta \in [0, \pi]} \frac{K'_1}{\sigma(P''_\theta)} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\leq \frac{K'_1}{A} \times \frac{1}{\sqrt{n}} , \end{aligned}$$

où P_θ^{*n} désigne la puissance n ème de convolution de P_θ .

Il ne reste plus qu'à poser $K_1 = \frac{K'_1}{A}$.

III.2. - Proposition. -

Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $K > 0$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\bar{Q}(P_n, t) \leq \frac{K}{\sqrt{n}} .$$

Démonstration : Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons

$$C_t^1 = \{C \in C_t / \text{diam}(C) \geq 1\} .$$

On montre aisément que tout élément de C_t^1 est contenu dans un élément de β_{2t} .

D'après le lemme III.1. et la proposition II.6. il existe $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^{++} \times \mathbb{R}^{++}$ tel que, quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \bar{Q}(P_n, t) &= \text{Max} \left(\sup_{C \in C_t^1} P_n(C) , \sup_{C \in C_t^1} P_n(C) \right) \\ &\leq \text{Max} \left(Q(P_n, 1) , \sup_{B \in \beta_{2t}} P_n(B) \right) \\ &\leq \text{Max} \left(\frac{K_2}{n} , \frac{K_1}{\sqrt{n}} \right) . \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à poser $K = \text{Max}(K_1, K_2)$.

L'objet du dernier paragraphe de cet article est de donner une autre vision de la dispersion de la puissance énième de convolution de P , dans le cas où P admet une matrice de covariance inversible. Il s'agit de déterminer dans quelle mesure on peut augmenter, en fonction de n , la valeur de la variable des applications $Q(P_n, \cdot)$ et $\bar{Q}(P_n, \cdot)$ tout en conservant des suites convergeant vers 0.

IV - CONVOLUTION, CONCENTRATION ET V.A. ADMETTANT UNE MATRICE DE COVARIANCE. -

P désigne maintenant une probabilité sur \mathbb{R}^2 admettant une matrice de covariance inversible.

Nous supposerons, sans perte de généralité, que P est centrée.

IV.1. - Proposition. -

Soit P_0 absolument continue par rapport à λ^2 . Alors les applications Q et \bar{Q} , de $M_b \times \mathbb{R}^+$, muni de la topologie produit de la topologie de la convergence faible sur M_b et de la topologie usuelle sur \mathbb{R}^+ , dans \mathbb{R}^+ , muni de sa topologie usuelle, sont continues en (P_0, t) , quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$.

N.B. - Une étude plus complète de la continuité de Q et \bar{Q} figure dans [5].

Démonstration :

1) Etablissons d'abord la continuité de $Q(P_0, \cdot)$ et de $\bar{Q}(P_0, \cdot)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ et $\lambda^2(B) \leq \eta$ entraînent $P_0(B) \leq \varepsilon$.

a) Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers t_0 .

Soit n_0 tel que, si $n \geq n_0$,

$$|\pi t_n^2 - \pi t_0^2| \leq \eta.$$

Alors, si $n \geq n_0$,

$$|Q(P_o, t_n) - Q(P_o, t_o)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |P_o(B(x, t_n)) - P_o(B(x, t_o))|$$

$$\leq \sup_{\substack{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \\ \lambda^2(B) \leq \eta}} P_o(B) \leq \varepsilon .$$

b) Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que $0 \leq t_2 - t_1 \leq \eta$.

On montre aisément que tout élément de C_{t_2} contient au moins un élément de C_{t_1} . D'où, quelque soit $C \in C_{t_2}$, si on note C' un élément de C_{t_1} contenu dans C ,

$$P_o(C) - \bar{Q}(P_o, t_1) \leq P_o(C) - P_o(C') = P_o(C - C') \leq \varepsilon .$$

Donc $0 \leq \bar{Q}(P_o, t_2) - \bar{Q}(P_o, t_1) = \sup_{C \in C_{t_2}} (P_o(C) - \bar{Q}(P_o, t_1)) \leq \varepsilon$.

2) Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant faiblement vers P_o ; d'après [2], puisque P_o ne charge pas les frontières des éléments de C ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{C \in \mathcal{C}} |P_n(C) - P_o(C)| = 0 .$$

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs convergeant vers t_o .

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_o \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq n_o$,

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} |P_n(C) - P_o(C)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$|Q(P_o, t_n) - Q(P_o, t_o)| \leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Alors, si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |Q(P_n, t_n) - Q(P_0, t_0)| &\leq |Q(P_n, t_n) - Q(P_0, t_n)| + |Q(P_0, t_n) - Q(P_0, t_0)| \\ &\leq \sup_{C \in \mathcal{C}_{t_n}} |P_n(C) - P_0(C)| + |Q(P_0, t_n) - Q(P_0, t_0)| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon . \end{aligned}$$

La continuité de \bar{Q} en (P_0, t_0) se démontre de la même manière. Nous allons utiliser cette proposition pour démontrer le théorème suivant.

P_0 désigne maintenant la loi normale centrée de même matrice de covariance que P .

