

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

JEAN-RENÉ BARRA

CLAUDINE ROBERT

Estimation de certaines interactions en analyse de variance

Statistique et analyse des données, tome 8, n° 2 (1983), p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1983__8_2_1_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION DE CERTAINES INTERACTIONS
EN ANALYSE DE VARIANCE

Jean-René BARRA et Claudine ROBERT

Laboratoire I.M.A.G.
B.P. 68
38402 - ST MARTIN D'HERES CEDEX

Résumé : Dans cet article, on effectue l'analyse de la variance d'un plan factoriel à deux facteurs avec interaction bilinéaire par rapport aux influences de deux facteurs pris isolément. On montre que les estimateurs proposés dans [1] pour les termes d'interaction ont des propriétés remarquables, en particulier consistance et normalité asymptotique ; ceci met en évidence un nouveau type de problèmes limites sur les plans factoriels.

Abstract : We consider analysis of variance on a factorial design with two factors ; the interaction is non null and supposed to be bilinear with respect to the influence of each factor. We show that the estimators of the unknown parameters, proposed in [1], have remarkable properties such as consistency and asymptotic normality; furthermore, it appears a new kind of limit problems about factorial design.

Mots clés : plan factoriel, maximum de vraisemblance, loi conditionnelle, fonction caractéristique, convergence presque sûre.

1. POSITION DU PROBLEME.

Le problème étudié est défini sur la structure statistique :

$$(1.0) \quad \left\{ \mathcal{M}_{r,s}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{r,s}}, N(M, \sigma^2 \mathbb{1}_r \otimes \mathbb{1}_s), \sigma^2 \in \mathbb{R}^+, M \in \Sigma_{r,s} \right\}$$

où $(\mathcal{M}_{r,s}, \mathcal{B}_{\mathcal{M}_{r,s}})$ est l'espace des matrices d'ordre (r,s) muni de la tribu des boréliens, et où $\Sigma_{r,s}$ est le sous-ensemble des matrices M qui s'écrivent :

$$(1.1) \quad M = \alpha I^t J + \theta^t J + I^t \mu + \lambda \theta^t \mu + \theta^t \mu + \theta^t \mu'$$

$$\text{où : } (\alpha, \theta', I) \in (\mathbb{R}^r)^3, \quad I = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mu, \mu', J) \in (\mathbb{R}^s)^3, \quad J = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha, \lambda) \in \mathbb{R}^2$$

avec :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} {}^t \theta I &= {}^t \theta' I = {}^t \theta \theta' = 0 \\ {}^t \mu J &= {}^t \mu' J = {}^t \mu \mu' = 0 \end{aligned}$$

L'objet de cette étude est d'estimer les paramètres $\alpha, \theta, \mu, \lambda, \theta', \mu'$. On note que θ et μ représentent l'influence de chaque facteur pris isolément, θ' et μ' celle de chacun des facteurs sur l'autre, enfin λ est le coefficient d'interaction des facteurs pris isolément. Notons que les contraintes (1.2) assurent l'unicité dans l'écriture (1.1).

La spécificité de l'étude des problèmes posés réside donc dans la décomposition de la partie non linéaire de M (i.e. : $M - \alpha I^t J - \theta^t J - I^t \mu$) en somme de trois matrices orthogonales entre elles et orthogonales à la partie linéaire, pour le produit matriciel : $\langle M, M' \rangle = \text{Trace}(M^t M')$.

Signalons que, dès 1949, Tuckey [10] a proposé un test de nullité du paramètre λ lorsqu'on suppose que M_2 s'écrit :

$$M_2 = \lambda \theta^t \mu .$$

Mais on peut aussi envisager les cas où M_2 se décompose en produit de matrices unicolonnes et unilignes qui ne sont pas θ et μ . Plus précisément, en 1972, Johnson et Graybill [6], puis en 1978, K. R. Gabriel se sont intéressés au cas où M_2 est de la forme :

$$M_2 = \theta^t \mu^i$$

ou plus généralement :

