RAYMOND MOCHÉ

Estimation asymptotique dans certains modèles de Geffroy linéaires

Statistique et analyse des données, tome 10, nº 2 (1985), p. 45-62
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1985__10_2_45_0>

Statistiques et Analyse de Données
Septembre 1985 Vol. 10 n° 2 pp. 45-62

ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DANS CERTAINS MODELES DE GEFFROY LINEAIRES

Raymond MOCHÉ

U.E.R. de Mathématiques Pures et Appliquées
Université des Sciences et Techniques de Lille
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (FRANCE)

Résumé : *En utilisant la technique de décantation asymptotique introduite par J. Geffroy, on construit des estimateurs p.s. convergents du paramètre* θ *de la loi* P_θ *du processus* $(X_n)_{n\geq 1}$ *des observations - à valeurs dans* $\mathbb{R}^s$ *- sous l'hypothèse générale que les lois conditionnelles de* X_n *sachant que* $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ $(\forall n \geq 2, \forall x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^s)$ *sont les images d'une loi fixe* P *sur* $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ *par des automorphismes* $A_\theta^{(x_1,\ldots,x_{n-1})}$ *de* $\mathbb{R}^s$

Abstract : *Using Geffroy's asymptotic decantation of distributions procedure, we prove, by constructions, the existence of a.s. converging* θ*-estimators, the distribution* P_θ *of the infinite sequence* $(X_n)_{n\geq 1}$ *of observed* $\mathbb{R}^s$ *- valued random variables being such that all the conditional distributions of* X_n *given* $X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}$ $(n \geq 2 ; x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^s)$ *are images of a fixed borelian distribution* P *on* $\mathbb{R}^s$ *under* $\mathbb{R}^s$*- automorphisms* $A_\theta^{(x_1,\ldots,x_{n-1})}$.

Indice principal de classification STMA : 12-000 .

Mots clés : *Décantation asymptotique uniforme, séparation asymptotique uniforme, p.s. estimabilité, paramètre d'homothétie, observations non i.i.d.*

Manuscrit reçu le 9 juillet 1984
révisé le 26 avril 1985

I - MODELES STATISTIQUES DE GEFFROY.-

1) On suppose que les v.a. observées : X_n , $n \geq 1$ prennent leurs valeurs dans un même espace euclidien $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ et que la loi inconnue de la suite $X = (X_n)_{n\geq 1}$ de toutes ces observations appartient à un ensemble donné $H = (P_\theta, \theta \in \Theta)$ de lois sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})^{+\infty}$. Θ est muni d'une distance δ, et la correspondance $\theta \to P_\theta$ de Θ sur H est bijective.

On sait que $\forall\theta \in \Theta$, la loi P_θ de X est déterminée par

- la loi initiale, c'est-à-dire P_{θ,X_1} de X_1 ,
- les lois conditionnelles de X_n sachant que $X_1 = x_1,\ldots,$

$X_{n-1} = x_{n-1}$ (en abrégé $X^{(n-1)} = x^{(n-1)}$) : $P_{\theta,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}$,
$\forall n \geq 2$, $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$.

2) <u>Définition</u> : Nous dirons qu'il s'agit d'un <u>modèle statistique de Geffroy</u> s'il existe une loi P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ que nous appellerons <u>loi de base</u> du modèle et une famille d'applications boréliennes de $\mathbb{R}^s$ dans $\mathbb{R}^s$:

$$A = (A_\theta^{x^{(n-1)}} , n \geq 2 , x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)} , \theta \in \Theta)$$

telle que : $\forall\theta \in \Theta$, $\forall n \geq 2$ et $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $P_{\theta,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}$ est l'image de P par $A_\theta^{x^{(n-1)}}$.

3) Pour de tels modèles, des suites convergentes d'estimateurs de θ ont été construites :

- d'abord par J. Geffroy (cf [3] , ou [5] chap. II) lorsque A est un ensemble de translations ,
- puis par F. Palmeira de Araujo Canova ([5], chap. III) lorsque A est un ensemble d'homothéties.

4) Ici, nous construisons des suites p.s. convergentes d'estimateurs de θ dans le cas où A est un ensemble d'automorphismes de $\mathbb{R}^s$, ce qui justifie l'appellation de modèle de Geffroy linéaire.

5) Cette étude sera conduite en suivant la méthode de Geffroy (cf [1], [2] ou [3]) que nous résumons dans le théorème suivant :

THEOREME I (J. GEFFROY).