IV.2. - Théorème. -

Quelque soit $t \in \mathbb{R}^+$,

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n, \sqrt{n} t) = Q(P_0, t)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, nt) = \bar{Q}(P_0, t)$.

2) Pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n, n^\alpha t) = Q(P_0, 0) = 0$

et, pour tout $\alpha \in [0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = \bar{Q}(P_0, 0) = 0$.

3) Si P est une loi normale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) = Q(P, \frac{t}{\sqrt{n}})$$

et

$$\bar{Q}(P_n, t) = \bar{Q}(P, \frac{t}{n}) .$$

Démonstration : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_{Y_n} la loi de $Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$.

D'après le théorème central limite, $(P_{Y_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge faiblement vers P_0 . De plus P_0 est absolument continue par rapport à λ^2 puisque sa matrice de covariance est inversible. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est la loi de $\sqrt{n} Y_n$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

1) Puisque $Q(\cdot, t)$ et $\bar{Q}(\cdot, t)$ sont continues en P_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, \sqrt{n} t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_{Y_n}, t) = Q(P_0, t)$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, nt) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_{Y_n}, t) = \bar{Q}(P_0, t).$$

2) Puisque Q et \bar{Q} sont continues en $(P_0, 0)$,

pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n, n^\alpha t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_{Y_n}, \frac{t}{n^{\alpha-1/2}}) = Q(P_0, 0) = 0$$
 et,

pour tout $\alpha \in [0, 1[$,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_{Y_n}, \frac{t}{n^{\alpha-1}}) = \bar{Q}(P_0, 0) = 0.$$

3) Si P est une loi normale, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n est de loi P . Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Q(P_n, t) = Q(P_{Y_n}, \frac{t}{\sqrt{n}}) = Q(P, \frac{t}{\sqrt{n}})$$

et
$$\bar{Q}(P_n, t) = \bar{Q}(P_{Y_n}, t/n) = \bar{Q}(P, t/n).$$

IV.3. - Remarque. - Nous venons de voir que, si P admet une matrice de covariance, $\sup\{\alpha > 0 / \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = 0\} = 1$. Dans le cas contraire, on peut prévoir que, s'il existe, ce nombre est plus grand. Par exemple supposons maintenant que la fonction caractéristique de P soit

$\psi : (x, y) \mapsto e^{-|x|+|y|}$. Alors P n'admet pas de matrice de covariance puisqu'elle est le produit de deux lois de Cauchy et, si on note ψ_n la fonction caractéristique de $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

$$\psi_n(x, y) = (\psi(\frac{1}{n}(x, y)))^n = (e^{-|x/n|+|y/n|})^n = \psi(x, y) .$$

Donc, pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^+$,

$$\bar{Q}(P_n, n^2 t) = \bar{Q}(P, t) .$$

Et, finalement, quelque soit $\alpha < 2$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = \bar{Q}(P_0, 0) = 0 .$$

V - LE CAS \mathbb{R}^N .-

Les démonstrations des paragraphes précédents s'étendent à \mathbb{R}^N pour donner les propriétés suivantes P désigne une probabilité sur \mathbb{R}^N qui n'est pas une mesure de Dirac. Soit m le plus petit entier naturel tel que P soit portée par un sous-ensemble affine de \mathbb{R}^N de dimension m , alors, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, la suite $(Q(P_n, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît vers 0 en $\frac{1}{n^{m/2}}$ et, si $m = N$, $(\bar{Q}(P_n, t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît vers 0 en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

D'autre part, si P admet une matrice de covariance inversible,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(P_n, n^\alpha t) = 0 \quad , \quad \text{pour tout } \alpha < \frac{1}{2}$$

et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P_n, n^\alpha t) = 0 \quad , \quad \text{pour tout } \alpha < \frac{m}{2} .$$

VI - CONCLUSION. -

Les nombres $\alpha_0 = \sup \{ \alpha \in \mathbb{R}^+ / \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{Q}(P^{*n}, n^\alpha t) = 0 ,$
quelque soit $t \in \mathbb{R}^+ \}$ et $\beta_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\bar{Q}P^{*n}, n^{\alpha_0})$ pourraient servir à
caractériser la dispersion d'une probabilité P n'admettant pas de matrice
de covariance. Il serait donc intéressant de savoir si ces nombres existent
pour tout probabilité P et, si c'est le cas, de mettre au point leur
estimation.

Je tiens à remercier Arlette Lengaigne qui a dactylographié
ce texte avec soin et compétence.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] TORTRAT - Calcul des probabilités et introduction aux processus aléatoires.
Masson 1971.
- [2] PARTHASARATHY - Probability measures on metric spaces.
Academic Press 1967.
- [3] BILLINGSLEY - TOPSOE - Uniformity in weak convergence.
Z. Wahrs. verw. Gebiete 7 p. 1-16 1967.
- [4] ROGER P. - Continuité de la fonction de concentration de P. Lévy.
Pub. IRMA, Lille, Vol. 5, fasc. 1, 1983.
- [5] MASSE B. - Concentration des mesures et problèmes statistiques associés.
Thèse de 3ème cycle 1985. Université de Lille I.