

STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

ALAIN BERTRANEU

Association univoque d'une préordonnance ultramétrique à une préordonnance donnée par une méthode géométrique

Statistique et analyse des données, tome 5, n° 2 (1980), p. 5-14

http://www.numdam.org/item?id=SAD_1980__5_2_5_0

© Association pour la statistique et ses utilisations, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Statistique et analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Statistique et Analyse des Données
2 - 1980 pp. 5-14

ASSOCIATION UNIVOQUE D'UNE PREORDONNANCE ULTRAMETRIQUE
A UNE PREORDONNANCE DONNEE PAR UNE METHODE GEOMETRIQUE

Alain BERTRANEU, u. e. r. de mathématique Université de
Toulouse III, Attaché Scientifique près
l'Ambassade de France à Jakarta.

RESUME

Dans cet article, l'ensemble des préordonnances de degré n est mis en correspondance biunivoque avec un ensemble de cônes convexes d'un certain espace vectoriel. Soit alors ω une préordonnance de degré n et Ω le cône correspondant. Nous montrons que l'ensemble des sous-cônes de Ω associés à des préordonnances ultramétriques de degré n admet un plus grand élément, pour l'inclusion, Ω_+ ; la préordonnance ω_+ correspondante est la préordonnance ultramétrique cherchée. Un algorithme simple permet de déterminer Ω_+ et donc ω_+ .

1) INTRODUCTION [1] [4] [5]

Précisons le vocabulaire utilisé : Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$ un ensemble fini, $n > 1$. Nous appelons préordonnance sur I une relation de préordre total sur

$$I'' = \{\{i, j\} \mid (i, j) \in I \times I, i \neq j\}$$

Une ordonnance sera un ordre total sur I'' . n sera le degré de la préordonnance. Une préordonnance sur I étant donnée, nous appellerons rang de la paire $\{k, m\} \in I''$, et noterons $r(k, m)$ le nombre entier :

$$r(k, m) = \text{card} \{\{i, j\} \mid \{i, j\} \in I'', \{i, j\} \leq \{k, m\}, \{k, m\} \not\leq \{i, j\}\} + 1$$

Une représentation de la préordonnance sera une figure $\{M_i\}_{i \in I}$ de points deux à deux distincts d'un espace affine euclidien telle que :

$$\{i, i'\} \leq \{j, j'\} \text{ et } \{j, j'\} \not\leq \{i, i'\} \implies \|M_i - M_{i'}\| < \|M_j - M_{j'}\|$$

et

$$\{i, i'\} \leq \{j, j'\} \text{ et } \{j, j'\} \not\leq \{i, i'\} \implies \|M_i^{\rightarrow} M_i\| = \|M_j^{\rightarrow} M_j\|$$

un indice de dissemblance sur I est une application de $I \times I$ dans \mathbb{R}_+ telle que :

$$\forall (i, j) \in I \times I, f(i, j) = f(j, i) \text{ et } f(i, i) = 0$$

Il est clair qu'un indice de dissemblance sur I permet de définir une préordonnance sur I par :

$$\forall (i, j) \in I \times I, \{i, j\} \leq \{i', j'\} \iff f(i, j) \leq f(i', j')$$

De même, à partir d'une préordonnance, il est facile de trouver un indice de dissemblance la définissant ; la relation "l'indice f et l'indice f' définissent la même préordonnance sur I" est une relation d'équivalence, et il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble quotient et l'ensemble des préordonnances.

Un indice f est dit ultramétrique si, de plus :

$$\forall i, j, k \in I, f(i, j) \leq \max \{f(i, k), f(j, k)\}$$

Il est clair alors que tout indice équivalent est aussi ultramétrique. Une préordonnance est dite ultramétrique si un (= tous) indice la réalisant est ultramétrique [2].