$$M_2 = \sum_1^n \theta^i t \mu^i .$$

Ces auteurs calculent, avec différentes méthodes faisant intervenir des décompositions de matrices en valeurs singulières, des estimateurs du maximum de vraisemblance pour $\alpha, \theta, \mu, \theta^i, \mu^i$, $i=1, \dots, r$. Notons que ces méthodes pourraient aussi s'appliquer dans le cas que nous envisageons ici, lorsque $\lambda = 0$, si nous n'avons pas les contraintes (1.2), en écrivant :

$$M = \alpha I^t J + \theta (J + \theta^t \mu^i) + (\theta^i + I) \mu^t .$$

2. CONSTRUCTION DES ESTIMATEURS.

Les estimateurs étudiés ont été définis dans [1]. La méthode utilisée pour les construire est la suivante :

Soit X une matrice d'observations, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{M}(r, s)$.

On prend d'abord pour estimateurs respectifs de α, θ, μ les estimateurs optimaux lorsque λ, θ^i et μ^i sont nuls, c'est-à-dire :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{1}{rs} {}^t \text{IXJ} \\ \hat{\theta} = \frac{1}{s} \text{XJ} - \hat{\alpha} \text{I} \\ \hat{\mu} = \frac{1}{r} {}^t \text{XI} - \hat{\alpha} \text{J} . \end{cases}$$

Ensuite on cherche le minimum en $(\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}')$ de :

$$\| \text{X} - \hat{\alpha} \text{I} {}^t \text{J} - \text{I} {}^t \hat{\mu} - \hat{\theta}' \hat{\mu}' - \lambda \hat{\theta}' \hat{\mu}' - \hat{\lambda} \hat{\theta}' \hat{\mu}' \|$$

sous les contraintes :

$${}^t \hat{\theta}' \hat{\theta}' = {}^t \text{I} \hat{\theta}' = 0 \quad ; \quad {}^t \hat{\mu}' \hat{\mu}' = {}^t \text{J} \hat{\mu}' = 0 .$$

En posant :

$$\text{Y} = \text{X} - \hat{\alpha} \text{I} {}^t \text{J} - \hat{\theta}' {}^t \text{J} - \text{I} {}^t \hat{\mu}$$

on montre dans [1] et [2] que ce minimum est atteint au point $(\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}')$ défini par :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{{}^t \hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} \text{Y} \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} \\ \hat{\theta}' = \left(\text{I}_r - \frac{\hat{\theta} {}^t \hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} \right) \text{Y} \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} = \text{Y} \frac{\hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} - \hat{\lambda} \hat{\theta} \\ \hat{\mu}' = \left(\text{I}_s - \frac{\hat{\mu} {}^t \hat{\mu}}{\|\hat{\mu}\|^2} \right) {}^t \text{Y} \frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} = {}^t \text{Y} \frac{\hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} - \hat{\lambda} \hat{\mu} . \end{cases}$$

On étudie dans la suite les propriétés de $\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}'$ comme estimateurs respectifs de λ, θ', μ' .

Remarque. Il est clair que $\hat{\lambda}, \hat{\theta}', \hat{\mu}'$ sont les estimateurs du maximum de vraisemblance lorsque $\theta = \hat{\theta}$, $\mu = \hat{\mu}$; mais les équations du maximum de vraisemblance proprement dites ([2] page 7) sont complexes et on ne sait pas les résoudre. Elles ne se simplifient pas vraiment lorsqu'on suppose $\theta' = 0$ et $\mu' = 0$, ou lorsqu'on suppose $\lambda = 0$. Cependant, les solutions $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\mu}$ pour θ et μ peuvent s'écrire :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \tilde{\theta} = \hat{\theta} + \theta_0 \\ \tilde{\mu} = \hat{\mu} + \mu_0 \end{cases}$$

Les vecteurs θ_0 et μ_0 représentent la perturbation subie par les solutions des équations du maximum de vraisemblance lorsqu'on introduit la partie non linéaire de M , et on peut seulement montrer qu'ils sont orthogonaux respectivement aux vecteurs θ et μ .

