STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

PH. PICARD

Test et estimation pour une classe de processus bidimensionnels

Statistique et analyse des données, tome 3, nº 3 (1978), p. 45-55
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1978__3_3_45_0>

Statistique et Analyse des Données
3 - 1978 pp. 45, 55

TEST ET ESTIMATION POUR UNE CLASSE DE PROCESSUS BIDIMENSIONNELS

par Ph. PICARD
Université de Lyon 1 - Département de Mathématiques

RESUME : Pour un processus de naissance bidimensionnel à générateurs infinitésimaux de rapport constant, la théorie des martingales fournit, relativement à divers temps d'arrêt, des relations remarquables assez simples. On utilise ici ces relations pour résoudre plusieurs problèmes de test ou d'estimation, lorsque la collecte des données est réalisée de façon continue et en accord avec les temps d'arrêt considérés.

1 - INTRODUCTION

Nous considérerons la classe C des processus de naissance bidimensionnels $(X_t,Y_t)_{t \geq 0}$ pour lesquels *les générateurs infinitésimaux* $\lambda_{ij}(t)$ et $\mu_{ij}(t)$ *sont dans un rapport constant.* De façon précise, (X_t,Y_t) est à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, à trajectoires continues à droite, et, pour $\Delta t > 0$

$$(1\text{-}1) \qquad P(X_{t+\Delta t} = i',Y_{t+\Delta t} = j'/X_t=i,Y_t=j) = \begin{cases} (\lambda_{ij}(t)+\varepsilon_1)\Delta t & \text{si} \quad i' = i+1, \ j' = j \\ (\mu_{ij}(t)+\varepsilon_2)\Delta t & \text{si} \quad i' = i, \ j' = j+1 \\ 1-(\lambda_{ij}(t)+\mu_{ij}(t)-\varepsilon_3)\Delta t & \text{si} \quad i' = i, \ j' = j \\ \varepsilon_4 \, \Delta t & \text{si} \quad i' < i \quad \text{ou} \quad j' < j \\ & \text{ou} \quad i'-i+j'-j > 1 \end{cases}$$

avec des ε_r, pour $r = 1, 2, 3, 4$, de somme nulle et infiniment petits avec Δt (et ce uniformément en i, j, t), tandis que les $\lambda_{ij}(t)$ et $\mu_{ij}(t)$ sont respectivement de la forme $\lambda f(i,j,t)$ et $\mu f(i,j,t)$ pour des λ et μ constantes positives et $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Cette fonction f sera prise continue de sa dernière variable (uniformément en i, j, t), et vérifiant

$$(1\text{-}2) \qquad \forall\, t \geq 0, \qquad E\{f(X_t,Y_t,t)\} < +\infty$$

On suppose de plus données les valeurs initiales x_o et y_o.

Une application intéressante de ces processus est la reconstitution de processus de naissance et décès (dits processus N-D) unidimensionnels, en posant

$$N_t = X_t - Y_t$$

dans le cas où $f(i,j,t)$ ne dépend en fait que de $i-j$ et de t, et où $f(i,i,t) = 0$ pour tout t et tout i. L'état 0 étant alors absorbant, N_t sera à valeurs dans $\mathbb{N}$ si $x_o > y_o$. Pour cette classe (notée C_1), X_t sera interprétée comme donnant le nombre cumulé des naissances à la date t, tandis que Y_t sera celui des décès et N_t l'effectif actuel de la population. Le cas particulier le plus remarquable est celui du processus N.D. linéaire homogène ; la classe C_1 en constitue une généralisation. On sait que des résultats précis et explicites peuvent rarement être obtenus pour les processus N.D. en dehors du cas linéaire, cependant on peut constater que, dans certains cas, ce n'est pas en fait la linéarité des générateurs infinitésimaux qui importe, mais simplement la constance qu'elle entraîne pour le rapport de ces générateurs. De tels résultats valent donc pour toute la classe C_1. En particulier, *lorsque f est connue*, cette seule hypothèse permet d'aborder plusieurs problèmes statistiques *sur* λ *et* μ, aussi facilement que dans le cas linéaire. Comme ces méthodes valent aussi pour la classe C, il n'y a aucune raison de se limiter à la classe C_1. L'extension aux processus multi-dimensionnels est d'ailleurs immédiate.