2) REPRESENTATION GEOMETRIQUE DES PREORDONNANCES [3]

Soit $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ un simplexe non dégénéré d'un espace affine A de dimension $n - 1$. Si E est l'espace vectoriel associé à A, on considère l'espace Q(E) des formes quadratiques définies sur E. Nous dirons que $q \in Q(E)$ réalise une préordonnance ω sur I, si l'indice :

$$f : \{i, j\} \rightarrow f(i, j) = q(M_i^{\rightarrow} M_j)$$

définit ω . Nous dirons de plus que q est propre relativement à $\{M_i\}_{i \in I}$ si q ne s'annule sur aucun couple de points distincts. (Si q est propre et si $q \in Q^+(E)$, ensemble des formes positives, il est clair que $\{M_i\}_{i \in I}$ est une représentation de la préordonnance, A étant muni de la métrique définie par q).

Considérons les formes $q_{ij} \in Q(E)$, $i < j$, $i, j \in I$

définies par :

$$q_{ij}(M_i^{\rightarrow} M_j) = 1, \quad i < j$$

$$q_{ij}(M_k^{\rightarrow} M_m) = 0 \text{ pour } \{k, m\} \neq \{i, j\}$$

Il est aisé de voir que ces formes sont définies de façon unique et qu'elles forment une base de Q(E). Dans cette base, la coordonnée de $q \in Q(E)$ sur q_{ij} est $q(M_i^{\rightarrow} M_j)$. Démontrons alors :

Proposition 1

Considérons un espace affine A de dimension $n - 1$ et E son espace vectoriel associé, A étant muni d'un repère affine $\{M_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ permettant de construire une base $(q_{ij})_{i < j}$ de Q(E) précédemment définie.

i) Soit ω une préordonnance de degré n sur $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et $r_1 = 1, r_2, \dots, r_p$ les p rangs distincts ($r_1 < r_2 < \dots < r_p$) des paires de I^{**} .

Soient f_1, \dots, f_p tels que :

$$f_m = \sum_{\{i,j\} \in J_m^{**}} q_{ij}, \quad J_m^{**} = \{\{i,j\} \in I^{**} \mid r(i,j) \geq r_m\}, \quad m = 1, \dots, p.$$

(on a $J_1^{**} = I^{**}$ et donc $f_1 = \sum q_{ij}$ pour tous les $\{i,j\}$).

Soit Ω le cône convexe engendré par f_1, \dots, f_p , que nous appellerons cône associé à ω . Alors, d'une part, l'ensemble des formes propres de $Q(E)$ (relativement à $\{M_i\}$) satisfaisant à ω est l'ensemble des points internes de Ω ; d'autre part, l'ensemble des formes non-propres, satisfaisant à ω , est l'ensemble des points internes du sous-cône convexe de Ω engendré par $\{f_2, \dots, f_p\}$ si cet ensemble n'est pas vide, et se réduit à la forme nulle sinon.

ii) Réciproquement, soit $\{A_1, \dots, A_p\}$ une suite finie, strictement décroissante de sous ensembles non vides de B , ensemble des q_{ij} , telle que $A_1 = B$.

Soient, $\forall m \in \{1, \dots, p\}$, $f_m = \sum q_{ij}$ pour $q_{ij} \in A_m$ (on a $f_1 = \sum q_{ij}$ sur toutes les paires $\{i,j\}$), et Ω engendré par f_1, \dots, f_p .

Alors, on peut associer à Ω , une préordonnance unique de degré n , telle que Ω soit son cône associé./.

i) Supposons tout d'abord que $p = 1$: tous les $\{i,j\}$ ont alors le même rang, $r_1 = 1$ et Ω se réduit à la demi droite λf_1 , $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Comme f_1 a pour coordonnées dans la base $(q_{ij})_{i < j}$, $(1, 1, \dots, 1)$, il est clair que l'ensemble des formes propres satisfaisant à ω , est $\{\lambda f_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}_+\}$ et que l'ensemble des formes non propres se réduise à $\{0\}$. Nous supposons maintenant $p > 1$; on a :

$$f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = 0 \quad \text{si } r(i,j) < r_m$$

$$f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = 1 \quad \text{si } r(i,j) \geq r_m$$