Soit $X = (X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. sur (Ω,A) à valeurs dans dans $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$. (Ω,A) pouvant être muni de 2 mesures de probabilité, on appelle P_{θ_0} et P_{θ_1} les lois de X correspondantes.

On suppose qu'il existe 2 suites de réels $\omega = (\omega_n)_{n\geq 2}$ $\omega' = (\omega'_n)_{n\geq 2}$ et une famille de boréliens de $\mathbb{R}^s$: $B = (B(x^{(n-1)}), n \geq 2 , x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)})$ vérifiant les conditions suivantes :

I - $\forall n \geq 2$, $B_n = \bigcup_{x^{(n-1)}\in\mathbb{R}^{s(n-1)}} (\{x^{(n-1)}\} \times B(x^{(n-1)})) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{s.n}}$

II - $\forall n \geq 2$ et $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$

$$P^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}_{\theta_0,X_n} (B(x^{(n-1)})) < \omega_n \leq \omega'_n < P^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}_{\theta_1,X_n} (B(x^{(n-1)})) .$$

Alors, on peut construire à partir de ω , ω' et B une suite adaptée $(C_n)_{n\geq 1}$ de cylindres de $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})^{+\infty}$ tels que $\forall n \geq 1$:

$$- \ P_{\theta_0,X^{(n)}}(C_n) \leq e^{-1/4 \sum_{j=2}^{n} (\omega'_j - \omega_j)^2}$$

$$- \ P_{\theta_1,X^{(n)}}(C_n) \geq 1 - e^{-1/4 \sum_{j=2}^{n} (\omega'_j - \omega_j)^2}$$ (où $P_{\theta,X^{(n)}}$ désigne la loi de $X^{(n)}$ quand X suit P_θ) .

II - SEPARATION DE DEUX LOIS DANS UN MODELE DE GEFFROY LINEAIRE.-

1) Notations.

a) $\mathbb{R}^s$ étant rapporté à sa base canonique, ses endomorphismes et ses points sont identifiés respectivement à des matrices $(s \times s)$ et $(s \times 1)$. $GL(s)$ désigne son groupe linéaire, soit l'ensemble de ses automorphismes, muni de la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^{s^2}$; I en est l'identité.

b) $\forall N \in GL(s)$, Q_N désigne la forme quadratique sur $\mathbb{R}^s$ définie par $Q_N(x) = {}^t x \, . \, {}^t N \, . \, N \, . \, x$. C'est une forme quadratique non dégénérée positive. Il en résulte que :

- la matrice symétrique diagonalisable ${}^t N \, . \, N$ a toutes ses valeurs propres positives, numérotées pour avoir

$$0 < \lambda_{N,1} \leqslant \lambda_{N,2} \cdots \leqslant \lambda_{N,s}$$

- il existe une matrice orthonormée réelle O_N telle que

$${}^t O_N \, . \, {}^t N \, . \, N \, . \, O_N = \begin{pmatrix} \lambda_{N,1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{N,s} \end{pmatrix}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^s$, $\| \; \|$ désignant la norme euclidienne,

(1) $$\lambda_{N,1} \|x\|^2 \leqslant Q_N(x) \leqslant \lambda_{N,s} \|x\|^2 .$$

c) $\forall N \in GL(s)$, posons

$$\alpha(N) = \underset{1 \leqslant i \leqslant s}{\mathrm{Max}} \left(\sum_{j=1}^{s} \left| \sum_{k=1}^{s} N_{k,i} . N_{k,j} \right| \right) \quad \text{et} \quad \beta(N) = \frac{1}{\alpha({}^t(N^{-1}))} .$$

Comme on sait que $\alpha(N)$ majore les valeurs propres de ${}^tN.N$, on a :

$$0 < \beta(N) \leq \lambda_{N,1} \leq \lambda_{N,s} \leq \alpha(N) .$$

d) $\forall a \geq 0$, $B(a)$ désigne la boule fermée de $\mathbb{R}^s$ de centre 0 et de rayon a, $v(s)$ le volume de $B(1)$. Ainsi, $\forall N \in GL(s)$, l'ellipsoïde $N^{-1}(B(a))$ a pour volume :

$$\lambda^s(N^{-1}(B(a))) = v(s).a^s. \frac{1}{|\det N|} .$$

e) On dira qu'une probabilité P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ vérifie l'hypothèse (P) si elle admet une densité f continue > 0 . On lui associera :

- la fonction décroissante $\psi : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$
$$a \rightsquigarrow \psi(a) = \mathrm{Min}(f(x), x \in B(a))$$
- le nombre $\rho = \sup(v(s).a^s.\psi(a), a \geq 0)$.