Nous définirons au § 2 une martingale U_t dont on tirera au § 3 la relation $E(U_T) = 1$ en utilisant un temps d'arrêt convenable. Le § 4 donne la fonction de vraisemblance du processus lorsqu'il est observé de façon continue et que f est supposée connue. On constate que X_T, Y_T et $\int_o^T f(X_u,Y_u,u)du$ forment un résumé exhaustif pour (λ,μ) dont la fonction caractéristique, pour certains T, peut se déduire de $E(U_T)$.

Ceci est exploité au § 5. Au § 6 figurent quelques indications sur le cas multidimensionnel.

2 - CONSTRUCTION D'UNE MARTINGALE ASSOCIEE AU PROCESSUS $(X_t,Y_t)_{t \geq 0}$

On notera F_t la tribu engendrée par les X_u,Y_u correspondant à $0 \leq u \leq t$.

Déterminons deux fonctions $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, cette dernière ayant les mêmes propriétés que f, telles que, en posant

$$Z_t = \int_o^t h(X_u,Y_u,u)\,du \tag{2-1}$$

puis

$$U_t = a(X_t,Y_t)e^{-Z_t} \tag{2-2}$$

on obtienne une martingale $(U_t,F_t)_{t \geq 0}$.

Les conditions à remplir seront en principe, pour $0 \leq t_o \leq t$,

$$E\{|a(X_t,Y_t)e^{-Z_t}|\} < +\infty \tag{2-3}$$

$$E\{a(X_t,Y_t)e^{-Z_t}/F_{t_o}\} = a(X_{t_o},Y_{t_o})e^{-Z_{t_o}} \tag{2-4}$$

mais en fait, en choisissant a borné, on pourra assurer d'office la condition (2-3).

Posons

$$m(t) = E_{t_o}(a(X_t,Y_t)e^{-Z_t}) \qquad \text{avec} \qquad E_{t_o} = E(\quad /F_{t_o}) \tag{2-5}$$

On obtiendra pour $\Delta t > 0$

$$m(t+\Delta t)-m(t) = E_{t_o}\{a(X_{t+\Delta t},Y_{t+\Delta t})e^{-Z_{t+\Delta t}} - a(X_t,Y_t)e^{-Z_t}\} \tag{2-6}$$

que nous allons calculer en utilisant le fait que $E_{t_o} = E_{t_o} E_t$. Or :

$$E_t\{a(X_{t+\Delta t},Y_{t+\Delta t})e^{-Z_{t+\Delta t}}\} = \Big[(\lambda_{X_tY_t}+\varepsilon_1)\Delta t.a(X_t+1,Y_t)e^{-A} + (\mu_{X_tY_t}+\varepsilon_2)\Delta t.a(X_t,Y_t+1)e^{-B} \tag{2-7}$$
$$+ (1-(\lambda_{X_tY_t}+\mu_{X_tY_t} - \varepsilon_3)\Delta t)\ a(X_t,Y_t)e^{-C} + \varepsilon_4\Delta t.D \Big] e^{-Z_t}$$

avec $\qquad A = \int_t^{t+\theta\Delta t} h(X_t,Y_t,u)\,du + \int_{t+\theta\Delta t}^{t+\Delta t} h(X_t+1,Y_t,u)du \qquad 0 < \theta \le 1$

($t+\theta\Delta t$ étant l'instant où X_u change de valeur), B ayant une expression analogue mais correspondant à un changement de valeur pour Y_u, D étant bornée et

$$C = \int_t^{t+\Delta t} h(X_t,Y_t,u)\,du$$

En portant (2-7) dans (2-6) on obtient :