Soit q_1 un point interne de Ω :

$$q_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}_+^{**}, \quad \forall i = 1, \dots, p$$

Soit q_2 un point interne du sous cône convexe de Ω engendré par $\{f_2, \dots, f_p\}$; q_2 s'écrit :

$$q_2 = \sum_{i=2}^p \mu_i f_i, \quad \mu_i \in \mathbb{R}_+^{**}, \quad \forall i = 2, \dots, p$$

Remarquons de suite que q_1 est propre (car $f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = 1, \forall \{i,j\} \in I^{**}$) et que q_2 est non propre (car $f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = 0, \forall m \in \{2, \dots, p\}$, pour $\{i,j\}$ tel que $r(i,j) = 1$). En outre :

$$(r(i,j) = r(i',j')) \implies (f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = f_m(M_{i'}^{\rightarrow} M_{j'})) \quad \forall m \in \{1 \dots p\}$$

$$(r(i,j) < r(i',j')) \implies (f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) < f_m(M_{i'}^{\rightarrow} M_{j'})) \text{ pour } m$$

tel que $r(i,j) < r_m < r(i',j')$

$$(r(i,j) < r(i',j')) \implies (f_m(M_i \vec{M}_j) = f(M_i \vec{M}_j)) \text{ pour } m$$

$$\text{tel que } r_m \leq r(i,j) \text{ ou } r_m > r(i',j')$$

On en déduit que :

$$(r(i,j) = r(i',j')) \implies (q_h(M_i \vec{M}_j) = q_h(M_i \vec{M}_j)), \text{ pour } h = 1, 2$$

$$(r(i,j) < r(i',j')) \implies (q_h(M_i \vec{M}_j) \leq q_h(M_i \vec{M}_j)), \text{ pour } h = 1, 2$$

et donc que, r étant un indice définissant ω :

$$(r(i,j) \leq r(i',j')) \iff (q_h(i,j) \leq q_h(i',j')), \text{ pour } h = 1, 2$$

et par suite q_1 et q_2 satisfont à ω .

Réciproquement, soit q satisfaisant à ω :

$$q = \sum_{i < j} \alpha_{ij} q_{ij}, \quad \{i,j\} \in I^{**}$$

avec

$$\alpha_{ij} = q(M_i \vec{M}_j)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$q = \sum_{m=1}^p \alpha'_m f'_m, \text{ avec } f'_m = \sum q_{ij} \text{ pour } r(i,j) = r_m, m = 1, \dots, p$$

(il est clair que $\alpha'_m > \alpha'_s$, pour $s > 1$) ce qui peut s'écrire :

$$q = \alpha'_1 (f'_1 + \dots + f'_p) + (\alpha'_2 - \alpha'_1) (f'_2 + \dots + f'_p) + \dots + (\alpha'_p - \alpha'_{p-1}) f'_p$$

$$= \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_p f_p$$

avec $\alpha_m > 0$ pour $m = 2, \dots, p$ et $\alpha_1 \geq 0$ (car $\alpha_1 = q(M_i \vec{M}_j)$ pour $\{i,j\}$ de rang 1)

Nous voyons alors, que si $\alpha_1 > 0$, q est propre et est un point interne de Ω ; si $\alpha_1 = 0$, q est alors non propre et est un point interne du cône convexe engendré par f_2, \dots, f_p .

ii) $\forall m \in \{1, \dots, p\}$, soit $r_m = \text{card}(A_1 - A_m) + 1$. On a $r_1 = 1$.

soit :

$$r : I^{**} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$\{i,j\} \rightarrow r(i,j)$ défini par :

$$r(i,j) = r_m, m \text{ étant tel que } q_{ij} \in A_m \text{ et } q_{ij} \notin A_{m+1} \text{ (en posant } A_{p+1} = \emptyset)$$