Il est facile de voir que :

- $\rho \in]0,1[$
- $\exists\ A > 0$ tel que $\rho = v(s).A^s.\psi(A)$.

f) Etant donnée une probabilité P sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$, $\forall N \in GL(s)$, P_N désignera l'image de P par N et F_N la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$F_N(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ P_N(B(x)) \text{ si } x \geq 0 . \end{cases}$$

F_I sera simplement notée F.

Etant donné $\alpha \in]0,1[$, si P vérifie (P) , $\forall N \in GL(s)$, notons $a(N)$ l'unique solution de l'équation $F_N(x) = \alpha$. Alors l'application $a : GL(s) \to]0,+\infty[$ ainsi définie à partir de P et de α est continue.

2) <u>Lemme</u> : Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}^s, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^s})$ vérifiant (P) et $\mathcal{N}$ une famille d'automorphismes de $\mathbb{R}^s$ pour laquelle il existe 2 réels r et R tels que :

$$\forall N \in \mathcal{N}\ ,\quad 0 < r \leq \lambda_{N,1} \leq \lambda_{N,s} \leq R\ .$$

Soit $\alpha = F(A\sqrt{\frac{r}{R}})$: alors, $\forall N \in \mathcal{N}$ et $\forall M \in GL(s)$, nous avons :

$$Q_M > Q_N \Longrightarrow P_N(B(a(N))) - P_M(B(a(N))) \geq \rho(\frac{r}{\sqrt{R}})^s\ (\frac{1}{|\det N|} - \frac{1}{|\det M|})$$

<u>Démonstration</u> :

a) Soit $a > 0$ et $M,N \in GL(s)$ tels que $Q_M \geq Q_N$: il est clair que $M^{-1}(B(a)) \subset N^{-1}(B(a))$ et que cette inclusion est stricte si et seulement si $Q_M > Q_N$ ($\exists x_0 \in \mathbb{R}^s$ tels que $Q_M(x_0) > Q_N(x_0)$) ou, en prenant les volumes de ces ellipsoïdes, si et seulement si $|\det M| > |\det N|$.

b) Supposons que $Q_M > Q_N$:

$$P_N(B(a)) - P_M(B(a)) = \int_{N^{-1}(B(a))-M^{-1}(B(a))} f(x)\ dx$$

$$\geq \mathrm{Min}(f(x), x \in N^{-1}(B(a))).a^s.v(s)(\frac{1}{|\det N|} - \frac{1}{|\det M|})$$

$$\geq \Phi(\frac{a}{\sqrt{\lambda_{N,1}}}).a^s.v(s).(\frac{1}{|\det N|} - \frac{1}{|\det M|}) > 0\ ,$$

car $\quad N^{-1}(B(a)) \subset B(\frac{a}{\sqrt{\lambda_{N,1}}})$, d'après (1) .

c) D'après la définition de $a(N)$ et d'après (1), nous savons que :

- $P_N(B(a(N))) = \alpha$ (par définition de a)
- $B(\frac{a(N)}{\sqrt{\lambda_{N,s}}}) \subset N^{-1}(B(a(N))) \subset B(\frac{a(N)}{\sqrt{\lambda_{N,1}}})$.

On en déduit que :

- $F(\frac{a(N)}{\sqrt{\lambda_{N,s}}}) \leqslant F(A\sqrt{\frac{r}{R}}) \leqslant F(\frac{a(N)}{\sqrt{\lambda_{N,1}}})$

- $A\frac{r}{\sqrt{R}} \leqslant a(N) \leqslant A\sqrt{r}$ et $\frac{a(N)}{\sqrt{\lambda_{N,1}}} \leqslant A$.

Si $M \in GL(s)$ et si $Q_M > Q_N$, nous avons donc :

$$P_N(B(a(N))) - P_M(B(a(N))) \geqslant \emptyset(A).(A\frac{r}{\sqrt{R}})^s.v(s).(\frac{1}{|\det N|} - \frac{1}{|\det M|}) . \blacksquare$$

3) <u>Séparation de 2 lois dans un modèle de Geffroy linéaire</u>.

a) <u>Notation</u>.

Etant donné un modèle de Geffroy linéaire, nous posons :

$\forall n \geqslant 2$, $\forall \theta$, $\theta' \in \Theta$,

$$h_n(\theta,\theta') = \inf(\left|\frac{1}{|\det A_\theta^{x^{(n-1)}}|} - \frac{1}{|\det A_{\theta'}^{x^{(n-1)}}|}\right| , x^{(n-1)} \in R^{s(n-1)}) .$$

b) <u>THEOREME II</u>.