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{m(t+\Delta t)-m(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \downarrow 0} E_{t_o}\Bigg\{\Big[\lambda_{X_tY_t}(a(X_t+1,Y_t)e^{-A} - a(X_t,Y_t)e^{-C}) \tag{2-8}$$
$$+ \mu_{X_tY_t}(a(X_t,Y_t+1)e^{-B} - a(X_t,Y_t)e^{-C})$$
$$+ a(X_t,Y_t)\frac{e^{-C}-1}{\Delta t}\Big] e^{-Z_t}\Bigg\}$$

On sait que, d'après le théorème de la moyenne,

$$\left|\frac{1-e^{-C}}{\Delta t}\right| \le h(X_t,Y_t,t+\theta_1\Delta t) \qquad 0 < \theta_1 < 1$$

et la continuité de h relativement à sa dernière variable permet de majorer cette expression par $1+h(X_t,Y_t,t)$ si Δt est assez faible. Il suffira d'avoir

$$E\{h(X_t,Y_t,t)\} < +\infty \tag{2-9}$$

pour pouvoir passer à la limite dans (2-8) par convergence dominée et obtenir

$$m'_d(t) = E_{t_o}\Bigg\{\Big[\lambda_{X_tY_t}(a(X_t+1,Y_t) - a(X_t,Y_t)) \tag{2-10}$$
$$+ \mu_{X_tY_t}(a(X_t,Y_t+1) - a(X_t,Y_t))$$
$$- h(X_t,Y_t,t)\ a(X_t,Y_t)\Big] e^{-Z_t}\Bigg\}$$

On parviendra à la même expression pour la dérivée à gauche m'_g, en posant $\Delta t' = -\Delta t > 0$ et calculant

$$\frac{m(t'+\Delta t')-m(t')}{\Delta t'} = \frac{m(t'-\Delta t+\Delta t)-m(t'-\Delta t)}{\Delta t}$$

comme ci-dessus avec $t = t'-\Delta t$, et en utilisant le fait que, en t', une trajectoire du processus est p.s. continue. Connaissant alors m'(t), on pourra annuler cette dérivée en prenant pour tous i,j,t

$$h(i,j,t)\ a(i,j) = \lambda_{ij}(t)(a(i+1,j)-a(i,j))+\mu_{ij}(t)(a(i,j+1)-a(i,j)) \tag{2-11}$$

On aura alors

$$m(t) = cte = m(t_o)$$

c'est-à-dire :

$$E_{t_o}(a(X_t,Y_t)e^{-Z_t}) = E_{t_o}(a(X_{t_o},Y_{t_o})e^{-Z_{t_o}}) = a(X_{t_o},Y_{t_o})e^{-Z_{t_o}}$$

c'est-à-dire (2-4). Pour satisfaire (2-11) nous ne recherchons pas la solution la plus générale et nous nous contentons d'une solution très simple. Prenons

(2-12) $\qquad h = \xi f \qquad \xi$ constante positive ou nulle

(2-9) sera donc satisfaite. Ensuite cherchons a de la forme

$$a(i,j) = w^i\, v^j \qquad w > 0,\ v > 0$$

Cette expression portée dans (2-11) donne

(2-13) $$\xi = \lambda(w-1) + \mu(v-1)$$

ce qui fournit v en fonction de w et, pour avoir $v > 0$, il faudra prendre

(2-14) $$0 < w < 1 + \frac{\mu+\xi}{\lambda}$$

Il ne nous reste plus qu'à assurer a borné en choisissant w convenablement, ce qui sera aisé dans les cas particuliers utiles suivants.

α) *Si* $(X_t,Y_t)_t$ *est p.s. borné.* Dans (2-11) on n'a alors à considérer qu'un ensemble fini de couples (i,j) sur lequel a est nécessairement borné. Il suffit donc de vérifier (2-14).

β) Y_t *est p.s. bornée.* Il suffira de prendre $0 < w < 1$.