Il est clair que r est un indice de dissemblance propre sur I qui définit une préordonnance ω sur I . Montrons que $r(i,j)$ est le rang de $\{i,j\}$ pour ω :

$$\text{Si } r(i,j) = r_m \text{ et } r(i',j') = r_m,$$

$$(\{i',j'\} \leq \{i,j\}, \{i,j\} \not\leq \{i',j'\}) \iff (r_m, < r_m) \iff (m' < m) \iff (q_{i',j'} \notin A_m)$$

et

$$\text{card} \{ \{i',j'\} \mid \{i',j'\} \leq \{i,j\}, \{i,j\} \not\leq \{i',j'\} \} + 1 = \text{card}(A_1 - A_m) + 1$$

$$= r(i,j)$$

alors $\forall m \in \{1, \dots, p\}$, $f'_m = \sum q_{ij}$ pour $q_{ij} \in A_m$, entraîne que $f_m = \sum q_{ij}$ pour $\{i,j\}$ tel que $r(i,j) \geq r_m$ et Ω est le cône associé à ω .

Par i) des préordonnances différentes auront des cônes associés différents, ils n'ont même aucun point commun qui soit interne aux deux ; on déduit alors l'unicité de ω pour ii) \square

REMARQUE

L'association biunivoque qui précède aurait pu être établie à partir du résultat général suivant : "L'ensemble des préordres totaux sur un ensemble fini X , ordonné par l'inclusion entre parties de $X \times X$ est un sup-demi-treillis coatomique".

Dans ce formalisme, l'association précédemment décrite consiste à associer à toute préordonnance ω les coatomes $\omega_1, \dots, \omega_p$ du treilli des préordres totaux sur I^* qui majorent ω . Ainsi $\omega = \bigcap_i \omega_i$.

L'énoncé du résultat pourrait ainsi prendre une forme plus simple ; il convient de noter à cet égard que la construction géométrique décrite dans cette proposition a été utilisée pour obtenir des résultats relatifs à la représentation euclidienne d'une préordonnance (cf. [4]) et présente donc un intérêt par elle-même.

3) ULTRAMETRIQUE ASSOCIEE A UNE PREORDONNANCE [3]

Nous reprenons les notations de la proposition 1 :

Proposition 2

Soit ω une préordonnance sur I et Ω le cône associé ; soit $\{f_1, \dots, f_p\}$ l'ensemble des formes engendrant Ω . Soit $\{f_i\}_{i \in J}$, $J \subset \{1, \dots, p\}$ l'ensemble des formes f_i positives et Ω_+ le cône convexe engendré par ces formes. Alors Ω_+ contient f_j et la préordonnance ω_+ définie par Ω_+ est ultramétrique. De plus Ω_+ est le plus grand cône pour l'inclusion associé à une préordonnance ultramétrique inclus dans Ω . Ω_+ sera appelé sous cône ultramétrique associé à Ω .

Démontrons tout d'abord les lemmes :

Lemme 1

Soit ω une préordonnance sur I et Ω le cône associé. Alors si f' et f'' de Ω satisfont à l'inégalité ultramétrique, quels que soient α, β de \mathbb{R}_+ , $\alpha f' + \beta f''$ y satisfait aussi.

Remarquons tout d'abord que : $\forall f', f'' \in \Omega, \forall i, j, k \in I,$

$$(f'(M_i^{\rightarrow} M_j) < f'(M_i^{\rightarrow} M_k)) \implies (f''(M_i^{\rightarrow} M_j) \leq f''(M_i^{\rightarrow} M_k))$$