Etant donné un modèle de Geffroy linéaire dont la loi de base vérifie (P) , soit θ_0 , $\theta_1 \in \Theta$.

On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites :

(a1) $\forall n \geqslant 2$ et pour $i = 0,1$, $x^{(n-1)} \to A_{\theta_i}^{x^{(n-1)}}$ est une application continue.

(a2) $\forall n \geqslant 2$, $\exists r_n$, $R_n > 0$ tels que pour $i = 0,1$ et $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $r_n \leqslant \lambda_{A_{\theta_i}^{x^{(n-1)}},1} \leqslant \lambda_{A_{\theta_i}^{x^{(n-1)}},s} \leqslant R_n$.

(a3) $\forall n \geqslant 2$, on a soit (i) $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $Q_{A_{\theta_0}^{x^{(n-1)}}} \leqslant Q_{A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}}$

soit (ii) $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $Q_{A_{\theta_o}^{x^{(n-1)}}} \geq Q_{A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}}$.

Alors, pour que P_{θ_o} et P_{θ_1} se séparent asymptotiquement, il suffit que $\sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^{2s} h_n^2(\theta_o,\theta_1) = +\infty$.

<u>Démonstration</u> :

a) $\forall n \geq 2$ tel que $h_n(\theta_o,\theta_1) > 0$, si (a 3 ii) est vérifiée, on pose :

- $N_n = \{A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}\}$

- $\alpha_n = F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) = \omega_n'$

- $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $B(x^{(n-1)}) = B(a(A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}))$.

En appliquant le lemme ci-dessus, nous obtenons donc :

- $P_{\theta_1,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) = \omega_n'$

- $P_{\theta_o,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) \leq \omega_n' - (\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s(\frac{1}{|\det(A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}})|} - \frac{1}{|\det(A_{\theta_o}^{x^{(n-1)}})|})$

$$\leq \omega_n' - \rho(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s h_n(\theta_o,\theta_1) = \omega_n .$$

D'après (a1) et la continuité de a , $x^{(n-1)} \to a(A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}})$ est une application continue donc

$$B_n = \bigcup_{x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}} (\{x^{(n-1)}\} \times B(a(A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}))) \text{ est un fermé de } \mathbb{R}^{s.n} .$$

b) $\forall n \geq 2$ tel que $h_n(\theta_o,\theta_1) > 0$ et si (a 3 i) est vérifiée, on pose :

- $N_n = (A_{\theta_o}^{x^{(n-1)}}, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)})$

- $\alpha_n = F(A \sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) = 1 - \omega_n$
- $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $B(x^{(n-1)}) = \mathbb{R}^s - B(a(A_{\theta_o}^{x^{(n-1)}}))$.

En appliquant de nouveau le lemme précédent, nous obtenons :

- $P_{\theta_o,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) = \omega_n$

- $P_{\theta_1,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) \geq \omega_n + \rho(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s h_n(\theta_o,\theta_1) = \omega_n'$.

Dans ce cas, B_n défini comme ci-dessus est un ouvert de $\mathbb{R}^{s.n}$.

c) $\forall n \geq 2$ tel que $h_n(\theta_o,\theta_1) = 0$, on pose enfin :

- $\omega_n = \omega_n' = 0$
- $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $B(x^{(n-1)}) = \emptyset$.

Alors, d'après le théorème I, il existe une suite $(C_n)_{n\geq 1}$ de cylindres tels que $\forall n \geq 1$,

- $P_{\theta_o,X^{(n)}}(C_n) \leq e^{-1/4 \sum_{j=2}^{n} \rho^2 (\frac{r_j}{\sqrt{R_j}})^{2s} h_j^2(\theta_o,\theta_1)}$

$$- \; P_{\theta_1, X^{(n)}}(C_n) \geq 1 - e^{-1/4 \sum_{j=2}^{n} \rho^2\left(\frac{r_j}{\sqrt{R_j}}\right)^{2s} h_j^2(\theta_o, \theta_1)}$$

On a donc bien :

$$P_{\theta_o, X^{(n)}}(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad P_{\theta_1, X^{(n)}}(C_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

autrement dit P_{θ_o} et P_{θ_1} se séparent asymptotiquement. ■

III - ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DANS CERTAINS MODELES ORDONNES.-

1) Définition : Nous dirons qu'un modèle de Geffroy linéaire est ordonné si

- Θ est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont δ est la distance usuelle ;
- $\forall n \geq 2$, on a
  - soit $\theta, \theta' \in \Theta$ et $\theta < \theta' \Longrightarrow \forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}, \; Q_{A_\theta^{x^{(n-1)}}} \leq Q_{A_{\theta'}^{x^{(n-1)}}}$
  - soit $\theta, \theta' \in \Theta$ et $\theta < \theta' \Longrightarrow \forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}, \; Q_{A_\theta^{x^{(n-1)}}} \geq Q_{A_{\theta'}^{x^{(n-1)}}}$

2) THEOREME III.