γ) $X_t \geq Y_t + K$ *p.s. pour une constante K.* Alors

$$a(X_t,Y_t) = (vw)^{X_t}\, v^{Y_t-X_t} \leq v^{-K}$$

Si on prend $vw \leq 1$ et $v \geq 1$, c'est-à-dire

(2-15) $$\lambda w^2 - (\lambda+\mu+\xi)\, w+\mu \geq 0$$

(2-16) $$w \leq 1 + \xi/\lambda$$

Notons w_1 et w_2 les deux zéros du trinôme (2-15) (avec $w_1 < w_2$) il nous suffira de retenir

(2-17) $$0 < w \leq w_1$$

δ) $K_1 + Y_t \geq X_t \geq K + Y_t$ *p.s. pour des constantes K et* K_1. On procède alors comme en γ) mais sans poser $v \geq 1$, il n'y a donc que (2-14) et (2-15) à satisfaire, soit

(2-18) $$0 < w \leq w_1 \qquad \text{ou} \qquad w_2 \leq w < 1 + \frac{\mu+\xi}{\lambda}$$

On peut donc conclure

<u>Proposition 1</u> : *Si w est choisi comme en α, β, γ ou δ, on a une martingale* $(U_t,F_t)_{t\geq 0}$ *avec*

$$U_t = w^{X_t}\left(1 + \frac{\xi}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}(w-1)\right)^{Y_t} e^{-\xi\int_0^t f(X_u,Y_u,u)du}$$

De plus $\quad \sup_{t\geq 0} |U_t| < +\infty$.

3 - DEFINITION DE TEMPS D'ARRET

Dans la suite nous poserons $x_o = y_o = 0$, ce qui simplifiera les expressions, sans restreindre la généralité.

Nous allons choisir pour temps d'arrêt

(3-1) $$T = \inf \{t:(X_t,Y_t) \in \Delta\}$$

Δ étant une partie de $\mathbb{N}^2$ ne contenant pas (0,0), et nous souhaitons pouvoir écrire

(3-2) $$E(U_T) = E(U_o) = 1$$

Pour cela (cf. KARLIN and TAYLOR, p. 320) il nous suffit que T soit p.s. finie, et que la proposition 1 puisse être appliquée.

Pour établir le 1er point, on pourra utiliser la chaîne de Markov (X_{t_n},Y_{t_n}) où t_n est l'instant de la $n^{\text{ième}}$ naissance (on pose $t_o = 0$). Cette chaîne est en effet une simple marche aléatoire sur $\mathbb{N}^2$ qui présente mêmes états absorbants que le processus initial. Toute trajectoire pour la marche aléatoire qui conduit dans Δ en un nombre fini de pas, donnera pour le processus initial une trajectoire conduisant dans Δ en une durée p.s. finie. Il sera facile de vérifier qu'il en va bien ainsi dans les cas suivants.

<u>3.1 - $T = \inf \{t:X_t+Y_t = k\}$, $k > 0$ constant tel que $f(i,j,t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ et pour $i+j < k$</u>

Avec un tel temps d'arrêt le processus sera stoppé dès sa $k^{\text{ième}}$ transition ; seuls les (i,j) vérifiant $i+j < k$ joueront donc un rôle. Pour les (i,j) vérifiant $i+j \geq k$ la valeur de f est sans importance, on peut donc toujours supposer que cette valeur est nulle. On retombe alors sur la situation décrite au § 2 en α) et la martingale $(U_t)_t$ peut être utilisée avec w vérifiant (2-14).

On pourra noter également que (1-2) se trouve automatiquement remplie.

<u>3.2 - $T = \inf \{t:Y_t = k\}$, $k > 0$ constant tel que $f(i,j,t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ et pour $j < k$</u>

Avec ce temps d'arrêt, seuls les (i,j) pour lesquels $j < k$ jouent un rôle. On pourra donc supposer f nulle pour $j \geq k$, et retomber sur la situation décrite au § 2 en β).