Pour des raisons techniques il est plus commode de se placer dans les sous-espaces respectivement orthogonaux à I et à J , les vecteurs $(\hat{\theta}, \hat{\theta}', \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ sont remplacés par leurs projections $(\beta, \beta', \gamma, \gamma')$ dans ces sous-espaces. Les seules contraintes sont alors ${}^t\beta\beta' = {}^t\gamma\gamma' = 0$. Par ce changement de repère, les estimateurs $(\hat{\theta}, \hat{\theta}', \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ deviennent des estimateurs $(\hat{\beta}, \hat{\beta}', \hat{\gamma}, \hat{\gamma}')$ de $(\beta, \beta', \gamma, \gamma')$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ sont des statistiques indépendantes de lois respectives :

$$N\left(\alpha, \frac{\sigma^2}{rs}\right), \quad N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{s} \mathbb{1}_{r-1}\right), \quad N\left(\gamma, \frac{\sigma^2}{r} \mathbb{1}_{s-1}\right).$$

Les estimateurs $\hat{\beta}', \hat{\gamma}', \hat{\lambda}$ de β', γ', λ sont définis à partir de $\hat{\beta}, \hat{\gamma}, Z'$, où Z' est une matrice aléatoire, indépendante de $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ et de loi $N(P, \sigma^2 \mathbb{1}_{r-1} \otimes \mathbb{1}_{s-1})$, par les formules :

$$\begin{aligned} \hat{\beta}' &= \left(\mathbb{1}_{r-1} - \frac{\hat{\beta}^t \hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2} \right) Z' \frac{\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2} \\ \hat{\gamma}' &= \left(\mathbb{1}_{s-1} - \frac{\hat{\gamma}^t \hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2} \right) {}^t Z' \frac{\hat{\beta}}{\|\hat{\beta}\|^2} \\ \hat{\lambda} &= \frac{{}^t \hat{\alpha}}{\|\hat{\beta}\|^2} Z' \frac{\hat{\gamma}}{\|\hat{\gamma}\|^2} \end{aligned}$$

Le changement de repère n'étant pas lié aux paramètres à estimer, ne perturbe pas l'étude statistique à faire. En particulier, pour r et s fixés, les moments d'ordre k des vecteurs $\hat{\theta}'$ et $\hat{\beta}'$ sont égaux, de même que ceux de $\hat{\mu}'$ et $\hat{\gamma}'$.

3. MOYENNES ET COVARIANCES.

Posons :

$$R_1 = \frac{\langle \hat{\beta}, \beta \rangle}{\|\hat{\beta}\|^2}, \quad R'_1 = \frac{\langle \hat{\beta}, \beta' \rangle}{\|\hat{\beta}\|^2}$$

$$S_1 = R_1 \hat{\beta} - \beta, \quad T_1 = R'_1 \hat{\beta} - \beta',$$

c'est-à-dire que $R_1 \hat{\beta}$ est la projection orthogonale de β sur la demi-droite portée par $\hat{\beta}$ et de même $R'_1 \hat{\beta}$ est la projection orthogonale de β' sur cette demi-droite.

PROPOSITION 3.1. - Soit :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^{r*} \quad \epsilon_n(x) = (n-1)e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!(2m+n)}.$$

Les moments d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires

(R_1, R'_1, S_1, T_1) s'expriment tous à l'aide de sommes et de produits finis des nombres

$$\left\{ \epsilon_n \left(\frac{s \|\beta\|^2}{2\sigma^2} \right), n \in \{r-3, r+1\} \right\}.$$

Les formules exactes sont explicitées dans [2], page 19. La démonstration étant élémentaire mais longue, nous en résumons ici seulement les étapes :

$$1) \text{ on calcule d'abord } E \left(\frac{U^\alpha V^\beta}{(U+V)^\delta} \right) \text{ et } E \left(\frac{U^\alpha V^\beta W^\epsilon}{(U+V+W)^\delta} \right)$$

où U, V, W sont des variables aléatoires indépendantes et de lois respectives $\Gamma(a, \gamma, \lambda)$, $\Gamma(b, \lambda)$, $\Gamma(c, \lambda)$, et où $\alpha, \beta, \epsilon, \delta$ sont des nombres entiers tels que ces espérances soient définies.