En effet, $r(i, j) = r(i, k)$ entraîne que $f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = f_m(M_i^{\rightarrow} M_k)$, $\forall m \in \{1, \dots, p\}$

et donc

$$f'(M_i^{\rightarrow} M_j) = f'(M_i^{\rightarrow} M_k);$$

De plus, $r(i,j) < r(i,k)$ entraîne que

$$f_m(\vec{M}_i \vec{M}_j) < f_m(\vec{M}_i \vec{M}_k) \text{ si } r(i,j) < r_m \leq r(i,k)$$

et que

$$f_m(\vec{M}_i \vec{M}_j) = f_m(\vec{M}_i \vec{M}_k) \text{ si non.}$$

par suite,

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_j) \leq f'(\vec{M}_i \vec{M}_k)$$

et

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_j) \leq f''(\vec{M}_i \vec{M}_k)$$

d'où :

$$(f'(\vec{M}_i \vec{M}_j) < f'(\vec{M}_i \vec{M}_k)) \implies (r(i,j) < r(i,k)) \implies (f''(\vec{M}_i \vec{M}_j) \leq f''(\vec{M}_i \vec{M}_k))$$

Soient maintenant i, j, k donnés. Deux cas se présentent :

1er cas

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_j) < \max [f'(\vec{M}_i \vec{M}_k), f'(\vec{M}_k \vec{M}_j)]$$

ce qui entraîne évidemment :

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_k) = f'(\vec{M}_k \vec{M}_j)$$

On a alors :

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_j) \leq f''(\vec{M}_i \vec{M}_k)$$

ou

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_j) \leq f''(\vec{M}_k \vec{M}_j)$$

Il est alors aisé de voir que l'inégalité ultramétrique est vérifiée pour $\alpha f' + \beta f''$.

2ème cas

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_j) = \max [f'(\vec{M}_i \vec{M}_k), f'(\vec{M}_k \vec{M}_j)]$$

et

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_j) = \max [f''(\vec{M}_i \vec{M}_k), f''(\vec{M}_k \vec{M}_j)]$$

Deux éventualités peuvent alors se produire :

1er sous cas

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_k) < f'(\vec{M}_k \vec{M}_j)$$

On a alors :

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_k) \leq f''(\vec{M}_k \vec{M}_j)$$

et donc :

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_j) = f'(\vec{M}_k \vec{M}_j)$$

et

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_j) = f''(\vec{M}_k \vec{M}_j)$$

ce qui implique que l'inégalité ultramétrique est encore vraie pour $\alpha f' + \beta f''$.

2ème sous cas

$$f'(\vec{M}_i \vec{M}_k) = f'(\vec{M}_k \vec{M}_j) = f'(\vec{M}_i \vec{M}_j)$$

et

$$f''(\vec{M}_i \vec{M}_k) = f''(\vec{M}_k \vec{M}_j) = f''(\vec{M}_i \vec{M}_j)$$

et le résultat est alors trivial \emptyset

Lemme 2

Soit ω une préordonnance sur I et Ω , engendré par f_1, f_2, \dots, f_p le cône associé à ω . Soit $\hat{\omega}$ une préordonnance sur I est engendré par un sous-ensemble $\{f_i\}_{i=1, \dots, p}$.

D'après la proposition 1, nous savons que tout cône associé à une préordonnance donnée peut être engendré par des formes f'_1, \dots, f'_h , dont les coordonnées dans la base $(q_{ij})_{i < j}$ sont égales soit à "zéro" soit à "un".

Or, il est clair que toute forme $f \in \Omega$:

$$f = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}_+$$

ne peut être de ce type que si tous les α_i sont nuls sauf un, égal alors à 1 car, s'il n'en était pas ainsi, et si $\alpha_i \neq 0, \alpha_j \neq 0$ étaient les deux premiers éléments non nuls, $\forall (k, m)$ tel que $r(k, m) = r_i$, $\forall (k', m')$ tel que $r(k', m') = r_j$, les coordonnées de f suivant q_{km} et $q_{k'm'}$ seraient respectivement α_i et $\alpha_i + \alpha_j \notin \mathbb{R}_+$