<u>3.3 - $T = \inf \{t : X_t-Y_t = n_1$ ou $X_t-Y_t = n_2\}$, n_1 et n_2 donnés tels que $n_1 < 0 < n_2$ et $f(i,j,t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ et $n_1 < i-j < n_2$</u>

Avec ce temps d'arrêt on se placera dans la situation δ du § 2.

On déduit de tout ceci

<u>Proposition 2</u> : *Pour les temps d'arrêt 3.1, 3.2 et 3.3*

(3-3) $$E\{w^{X_T}\left(1 + \frac{\xi}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}(w-1)\right)^{Y_T} e^{-\xi\int_0^T f(X_u,Y_u,u)du}\} = 1$$

w étant choisi respectivement comme au § 2 en α, β et δ .

4 - VRAISEMBLANCE DU PROCESSUS POUR UNE OBSERVATION CONTINUE DE 0 à T (f SUPPOSEE CONNUE)

Soit k le nombre des naissances observées, $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_k$ les intervalles de temps écoulés entre deux naissances (τ_1 sera la durée écoulée entre la date 0 et la 1ère naissance), $Q_1, Q_2 \ldots Q_k$ des indices indiquant si un événement correspond à l'accroissement de X_t (l'indice Q correspondant prenant la valeur 1) ou de Y_t (l'indice prenant la valeur 0). L'ensemble des observations sera ainsi résumé par $\{\tau_i, Q_i \;;\; i = 1, 2 \ldots k\}$ et on posera $t_i = \sum_{j=o}^{i} \tau_j$ avec $\tau_o = 0$. Alors x_t et y_t étant les valeurs observées de X_t et Y_t à la date t

$$x_{t_i} = \sum_{j=1}^{i} Q_j \qquad\qquad y_{t_i} = \sum_{j=1}^{i} (1-Q_j)$$

et comme entre les dates t_k et T aucune naissance ne se produit

$$x_T = x_{t_k} \qquad y_T = y_{t_k} \qquad x_T + y_T = k$$

Supposons les t_j, x_{t_j} et y_{t_j} connus pour j = 0, 1,... i-1, la vraisemblance du couple (τ_i, Q_i) pour $i \in [1,k]$ sera

$$(4\text{-}1) \qquad \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{Q_i} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{1-Q_i} (\lambda+\mu) f(x_{t_{i-1}}, y_{t_{i-1}}, t_i) e^{-(\lambda+\mu)\int_0^{\tau_i} f(x_{t_{i-1}}, y_{t_{i-1}}, t_{i-1}+u)du}$$

formule dans laquelle on pourra poser $v = t_{i-1}+u$. La fonction de vraisemblance de toutes les données $\{\tau_i, Q_i \ ; \ i = 1, 2....k\}$ sera donc

$$L = \prod_{i=1}^{k} \lambda^{Q_i} \mu^{1-Q_i} f(x_{t_{i-1}}, y_{t_{i-1}}, t_i) \, e^{-(\lambda+\mu)\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x_{t_{i-1}}, y_{t_{i-1}}, v)dv} . e^{-(\lambda+\mu)\int_{t_k}^{T} f(x_{t_k}, y_{t_k}, v)dv}$$

$$= K \, \lambda^{\sum_1^k Q_i} \mu^{\sum_1^k (1-Q_i)} e^{-(\lambda+\mu) \sum_1^{k+1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(x_{t_{i-1}}, y_{t_{i-1}}, v)dv}$$

en posant pour un instant $T = t_{k+1}$ et groupant dans le terme K tout ce qui ne dépend pas de λ ou μ. Comme sur (t_{i-1}, t_i), $x_v = x_{t_{i-1}}$ et $y_v = y_{t_{i-1}}$, on parvient à l'expression

$$(4\text{-}2) \qquad L = K \, \lambda^{x_T} \mu^{y_T} e^{-(\lambda+\mu) \int_0^T f(x_v, y_v, v)dv}$$

Il est donc clair que x_T, y_T et $\int_0^T f(x_v, y_v, v)dv$ forment un *résumé exhaustif pour* λ *et* μ .