2) On décompose ensuite $\hat{\beta}'$ sous la forme :

$$\hat{\beta} = \beta \left(1 + \frac{\sigma}{\sqrt{s} \|\beta\|} \right) \mathcal{U}_1 + \frac{\sigma}{\sqrt{s}} \frac{\beta'}{\|\beta'\|} \mathcal{U}_2 + \frac{\sigma}{\sqrt{s}} \mathcal{V}'$$

où $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{V}'$ sont des variables aléatoires indépendantes ; $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ sont de loi $N(0,1)$ et \mathcal{V}' est un vecteur aléatoire gaussien centré dont la covariance est la forme quadratique unité du sous-espace orthogonal à β et β' .

On a aussi, par exemple :

$$\langle \hat{\beta}, \beta' \rangle = \frac{\sigma^2}{s} \|\beta'\|^2 Y$$

$$\|\hat{\beta}\|^2 = \frac{\sigma^2}{s} (Z+Y+Z') = \frac{\sigma^2}{s} (U+Y)$$

où Y suit la loi $\Gamma(\frac{1}{2}, 2)$, Z suit la loi $\Gamma(\frac{r}{2}-3, 2)$, les variables Z, Y, Z' étant indépendantes ; U et Y sont aussi indépendantes, et la loi de U est $\Gamma(\frac{r-2}{2}; \frac{s\|\beta\|^2}{\sigma^2}; 2)$.

L'application des résultats obtenus en 1) complète alors la démonstration.

On définit à partir de γ, γ' des variables R_2, R'_2, T_2, S_2 analogues à R_1, R'_1, T_1, S_1 , pour lesquelles la proposition 3.1 reste vraie (en remplaçant (β, β', r, s) par (γ, γ', s, r)).

PROPOSITION 3.2. - Avec les notations précédemment définies :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\hat{\lambda}) = \lambda E(R_1)E(R_2) \\ E(\hat{\beta}') = -E(R_2)(\lambda E(S_1) + E(T_1)) \\ E(\hat{\gamma}') = -E(R_1)(\lambda E(S_2) + E(T_2)) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\hat{\lambda}^2) = \sigma^2 E\left(\frac{1}{\|\hat{\beta}\|^2}\right) E\left(\frac{1}{\|\hat{\gamma}\|^2}\right) + \lambda^2 E(R_1^2)E(R_2^2) + E(R_1^2)E(R_2'^2) + E(R_1'^2)E(R_2^2) \\ E(\hat{\beta}'^t \hat{\beta}') = \sigma^2 (\Pi_{r-1} - E(V_1)) E\left(\frac{1}{\|\hat{\beta}\|^2}\right) + E(R_2^2)(\lambda^2 E(S_1^t S_1) + \lambda E(W_1) + E(T_1^t T_1)) \\ \quad + E(R_2'^2)E(S_1^t S_1) \\ E(\hat{\gamma}'^t \hat{\gamma}') = \sigma^2 (\Pi_{s-1} - E(V_2)) E\left(\frac{1}{\|\hat{\gamma}\|^2}\right) + E(R_1^2)(\lambda^2 E(S_2^t S_2) + \lambda E(W_2) + E(T_2^t T_2)) \\ \quad + E(R_1'^2)E(S_2^t S_2) \end{array} \right.$$

Le principe de la démonstration de cette proposition est de calculer les moments des lois de $\hat{\beta}', \hat{\gamma}', \hat{\lambda}$ conditionnelles à $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$, puis de calculer l'espérance de ces moments par rapport à $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$. Or, les lois de $\hat{\beta}', \hat{\gamma}', \hat{\lambda}$ conditionnelles à $(\hat{\beta}, \hat{\gamma})$ sont normales ([2] page 24), d'où les résultats obtenus.