Lemme 3

Soit $f \in Q(E)$ tel que $f = \sum q_{ij}$, la somme étant étendue à un sous ensemble non vide quelconque de I . Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit positive est que :

$$\forall i, j, k, \text{ distincts de } I, f(M_i M_j) \leq \max(f(M_i M_k), f(M_j M_k)) \quad ./.$$

soit \sim la relation sur $I = \{i, \dots, n\}$:

$$\forall i, j \in I, (i \sim j) \iff (f(M_i M_j) = 0)$$

Cette relation est évidemment réflexive et symétrique. Montrons que \sim est une relation d'équivalence si et seulement si, quels que soient i, j, k distincts de I ,

$$(3,1) \quad f(M_i M_j) \leq \max(f(M_i M_k), f(M_j M_k))$$

est vérifiée.

Il est clair que si (3,1) est vérifiée et si $i \sim j$ et $j \sim k$, alors $j \sim k$.

Réciproquement $\forall i, j, k \in I$, (3,1) est manifestement réalisé si $f(M_i M_k)$ ou $f(M_j M_k)$ vaut 1.

Si ces deux derniers termes sont nuls et si \sim est une relation d'équivalence, alors $i \sim k$, $k \sim j$ et donc $i \sim j$; (3,1) est alors vérifiée.

Supposons maintenant (3,1) vérifiée; \sim est une relation d'équivalence et notons I_0, I_1, \dots, I_m les éléments de I/\sim . Considérons maintenant le m -simplexe régulier de \mathbb{R}^m d'arête 1 et qui contient donc $m + 1$ sommets numérotés de 0 à m . Plaçons au sommet k les points $\{N_i\}_{i \in k}$,

$\forall k = 0, \dots, m$. Nous avons alors :

$$\forall (i, j) \in I \times I, \|N_i N_j\|^2 = f(M_i M_j)$$

ce qui assure que f est positive et de rang m .

Montrons maintenant que réciproquement, si f est positive, alors (3,1) est vérifiée : en effet, si nous supposons f de rang p , il existe alors une figure euclidienne de \mathbb{R}^p , $\{N_i\}_{i \in I}$ telle que :

$$\|N_i N_j\|^2 = f(M_i M_j), \quad \forall (i, j) \in I \times I$$

Il est clair alors que, les $\|N_i N_j\|^2$ étant égaux à "zéro" ou "un" que :

$$\|N_i N_j\|^2 \leq \max(\|N_i N_k\|^2, \|N_j N_k\|^2)$$

et le lemme 3 est prouvé \square

Lemme 4

Soit ω une préordonnance ultramétrique sur I . Notons Ω le cône associé engendré par :

$$f_1, \dots, f_p$$

Alors, $\forall m \in \{1, \dots, p\}$, f_m est positive./.

Soit donc ω une préordonnance ultramétrique. Il en existe, car f_1 satisfait évidemment à l'inégalité ultramétrique.

Il résulte de la proposition 1 que toute forme interne à Ω satisfait à l'inégalité ultramétrique, c'est à dire, quels que soient i, j, k , distincts de I ,

$$(3,2) \quad q(M_i^{\rightarrow} M_j) \leq \max \{q(M_i^{\rightarrow} M_k), q(M_j^{\rightarrow} M_k)\}$$

si $p > 1$, supposons alors qu'il existe $m \in \{1, \dots, p\}$ et un triplet $(i, j, r) \in I \times I \times I$ tels que :

$$f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) > \max \{f_m(M_i^{\rightarrow} M_k), f_m(M_j^{\rightarrow} M_k)\}$$

Alors

$$f_m(M_i^{\rightarrow} M_j) = 1 \text{ et } f_m(M_i^{\rightarrow} M_k) = f_m(M_j^{\rightarrow} M_k) = 0$$

Notons $J' = \{1, \dots, p\} - \{m\}$ et soit q interne à Ω défini par :

$$q = \lambda \left(\sum_{s \in J'} f_s \right) + f_m, \lambda \in \mathbb{R}_+^{**}$$