Il existe une suite p.s. convergente d'estimateurs du paramètre θ de tout modèle de Geffroy linéaire ordonné dont la loi de base vérifie (P) et qui de plus satisfait à :

(A1) $\forall n \geq 2$ et $\forall \theta \in \Theta$, $x^{(n-1)} \rightsquigarrow A_\theta^{x^{(n-1)}}$ est une application continue ;

(A2) $\forall n \geq 2$, $\exists r_n$, $R_n > 0$ tels que

$$\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)} \quad \text{et} \quad \forall \theta \in \Theta : r_n \leqslant \lambda_{A_\theta^{x^{(n-1)}},1} \leqslant \lambda_{A_\theta^{x^{(n-1)}},s} \leqslant R_n$$

$$\text{(S1)} \quad \forall \theta \,,\, \theta' \in \Theta \,,\quad \theta \neq \theta' \quad = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}}\right)^{2s} h_n^2(\theta,\theta') = +\infty \,.$$

Démonstration :

a) Montrons d'abord que pour tout couple de boules fermées disjointes Θ_o et Θ_1 de Θ, $(P_\theta \,,\, \theta \in \Theta_o)$ et $(P_\theta, \theta \in \Theta_1)$ se séparent asymptotiquement uniformément.

Pour cela, il suffit évidemment de montrer que $\forall \theta_o \,,\, \theta_1 \in \Theta$, si $\theta_o < \theta_1$, alors $s(\theta_o) = (P_\theta, \theta \leqslant \theta_o)$ et $S(\theta_1) = (P_\theta, \theta \geqslant \theta_1)$ se séparent asymptotiquement uniformément.

D'après le théorème II, il existe une suite $(C_n)_{n\geqslant 1}$ de cylindres qui séparent asymptotiquement P_{θ_o} et P_{θ_1}.

En fait, ces cylindres séparent asymptotiquement uniformément $s(\theta_o)$ et $S(\theta_1)$ puisque, en reprenant les notations précédentes, il est facile de vérifier que

$$\forall \theta \,,\ \theta' \in \Theta \,,\ \theta \leqslant \theta_o < \theta_1 \leqslant \theta' \implies$$
$$\forall n \geqslant 2 \text{ et } \forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)} \,,$$
$$P_{\theta,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) \leqslant \omega_n \leqslant \omega_n' \leqslant P_{\theta',X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) \,.$$

b) Si Θ est précompact, on peut conclure (cf [4], th. I.C.1) qu'il existe une suite uniformément convergente et même (cf [4], I.A.7, lemme 1) qu'il existe une suite uniformément p.s. convergente d'estimateurs de θ.

Si Θ n'est pas précompact, comme il est σ-précompact, il existe (d'après [4], lemme I.C.3) une suite p.s. convergente d'estimateurs de θ ∎ .

3) <u>Remarque</u> :

Au lieu de l'hypothèse (A2), il est plus simple d'utiliser l'hypothèse suivante, qui implique (A2) :

$\forall n \geq 2$, $\exists r_n$, $R_n > 0$ tels que

$\forall \theta \in \Theta$ et $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $r_n \leq \beta(A_\theta^{x^{(n-1)}}) \leq \alpha(A_\theta^{x^{(n-1)}}) \leq R_n$.

4) <u>COROLLAIRE I</u>.

Il existe une suite uniformément p.s. convergente d'estimateurs du paramètre θ de tout modèle de Geffroy linéaire ordonné vérifiant (P), (A1), (A2) et les hypothèses suivantes :

(D1) $\forall n \geq 2$, $\exists\ \underline{h}_n : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ fonction croissante telle que

$$\forall \theta , \theta' \in \Theta , \quad h_n(\theta,\theta') \geq \underline{h}_n(\delta(\theta,\theta'))$$

(S'1) $\forall x > 0$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}}\right)^{2s} \underline{h}_n^2(x) = +\infty$.