Grâce aux expressions obtenues dans la proposition 3.1, on constate aisément que la proposition 3.2 permet de calculer explicitement les moyennes et les variances de $\hat{\lambda}, \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$, à l'aide de λ, σ^2 , de $\varepsilon_n \left(\frac{s_{||3||}^2}{2\sigma^2} \right)$, $n \in \{r-3, r+1\}$ et $\varepsilon_p \left(\frac{r_{||\gamma||}^2}{2\sigma^2} \right)$, $p \in \{s-3, s+1\}$. Les formules sont données dans [2], pages 13, 20, 27.

4. APPROXIMATIONS SUR LES LOIS DES ESTIMATEURS.

Pour des nombres r et s fixés, nous avons défini des estimateurs des paramètres $\alpha, \theta, \mu, \lambda, \theta', \mu'$; nous nous sommes ramenés, par changement de repère, aux estimateurs correspondants des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \beta', \gamma'$. Pour indiquer que ces paramètres et leurs estimateurs dépendent de r et s , nous les notons, dans ce paragraphe, avec des points :

$$\alpha., \beta., \gamma., \beta', \gamma', \hat{\alpha}., \hat{\beta}., \hat{\gamma}., \hat{\lambda}., \hat{\beta}', \hat{\gamma}' .$$

Le point remplace un indice générique qui est r pour $\beta.$, s pour $\gamma.$ et (r, s) pour les autres quantités énumérées. Nous mettons de même un point aux constantes, vecteurs ou matrices que nous avons introduits dans les paragraphes précédents et qui dépendent de (r, s) .

Dans ce paragraphe, nous faisons tendre r et s vers $+\infty$ dans l'expression des moments d'ordre 1 et 2 et des fonctions caractéristiques des estimateurs $\hat{\lambda}., \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$. Plus précisément, nous supposons que :

(4.1) r et s tendent vers $+\infty$ en étant équivalents,

c'est-à-dire que nous étudions des propriétés des lois des estimateurs $\hat{\lambda}., \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$ lorsque r et s sont grands ; mais nous n'introduisons pas ici de notions de convergence de structures ou d'estimateurs.

Nous étudions d'abord dans quelles conditions le biais $E(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0)$ et l'écart quadratique $E[(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0)^2]$ sont petits lorsque r et s sont grands. Nous cherchons de même des conditions telles que chaque composante de $E(\hat{\beta}'_0 - \beta'_0)$ (resp. $E(\hat{\gamma}'_0 - \gamma'_0)$) et chaque terme de la matrice $E[(\hat{\beta}'_0 - \beta'_0)^t (\hat{\beta}'_0 - \beta'_0)]$ (resp. $E[(\hat{\gamma}'_0 - \gamma'_0)^t (\hat{\gamma}'_0 - \gamma'_0)]$) soient petits lorsque r et s sont grands.

Pour tout r , nous plongeons \mathbb{R}^r dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ et nous notons $V_{\cdot i}$ les composantes d'un vecteur V_{\cdot} de \mathbb{R}^r (en particulier, $V_{\cdot i}$ est nul pour tout indice i supérieur à r). De même, une matrice M_{\cdot} d'ordre (r, s) est identifiée à un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ de coordonnées $M_{\cdot (i, j)}$ (où $M_{\cdot (i, j)}$ est nul dès que $i > r$ ou $j > s$). Nous définissons les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \forall V_{\cdot} \in \mathbb{R}^r & : \lim_f V_{\cdot} = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}^* & \lim_{r \rightarrow +\infty} V_{\cdot i} = 0 \\ \forall M_{\cdot} \in \mathcal{M}_{(r, s)} & : \lim_f M_{\cdot} = 0 \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ s \rightarrow +\infty}} M_{\cdot (i, j)} = 0 . \end{aligned}$$