Nous allons voir qu'il est possible de choisir λ tel que q ne satisfasse pas à (3,2); en effet:

$$q(M_i^{\rightarrow} M_j) - q(M_i^{\rightarrow} M_k) = 1 + \lambda \left(\sum_{s \in J'} f_s(M_i^{\rightarrow} M_j) - \sum_{s \in J'} f_s(M_i^{\rightarrow} M_k) \right)$$

Nous voyons que nous pouvons toujours, étant donné notre hypothèse sur f_m , trouver $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$\lambda < \varepsilon_1 \text{ entraîne } q(M_i^{\rightarrow} M_j) - q(M_i^{\rightarrow} M_k) > 0$$

De même nous pouvons trouver ε_2 tel que :

$$\lambda < \varepsilon_2 \text{ entraîne } q(M_i^{\rightarrow} M_j) - q(M_j^{\rightarrow} M_k) > 0$$

Alors, pour $\lambda < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, q interne à Ω ne satisfait pas à (3,2) et, en conséquence

$\forall m \in \{1, \dots, p\}$, f_m satisfait à l'inégalité ultramétrique. D'après le lemme 3 :

$\forall m \in \{1, \dots, p\}$, f_m est positive \square

Démontrons maintenant la proposition :

Nous savons que f_1 est positive ; Ω_+ est donc non vide, contient f_1 et d'après la proposition 1, est un cône définissant une préordonnance ω_+ .

D'après le lemme 3, $\forall j \in J$, f_j satisfait à l'inégalité ultramétrique. J étant fini, par application du lemme 1, quel que soit f , interne à Ω_+ , f satisfait à l'inégalité ultramétrique. La préordonnance ω_+ définie par Ω_+ est donc ultramétrique.

D'après le lemme 2, tout sous cône de Ω associé à une préordonnance est engendré par un seul ensemble de $\{f_i\}_{i \in \{1, \dots, p\}}$ et d'après le lemme 4, un cône associé à une préordonnance ultramétrique est engendré par des formes positives.

Il est clair alors que Ω_+ est maximum \emptyset

REMARQUE 1

Dans le cas où ω est ultramétrique, on a évidemment $\Omega_+ = \Omega$.

REMARQUE 2

Il est possible de caractériser ω_+ , sans utiliser la représentation géométrique : Dans le treillis des préordres totaux sur I , l'ensemble des préordonnances ultramétriques qui majorent une préordonnance ω admet un plus petit élément ω_+ .

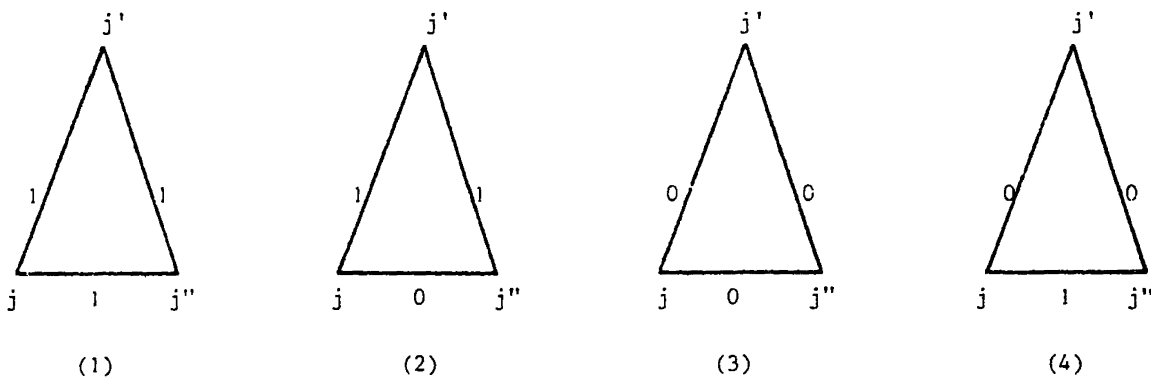
De plus ω_+ est égale à l'intersection des coatomies ultramétriques (cf. Proposition 1, Remarque); ce résultat a été établi depuis, sous une forme légèrement différente par Schader (cf. [7]).