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de vérifier que Θ est précompact, puis d'appliquer le théorème III : si Θ n'était pas précompact, on pourrait en extraire une suite $(\theta_p)_{p\geq 1}$ telle que

$\forall p \geq 1$, $\delta(\theta_{p+1},(\theta_1,\ldots,\theta_p)) \geq 1$.

Alors, étant donné $x_1 \in \mathbb{R}^s$, on pourrait extraire de la suite $(|\det A_{\theta_p}^{x_1}|_{p\geq 1}) \subset [r_2^{s/2}, R_2^{s/2}]$ une suite convergente. Soit $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite de ses indices : on aurait donc :

$$0 \leq \underline{h}_2(1) \leq \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{1}{|\det A_{\theta_{p_k}}^{x_1}|} - \frac{1}{|\det A_{\theta_{p_{k+1}}}^{x_1}|} \right| , \quad \text{soit } \underline{h}_2(1) = 0 .$$

On démontrerait de même que $\forall n \geq 2$, $\underline{h}_n(1) = 0$, ce qui contredirait (S'1).■

5) <u>COROLLAIRE II</u>.

Il existe une suite p.s. convergente d'estimateurs du paramètre θ de tout modèle de Geffroy linéaire ordonné vérifiant (P), (A1), (D1) et

(A'2) $\forall\theta \in \Theta$,

$$0 < \inf(\lambda_{A_\theta^{x^{(n-1)}},1}, n\geq 2, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}) \leq \sup(\lambda_{A_\theta^{x^{(n-1)}},s}, n\geq 2, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}) < +\infty$$

(S"1) $\forall x > 0$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \underline{h}_n^2(x) = +\infty$.

<u>Démonstration</u> : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, soit

$$\Theta_p = (\theta\in\Theta, \frac{1}{p} \leq \inf(\lambda_{A_\theta^{x^{(n-1)}},1}, n\geq 2, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}) \leq \sup(\lambda_{A_\theta^{x^{(n-1)}},s}, n\geq 2, x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)} \leq p)$$

Il est clair que $\Theta_p \uparrow \Theta$ et que si $\Theta_p \neq \emptyset$, il existe une suite uniformément p.s. convergente d'estimateurs de θ pour le modèle statistique obtenu en réduisant Θ à Θ_p , d'après le corollaire I.

Il suffit donc d'appliquer de nouveau le lemme ([4], I.C.3) ■

IV - ESTIMATION ASYMPTOTIQUE DANS CERTAINS MODELES NON ORDONNES.-

1) Dans la suite, on ne suppose plus que le modèle de Geffroy linéaire considéré est ordonné, mais le paramètre θ reste quand même estimable grâce à l'introduction d'hypothèses supplémentaires de continuité. Nous poserons :

- $\forall n \geq 2$, $\forall \theta, \theta' \in \Theta$,

$$k_n(\theta,\theta') = \sup\left(\left|\frac{1}{|\det A_\theta^{x^{(n-1)}}|} - \frac{1}{|\det A_{\theta'}^{x^{(n-1)}}|}\right| , \ x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}\right)$$

- si la loi de base du modèle vérifie (P) ,

$$\tau = \text{Max}(f(x),\ x \in B(A)).v(s).A^s .$$

2) THEOREME IV.

Soit un modèle de Geffroy linéaire vérifiant (P), (A1), (A2) ainsi que les hypothèses suivantes :

(A3) $\forall n \geq 2$ et $\forall \theta$, $\theta' \in \Theta$, on a

soit $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $Q_{A_\theta^{x^{(n-1)}}} \leq Q_{A_{\theta'}^{x^{(n-1)}}}$

soit $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $Q_{A_\theta^{x^{(n-1)}}} \geq Q_{A_{\theta'}^{x^{(n-1)}}}$.

(D2) $\forall n \geq 2$, $\exists\ \underline{h}_n$ et $\bar{k}_n : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$, fonctions croissantes telles que : $\forall \theta$, $\theta' \in \Theta$

$$\bar{k}_n(\delta(\theta,\theta')) \geq k_n(\theta,\theta') \geq h_n(\theta,\theta') \geq \underline{h}_n(\delta(\theta,\theta')) .$$

Alors il existe une suite uniformément p.s. convergente d'estimateurs de θ si de plus

(S2) $\forall \alpha > 0$, $\exists \beta > 0$ tel que $\sum_{n=2}^{+\infty} r_n^s \text{Max}^2(0,\rho\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}^{\,s} \underline{h}_n(\alpha) - 2\tau\bar{k}_n(\beta)) = +\infty$.