La condition (4.1) étant vérifiée, considérons les hypothèses (H_0) , (H_1) , (H_2) suivantes :

$$(H_0) \left\{ \begin{array}{l} \lim \|\beta_{\cdot}\| \in \overline{\mathbb{R}^*} \quad \lim \|\gamma_{\cdot}\| \in \overline{\mathbb{R}^*} \\ \text{on n'a pas simultanément :} \\ \lim \lambda_{\cdot} = 0, \quad \lim_f \beta'_{\cdot} = 0, \quad \lim_f \gamma'_{\cdot} = 0 . \end{array} \right.$$

$$(H_1) \left\{ \begin{array}{l} \lim \|\beta_{\cdot}\| = \lim \|\gamma_{\cdot}\| = +\infty \\ \sup |\lambda_{\cdot}| < +\infty \\ \forall i \in \mathbb{N} \quad \sup |\beta_{\cdot i}| < +\infty, \quad \sup |\beta'_{\cdot i}| < +\infty \\ \sup |\gamma_{\cdot i}| < +\infty, \quad \sup |\gamma'_{\cdot i}| < +\infty . \end{array} \right.$$

$$(H_2) \left\{ \begin{array}{l} \sup_r \frac{\|\beta'_{\cdot}\|}{\|\beta_{\cdot}\|} < +\infty, \quad \sup_s \frac{\|\gamma'_{\cdot}\|}{\|\gamma_{\cdot}\|} < +\infty \end{array} \right.$$

Alors on a les propositions suivantes :

PROPOSITION 4.1. - (H_0) étant vérifiée :

(H_1) est nécessaire et suffisante pour que :

$$\begin{cases} \lim E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet) = 0 \\ \lim_f E(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet) = 0 \\ \lim_f E(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet) = 0 . \end{cases}$$

PROPOSITION 4.2. - (H_0) et (H_1) étant vérifiées, (H_2) est une hypothèse suffisante pour que :

$$\begin{cases} \lim E(\hat{\lambda}_\bullet - \lambda_\bullet)^2 = 0 \\ \lim_f E[(\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)^t (\hat{\beta}'_\bullet - \beta'_\bullet)] = 0 \\ \lim_f E[(\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)^t (\hat{\gamma}'_\bullet - \gamma'_\bullet)] = 0 . \end{cases}$$

La démonstration de ces propositions découle des expressions qui donnent les moments d'ordre 1 et 2 des estimateurs, à partir des fonctions e_n , dont on utilise une forme intégrale ([2], page 74).

Remarques.

1) Les estimateurs $\hat{\lambda}_\bullet, \hat{\beta}'_\bullet, \hat{\gamma}'_\bullet$ étant les estimateurs du maximum de vraisemblance lorsqu'on prend $\beta_\bullet = \hat{\beta}_\bullet$ et $\gamma_\bullet = \hat{\gamma}_\bullet$, il est naturel de supposer que $\lim \|\hat{\beta}_\bullet\|$ et $\lim \|\hat{\gamma}_\bullet\|$ sont non nuls. La deuxième partie de (H_0) revient à dire que l'interaction des deux facteurs n'est pas négligeable lorsque r et s sont grands.

2) L'hypothèse (H_2) signifie que l'influence d'un facteur pris isolément n'est pas négligeable, pour r et s grands, devant l'influence de ce facteur sur l'autre.

3) Les propositions 1 et 2 restent valables si pour tout (r, s) , λ_0 est nul. (Dans un tel cas, évidemment, il n'y a pas lieu de considérer l'estimateur $\hat{\lambda}$).

De même, ces propositions sont vraies si, pour tout (r, s) , β'_i et γ'_i sont nuls. Dans ce cas, seuls les résultats suivants ont un sens :

$$\lim E(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0) = 0, \quad \lim E[(\hat{\lambda}_0 - \lambda_0)^2] = 0.$$

Enfin, ces propositions sont toujours vraies si on se rapproche d'une seule de ces situations lorsque r et s deviennent grands, c'est-à-dire si :

$$\lim \lambda_0 = 0$$

ou $\lim_f \beta'_i = 0, \quad \lim_f \gamma'_i = 0.$

4) Les hypothèses (H_0) , (H_1) , (H_2) ne sont pas incompatibles. Elles sont vérifiées si par exemple il existe des nombres m, m', M, M' strictement positifs tels que :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \left\{ \begin{array}{l} m \leq |\beta_{\cdot i}| \leq M \\ m' \leq |\gamma_{\cdot i}| \leq M' \end{array} \right.$$

ou encore, par exemple, si

$$\beta_{\cdot i} \sim \sqrt{\frac{i}{r}} \quad \gamma_{\cdot i} \sim \sqrt{\frac{i}{r}}.$$

On détermine maintenant, sous certaines conditions, une approximation gaussienne des fonctions caractéristiques des estimateurs.