On peut déduire de (4-2) les *estimateurs du maximum de vraisemblance* pour λ et μ .

En fait on pourra également s'intéresser à

1° $\rho = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $\theta = \frac{1}{\lambda+\mu}$ dont les estimateurs seront respectivement

$$(4\text{-}3) \qquad R = \frac{X_T}{X_T+Y_T} \qquad \text{et} \qquad \Theta = \frac{1}{X_T+Y_T} \int_0^T f(X_v, Y_v, v)dv$$

2° $\sigma = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{1}{\mu}$ dont les estimateurs seront

$$(4\text{-}4) \qquad S = \frac{X_T}{Y_T} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{Y_T} \int_0^T f(X_v, Y_v, v)dv$$

3° si $\lambda \neq \mu$, $\gamma = \frac{\mu}{\lambda-\mu}$ et $\delta = \frac{1}{\lambda-\mu}$ dont les estimateurs seront

$$(4\text{-}5) \qquad C = \frac{Y_T}{X_T-Y_T} \qquad \text{et} \qquad D = \frac{1}{X_T-Y_T} \int_0^T f(X_v, Y_v, v)dv$$

5 - APPLICATIONS STATISTIQUES (f SUPPOSEE CONNUE)

<u>5.1 - On observe le processus jusqu'à enregistrement de k naissances</u> (k choisi tel que aucun des états (i,j) vérifiant i + j < k ne soit absorbant)

On utilisera le premier temps d'arrêt et donc

$$(5\text{-}1) \qquad X_T + Y_T = k$$

et dans la proposition 2 on prendra $0 < w < 1 + \frac{\mu+\xi}{\lambda}$. Dans la formule (3-3) posons

$$(5\text{-}2) \qquad s = \frac{w}{1+\frac{\xi}{\mu}-\frac{\lambda}{\mu}(w-1)} \qquad \text{soit} \qquad w = \frac{s(1+\frac{\lambda+\xi}{\mu})}{1+\frac{\lambda}{\mu}\, s}$$

on obtiendra

$$(5\text{-}3) \qquad E\{s^{X_T} e^{-\xi \int_0^T f(X_u,Y_u,u)du}\} = \frac{1}{(1+\frac{\xi}{\mu}-\frac{\lambda}{\mu}(w-1))^k} = \left(\frac{1-\rho+\rho s}{1+\theta\ \xi}\right)^k$$

avec seulement la condition $s > 0$, condition dont on pourra se débarrasser en prolongeant analytiquement (5-3). L'indépendance de X_T et de $\int_0^T f\ du$ s'en déduit, la première variable étant $B(k,\rho)$ et la deuxième $\Gamma(k\ ,\ \frac{1}{\theta})$. Une conséquence immédiate est que kR (resp. kΘ) apparaît comme somme des composantes d'un k-échantillon d'une loi $B(1,\rho)$ (resp. d'une loi exponentielle négative de paramètre $\frac{1}{\theta}$) autrement dit est la statistique sur laquelle on base classiquement les problèmes de test ou d'estimation portant sur ρ (resp. sur $\frac{1}{\theta}$). Les propriétés de R et Θ en tant qu'estimateurs ainsi que celles des tests qu'ils permettent de construire sont donc bien connues.

5.2 - On observe le processus jusqu'à enregistrement pour la 2ème composante de la k$^{\text{ième}}$ naissance (k choisi tel que aucun des états vérifiant $j < k$ ne soit absorbant)