Démonstration :

(D1) et (A2) étant vérifiées, on montre comme dans le corollaire I que Θ est précompact.

Dans ces conditions, d'après le théorème ([4] , I.C.1) déjà utilisé, il suffit de montrer que :

$\forall \theta_0$, $\theta_1 \in \Theta$, $\forall a_0$, $a_1 \geq 0$, si $\alpha = \delta(\theta_0,\theta_1) - (a_0+a_1) > 0$, les familles de lois $(P_\theta, \delta(\theta,\theta_o) \leq a_o)$ et $(P_\theta, \delta(\theta,\theta_1) \leq a_1)$ se séparent asymptotiquement uniformément.

Soit $\beta > 0$ tel que (α,β) vérifie (S2) : on peut recouvrir la boule fermée $\Theta_o = (\theta, \delta(\theta,\theta_o) \leq a_o)$ par un nombre fini de boules fermées de rayon β centrées dans Θ_o. Il en est de même pour $\Theta_1 = (\theta, \delta(\theta,\theta_1) \leq a_1)$.

Le problème est donc de démontrer que si θ_o, $\theta_1 \in \Theta$ et si $\delta(\theta_o,\theta_1) \geq \alpha$, alors $H_o = (P_\theta, \delta(\theta,\theta_o) \leq \beta)$ et $H_1 = (P_\theta, \delta(\theta,\theta_1) \leq \beta)$ se séparent asymptotiquement uniformément.

Soit $N = (n \geq 2 \ , \rho \sqrt{\frac{r_n}{R_n}}^{\,s} \ \underline{h}_n(\alpha) > 2\tau \ \bar{k}_n(\beta))$

(S2) $\Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^{2s} \ h_n^2(\theta_o,\theta_1) = +\infty$ puisque

$\forall n \in N \ , \quad h_n(\theta_o,\theta_1) \geq \underline{h}_n(\delta(\theta_o,\theta_1)) \geq \underline{h}_n(\alpha) > 0 \qquad (2)$.

D'après le théorème II , P_{θ_o} et P_{θ_1} se séparent donc asymptotiquement ; reprenons sa démonstration en l'adaptant :

(i) si $n \geq 2$ et si $n \notin N$, posons $- \ \omega_n = \omega'_n = 0$

$- \ \forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}, B(x^{(n-1)}) = \emptyset$.

(ii) si $n \in N$, dans le cas où $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $Q_{A^{x^{(n-1)}}_{\theta_1}} \leq Q_{A^{x^{(n-1)}}_{\theta_o}}$,

on a posé $B(x^{(n-1)}) = B(a(A^{x^{(n-1)}}_{\theta_1}))$, le rayon de cette boule étant

défini par l'égalité $P^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}_{\theta_1, X_n}(B(x^{(n-1)})) = F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}})$, et

on sait que :

$$P^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}_{\theta_o, X_n}(B(x^{(n-1)})) \leq F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) - \rho(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s \ h_n(\theta_o,\theta_1)$$

$$\leq F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) - \rho(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s \ \underline{h}_n(\alpha) \quad , \text{ d'après (2).}$$

Il est clair grâce à (A3) que $\delta(\theta,\theta_1) \leqslant \beta \Longrightarrow$

$$|P_{\theta,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) - P_{\theta_1,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)}))|$$
$$\leqslant \tau \sqrt{r_n}^{\,s}\, k_n(\theta,\theta_1) \leqslant \tau \sqrt{r_n}^{\,s}\, \bar{k}_n(\beta) .$$

Cette inégalité est encore vraie quand on remplace θ_1 par θ_o , si $\delta(\theta,\theta_o) \leqslant \beta$.

Par conséquent, si l'on pose :

- $\omega'_n = F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) - \tau \sqrt{r_n}^{\,s}\, \bar{k}_n(\beta)$
- $\omega_n = F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) - \rho(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s\, \underline{h}_n(\alpha) + \tau\sqrt{r_n}^{\,s}\, \bar{k}_n(\beta)$, nous obtenons :

(1) $\delta(\theta,\theta_o) \leqslant \beta \Longrightarrow P_{\theta,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) \leqslant \omega_n$

(2) $\delta(\theta,\theta_1) \leqslant \beta \Longrightarrow P_{\theta,X_n}^{X^{(n-1)}=x^{(n-1)}}(B(x^{(n-1)})) \geqslant \omega'_n$.