4) CONCLUSION ET PRINCIPE DE LA RECHERCHE DE Ω_+ [3]

Une préordonnance ω sur I étant donnée, il suffit donc de rechercher, parmi les formes f_i engendrant Ω , celles qui sont positives pour trouver Ω_+ et donc, la préordonnance ultramétrique associée.

Pour la recherche des formes f_i positives, notre algorithme utilisera le fait que si $f_i \in Q^+(E)$, on peut construire une figure euclidienne dont f_i donne le carré des distances.

A cet effet, considérons le graphe complet, non orienté, sans boucles, dont l'ensemble des sommets est I . Affectons à chaque arête (j, j') la valeur $f_i(M_j^{\rightarrow} M_{j'})$, et supposons que $\text{card}(I) \geq 3$; pour chaque ensemble de trois sommets distincts, les quatre configurations suivantes sont possibles :



Seule la configuration (4) est non ultramétrique. f_i sera donc positive si la configuration (4) n'apparaît pas.

A l'issue d'un programme de tri, les tableaux COU $(N, 2)$ et DIST (N) sont constitués : si n est le nombre de points, COU contient les $N = n(n-1)/2$ couples (i, j) , COU $(J, 1)$ contient i , COU $(J, 2)$ contient j , $i < j$, et DIST (J) contient l'indice de dissemblance du couple (i, j) , les indices de dissemblance étant rangés par ordre croissant.

COU		i		i'	$i < j, i' < j'$
		j		j'	
DIST		$d(i, j)$		$d(i', j')$	$d(i, j) \leq d(i', j')$

La représentation géométrique de 2) étant supposée faite avec les vecteurs de base (q_{ij}) rangés dans l'ordre spécifié par notre tableau COU (et donc dans un ordre correspondant à la pré-ordonnance associée à l'indice de dissemblance de DIST), l'algorithme se propose de vérifier si la forme

$$f_k = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$$

possédant $k - 1$ "zéros" comme premières coordonnées sur la base q_{ij} est positive ou non ; la proposition 2 pourra ainsi être appliquée. L'algorithme complet est décrit dans [3].

La méthode proposée présente beaucoup de points communs avec l'algorithme lexicographique de LERMAN (cf [5]) ; toutefois, dans notre cas, le graphe de la relation de préordre sur I , est toujours un sous-graphe de celui du préordre ultramétrique obtenu, alors que ce n'est pas toujours le cas avec la méthode lexicographique.

De plus, une étude comparative des deux méthodes montre que notre résultat est, soit le même que celui de LERMAN, soit s'en déduit en supprimant un ou plusieurs niveaux de stratification.

RERERENCES

1. BENZECRI J.P. Sur l'analyse factorielle des proximités ; Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 13 (1964) 235-282
2. BENZECRI J.P. L'analyse des données T_1 ; Dunod 1973.
3. BERTRANEU A. L'analyse des proximités. Bases géométriques et méthode - thèse 3ème cycle Univ. Toulouse III, 1979.
4. BERTRANEU, FICHET, FIESCHI. Un algorithme d'analyse des proximités. Seconde journée internationale sur l'analyse des données (Actes) ; Versailles 17-18-19 octobre 1979
5. LERMAN I.C. Les bases de la classification automatique. (Gautier - Villars)
6. BOUROCHE J.M. Analyse des données en marketing ; Masson 1977.
7. SCHADER Hierarchical Analysis : Classification with ordinal object dissimilarities. Metrika 1979.
8. SHEPARD The Analysis of proximities ; Psychometrika, 27 (1962) 125-140.