PROPOSITION 4.3. - Les hypothèses (H_0) , (H_1) , (H_2) étant vérifiées, si de plus, on a :

$$(H_3) \quad \begin{cases} \lim \frac{\|\beta_n\|}{\|\gamma_n\|} = 1 \\ \lim \frac{\|\beta_n\|}{\sqrt{r}} = 0 . \end{cases}$$

- 1) La loi de λ_n , où :
 $\lambda_n = K_n(\hat{\lambda}_n - \lambda_n) + 2\lambda_n\sigma$
avec :
 $K_n = \frac{\|\beta_n\| \|\gamma_n\|}{\sigma}$
tend vers $N(0, 1)$.

- 2) En posant :
 $K'_n = \frac{\|\beta_n\|}{\sigma}$
pour tout p fixé, la loi de la projection sur \mathbb{R}^p de
 $K'_n(\hat{\beta}'_n - \beta'_n)$ (resp. $K'_n(\hat{\gamma}'_n - \gamma'_n)$) tend vers $N(0, \mathbb{1}_p)$.

La démonstration de cette proposition, s'appuie sur la fonction caractéristique ψ_n de la loi de λ_n conditionnelle à $(\hat{\beta}_n, \hat{\gamma}_n)$. On a alors :

$$\varphi_{\lambda_n}(t) = E(\psi_n(t)) .$$

Pour établir le 1), il suffit donc de démontrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \lim_{(r,s)} \varphi_{\lambda_n}(t) = e^{-t^2/2} .$$

Pour cela, pour tout t il suffit de remplacer la suite de variables aléatoires $\psi_n(t)$ par une suite $\bar{\psi}_n(t)$ de variables aléatoires telles que, pour tout couple (r, s) , $\psi_n(t)$ et $\bar{\psi}_n(t)$ aient même loi. En effet, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall (r, s) \quad E(\psi_n(t)) &= E(\bar{\psi}_n(t)) \\ \varphi_{\lambda_n}(t) &= E(\bar{\psi}_n(t)) . \end{aligned}$$

Remarquons que le terme $2\lambda_n\sigma$ dans l'expression de λ_n est la conséquence du comportement asymptotique du biais de $\hat{\lambda}_n$.

DEFINITION. - Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ une structure statistique fondamentale et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de statistiques à valeurs respectivement dans $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$. Soit f une application de \mathcal{P} dans \mathbb{R}^k , k fixé. $\theta = f(P)$ est le paramètre à estimer.

Notons \mathcal{P}_n la famille des lois P_{S_n} de S_n . Supposons que

(5.3) $\forall n \in \mathbb{N} \exists g_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}^k, \forall P \in \mathcal{P}, g_n(P_{S_n}) = f(P) = \theta.$

Soit $(X_n)_n$ une suite d'estimateurs de θ définis respectivement sur $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n, \mathcal{P}_n)$; on dit que la suite (X_n) est presque sûrement convergente si, pour tout P dans \mathcal{P} , la suite (X_n) vérifie :

$$X_n(S_n) \rightarrow \hat{\theta} = f(P) \quad \text{p. s.}$$

On dira aussi, lorsque (5.3) est vérifiée, que (X_n) est une suite d'estimateurs asymptotiquement sans biais si, pour tout P dans \mathcal{P} , l'espérance $E_{P_{S_n}}(X_n)$ de X_n par rapport à P_{S_n} converge, lorsque n tend vers $+\infty$, vers $f(P)$.

Cette définition s'applique au problème considéré :

Soit A l'ensemble des suites de matrices vérifiant (IV.1) et (IV.2) et $A_{(r,s)}$ l'ensemble des termes d'indice (r,s) de ces suites.