On aura donc

$$(5\text{-}4) \qquad Y_T = k$$

et on tire de (3-3)

$$(5\text{-}5) \qquad E\ \{w^{X_T} e^{-\xi \int_0^T f(X_u,Y_u,u)du}\} = \left(1+\frac{\xi+\lambda}{\mu}-\frac{\lambda w}{\mu}\right)^{-k}$$

en principe pour $0 < w < 1$. En fait (5-5) peut être prolongé analytiquement aux $w \in \mathbb{C}$ vérifiant $|w| < 1 + \frac{\mu+\xi}{\lambda}$. On tire de (5-5)

$$(5\text{-}6) \qquad E\{w^{X_T}\} = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho w}\right)^k$$

$$(5\text{-}7) \qquad E\ \{e^{-\xi \int_0^T f\ du}\} = \left(\frac{\mu}{\mu+\xi}\right)^k$$

ceci permet de considérer kS (resp. kB) comme somme des composantes d'un k-échantillon d'une loi géométrique de paramètre ρ (resp. d'une loi exponentielle négative de paramètre $\frac{1}{\beta}$). Comme en 5.1 les problèmes statistiques que l'on peut se poser sur ces deux paramètres se formulent donc dans un cadre classique. La seule différence est que ici S et B ne sont pas indépendantes, ce qui est une gène lorsque l'on veut procéder à un test portant sur les deux paramètres.

On notera cependant que les tests du type $\lambda = \lambda'$, $\theta = \theta_o$ contre $\lambda = \lambda''$, $\theta = \theta_o$ ou bien $\lambda = \lambda_o$, $\theta = \theta'$ contre $\lambda = \lambda_o$, $\theta = \theta''$ restent très simples puisque

$$(5\text{-}8) \qquad \frac{L(\lambda';\theta_o)}{L(\lambda'';\theta_o)} = \left(\frac{1-\lambda'\theta_o}{1-\lambda''\theta_o}\right)^k \left(\frac{\lambda'}{\lambda''}\right)^{X_T}$$

et :

$$(5\text{-}9) \qquad \frac{L(\lambda_o,\theta')}{L(\lambda_o,\theta'')} = \left(\frac{\frac{1}{\theta'} - \lambda_o}{\frac{1}{\theta''} - \lambda_o}\right)^k e^{-\left(\frac{1}{\theta'} - \frac{1}{\theta''}\right)kB}$$

les régions critiques étant donc de la forme X_T < cte (si $\lambda' > \lambda''$) et B < cte (si $\theta' > \theta''$).

5.3 - On observe le processus jusqu'à ce que $X_t - Y_t$ atteigne l'une des valeurs n_1 ou n_2 (avec $n_1 < 0 < n_2$, les états vérifiant $n_1 < i-j < n_2$ étant non absorbants)

Nous utilisons (3-3) en posant

$$(5\text{-}10) \qquad 1 + \frac{\xi}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}(w-1) = \frac{s}{w}$$

ce qui conduira à

$$(5\text{-}11) \qquad E\{W_j^{X_T - Y_T} s^{Y_T} e^{-\xi \int_0^T f\, dv}\} = 1 \qquad j = 1, 2$$

W_j étant l'une des racines de l'équation en w

$$(5\text{-}12) \qquad \lambda w^2 - (\lambda+\mu+\xi)w + \mu s = 0$$

Pour assurer (2-18) il suffira de prendre $0 < s \leq 1$, car on vérifie que cela entraîne

$$0 < W_1(s,\xi) \leq W_1(1,\xi) = w_1 \quad \text{et} \quad w_2 = W_2(1,\xi) \leq W_2(s,\xi) < 1 + \frac{\mu+\xi}{\lambda}$$

Introduisons les événements "$X_T - Y_T = n_1$" et "$X_T - Y_T = n_2$" notés respectivement L et M, on tirera de (5-11)

$$(5\text{-}13) \qquad W_j^{n_1} E\{1_L s^{Y_T} e^{-\xi \int_0^T f\, dv}\} + W_j^{n_2} E\{1_M s^{Y_T} e^{-\xi \int_0^T f\, dv}\} = 1$$

et donc

$$(5\text{-}14) \qquad \begin{cases} E\{1_L s^{Y_T} e^{-\xi \int_0^T f\, dv}\} = \dfrac{\left(W_1^{n_2} - W_2^{n_2}\right)\left(\frac{\mu s}{\lambda}\right)^{-n_1}}{W_1^{n_2-n_1} - W_2^{n_2-n_1}} & \text{(notée } H_L(s,\xi)) \\[2ex] E\{1_M s^{Y_T} e^{-\xi \int_0^T f\, dv}\} = \dfrac{W_1^{-n_1} - W_2^{-n_1}}{W_1^{n_2-n_1} - W_2^{n_2-n_1}} & \text{(notée } H_M(s,\xi)) \end{cases}$$