(iii) si $n \in N$, dans le cas où $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $Q_{A_{\theta_o}^{x^{(n-1)}}} \leqslant Q_{A_{\theta_1}^{x^{(n-1)}}}$,

les propriétés (1) et (2) restent vraies à condition de poser

- $\forall x^{(n-1)} \in \mathbb{R}^{s(n-1)}$, $B(x^{(n-1)}) = \mathbb{R}^s - B(a(A_{\theta_o}^{x^{(n-1)}}))$
- $\omega_n = 1 - F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) + \tau \sqrt{r_n}^{\,s}\, \bar{k}_n(\beta)$
- $\omega'_n = 1 - F(A\sqrt{\frac{r_n}{R_n}}) + \rho(\frac{r_n}{\sqrt{R_n}})^s\, \underline{h}_n(\alpha) - \tau\sqrt{r_n}^{\,s}\, \bar{k}_n(\beta)$.

Dans ces conditions, (S2) $\Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} (\omega'_n - \omega_n)^2 = +\infty$, et l'on peut conclure que H_o et H_1 se séparent asymptotiquement uniformément d'après le théorème I. ■

3) <u>COROLLAIRE III</u>.

Il existe une suite p.s. convergente d'estimateurs du paramètre de tout modèle de Geffroy linéaire vérifiant les hypothèses (P), (A1), (A'2), (A3), (D2) et l'hypothèse (S'2) suivante :

$$\forall a > 0 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0 \ , \exists \beta > 0 \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{Max}^2(0, \underline{h}_n(\alpha) - a\, \bar{k}_n(\beta)) = +\infty \ .$$

<u>Démonstration</u> :

On sait qu'il suffit de démontrer que θ est uniformément p.s. estimable dans le modèle statistique obtenu en réduisant Θ à Θ_p (cf. corollaire II).

Or, il se trouve que dans ce cas (S'2) $\Longrightarrow$ (S2) puisque $\forall \alpha > 0$ et $\forall x > 0$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} r_n^s \, \mathrm{Max}^2\left(0, \rho \sqrt{\frac{r_n}{R_n}}^{\,s} \underline{h}_n(\alpha) - 2\tau \bar{k}_n(x)\right) = \frac{\rho^2}{p^{3s}} \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{Max}^2\left(0, \underline{h}_n(\alpha) - \frac{2\tau p^s}{\rho} \bar{k}_n(x)\right). \ ■$$

V - COMMENTAIRES.-

1) Lorsque l'on suppose que tous les automorphismes du modèle de Geffroy linéaire considéré sont des homothéties, les résultats ci-dessus, dont l'adaptation à ce cas particulier est immédiate, fournissent des estimateurs p.s. convergents d'un paramètre d'homothétie (ou d'échelle) dans un cadre très général.

On complète ainsi l'étude ([5], chap. III) déjà mentionnée où deux cas de figure seulement sont traités, pour la convergence en probabilité.

2) Des résultats analogues concernant les modèles de Geffroy affines, modèles comprenant comme cas particulier à la fois l'estimation du paramètre de translation et l'estimation du paramètre d'homothétie ont été obtenus depuis ([6]).

B I B L I O G R A P H I E .

1 J. GEFFROY.- "Inégalités pour le niveau de signification et la puissance de certains tests reposant sur des données quelconques" , Comptes Rendus Acad. Sc., Paris, série A, t. 282 (1976), p. 1299-1301.

2 J. GEFFROY.- "Sufficient convergence conditions for some tests in the case of not necessarily independent or equidistributed data" , in Recent developments in statistics, J.R. Barra et al. editors, North Holland Pub. Comp. (1977), p. 429-435.

3 J. GEFFROY.- "Asymptotic separation of distributions and convergence properties of tests and estimators" , in Asymptotic theory of statistical tests and estimation, Academic Press Inc. (1980), p.159-177.

4 R. MOCHÉ.- "Décantation et séparation asymptotiques uniformes ; tests et estimateurs convergents, dans le cas d'observations indépendantes, équidistribuées ou non" , in thèse présentée à l'Université des Sciences et Techniques de Lille (1977).

5 F. PALMEIRA de ARAUJO CANOVA.- "Estimation d'un paramètre de translation ou d'homothétie à partir de données non indépendantes et non équidistribuées", thèse de doctorat 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), (1982).

6 R. MOCHÉ.- "Estimation asymptotique dans certains modèles de Geffroy affines" ; Proc. Third Prague Symp. Asymptotic Statistics ; P. Mandl, M. Hušková ed ; Elsevier Science Pub., Amsterdam (1984) p. 363-369.