Identifions $\mathcal{M}_{(r,s)}$ avec $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$. La condition (IV.2) montre que si $\mathcal{M} = \left(M_{(r,s)} \right)_{(r,s) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est un élément de A , le système

$$\left(\mathcal{M}_{(r,s)}, \mathcal{M}_{(r,s)}, N \left(M_{(r,s)}, \sigma^2 \mathbf{1}_r \otimes \mathbf{1}_s \right) \right)$$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ la limite projective ; plus précisément :

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad C = \otimes_{(r,s)} \mathcal{M}_{(r,s)}$$

En faisant la même construction pour tout élément de A , on obtient une structure statistique $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ telle que l'image de cette structure par la projection canonique $\pi_{r,s}$ de Ω dans $\mathcal{M}_{(r,s)}$ est la structure $\left\{ \mathcal{M}_{(r,s)}, \mathcal{P}_{(r,s)}, \nu_{(r,s)} \right\}$ où :

$$\nu_{(r,s)} = \left(N \left(M_{(r,s)}, \sigma^2 \mathbb{I}_r \otimes \mathbb{I}_s \right), M_{(r,s)} \in A_{(r,s)} \right).$$

Soit f l'application de \mathcal{P} dans \mathbb{R} qui à un élément P de \mathcal{P} fait correspondre le terme d'indice (i,j) de la suite $\mathcal{M} \in A$ qui définit P . Pour tout $r \geq i$, pour tout $s \geq j$, soit $f_{(r,s)}$ l'application qui à $P_{(r,s)} \in \mathcal{P}_{(r,s)}$ fait correspondre le terme d'indice (i,j) de la moyenne de $P_{(r,s)}$. On a trivialement :

$$\forall (r,s) \quad r \geq i, \quad s \geq j \quad f_{(r,s)}(P_{(r,s)}) = f(P) = m^{(i,j)}.$$

Les considérations précédentes permettent donc de poser le problème de la normalité asymptotique pour des suites $\hat{m}_n^{(i_0, j_0)} = \hat{m}_{(r,s)}^{(i_0, j_0)}$ d'estimateurs de $m^{(i_0, j_0)}$.

La consistance des estimateurs s'établira à partir des convergences presque-sûres, conformément à la définition ci-dessus. Mais pour ce problème, il faudra certainement faire intervenir des arguments différents de ceux que nous avons employés ici, et le problème est ouvert.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. R. BARRA. "Analyse multilinéaire de l'interaction entre plusieurs facteurs". Istituto nazionale di alta matematica, Symposia mathematica, volume XXV (1981).
- [2] C. ROBERT. "Propriétés optimales de certains estimateurs d'interaction en analyse de variance". Thèse de 3e cycle, Grenoble, 1982.
- [3] J. R. BARRA. "Mathematical basis of statistics". Probability and mathematical statistics, Academic Press (1981).
- [4] S. DEGERINE. "Etude des structures statistiques associées aux lois de Von Mises". Thèse, Grenoble (1975).
- [5] K. R. GABRIEL. "Least squares approximation of matrices by additive and multiplicative models". J. Statist. Soc. B. 1978 - 40, n°2, pp. 186-196.
- [6] JOHNSON and GRAYBILL. "An analysis of a two-way model with interaction and no replication". Journal of the American Statistical Association, December 1972, vol. 67, n°340. Theory and methods section.
- [7] MILLIKEN and GRAYBILL. "Extensions of the General Linear Model". Journal of the American Statistical Association, June 1970, vol. 65, n°330. Theory and methods section.
- [8] SCHEFFÉ. "The analysis of variance". 1959, New-York, John Wiley & Sons.
- [9] TUCKEY. "One degree of freedom for non-additivity". Biometrics 5, September 1949, pp. 232-242.
- [10] WARD and DICK. "Non additivity in randomized block designs and balanced incomplete block designs". New-Zealand Journal of Science and Technology, 33, 1959, pp. 430-436.
- [11] Mille SEEBAAGH. Thèse - Grenoble A parafre (1982).