Si $\lambda \neq \mu$, on vérifie que H_L et H_M sont des fonctions analytiques de (s,ξ) sur

$$\Delta' = \{(s,\xi) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ 0 < |s| \leq 1 \ , \ |\xi| < \alpha\}$$

avec

$$\alpha = \text{Min}\{(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu})^2 \ , \ \sqrt{2(\lambda^2+\mu^2)} - (\lambda+\mu)\}$$

En effet il est immédiat que W_1 et W_2 sont analytiques sur Δ' et donc H_L et H_M sont des quotients de fonctions analytiques. De plus le dénominateur de ces quotients ne s'annule pas sur Δ'. En effet dans le cas contraire on aurait :

$$(5\text{-}15) \qquad W_2 = W_1 \, e^{\frac{2k\pi i}{n_2-n_1}} \qquad k \in \mathbb{N}$$

et donc

$$W_2^2 = \frac{\mu s}{\lambda} \; e^{\frac{2k\pi i}{n_2-n_1}} \qquad\qquad W_1^2 = \frac{\mu s}{\lambda} \; e^{-\frac{2k\pi i}{n_2-n_1}}$$

ce qui entraînerait :

$$\left(\frac{\lambda+\mu+\xi}{\lambda}\right)^2 = (W_1+W_2)^2 = \frac{\mu s}{\lambda}\left(2\cos\frac{2k\pi}{n_2-n_1} + 2\right) = \frac{4\mu s}{\lambda}\cos^2\frac{k\pi}{n_2-n_1}$$

alors que sur Δ' on a :

$$\left|\frac{\lambda+\mu+\xi}{\lambda}\right|^2 > \left(\frac{\lambda+\mu-(\sqrt{\lambda}-\sqrt{\mu})^2}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda}\right)^2 \geq \frac{4\mu|s|}{\lambda}\cos^2\frac{k\pi}{n_2-n_1}$$

Il est donc possible de prolonger analytiquement sur Δ' les formules (5-14).

Estimation de $\gamma = \frac{\mu}{\lambda-\mu}$, $\delta = \frac{1}{\lambda-\mu}$ *lorsque* $\lambda \neq \mu$

Pour $\eta \in \mathbb{R}$ et $|\zeta| < \alpha \operatorname{Min}\{n_2 , -n_1\}$ on aura :

$$\text{(5-16)} \quad E\{e^{i\eta C-\zeta D}\} = E\{\mathbb{1}_L \, e^{i\eta\frac{Y_T}{n_1} - \zeta\frac{1}{n_1}\int_o^T f\,dv}\} + E\{\mathbb{1}_M \, e^{i\eta\frac{Y_T}{n_2} - \zeta\frac{1}{n_2}\int_o^T f\,dv}\} =$$

$$= H_L\left(e^{i\eta/n_1}, \zeta/n_1\right) + H_M\left(e^{i\eta/n_2}, \zeta/n_2\right)$$

ce qui donne la distribution conjointe de C et D, et permet en particulier d'en calculer les premiers moments. Après des calculs élémentaires mais longs, on obtient dans le *cas particulier* $n_2 = n = -n_1$

$$E(C) = \gamma - \frac{2\gamma(1+\sigma)}{\sigma^n+\sigma^{-n}+2} \qquad\qquad E(D) = \delta - \frac{4\delta}{\sigma^n+\sigma^{-n}+2}.$$

qui montre que C et D sont pour γ et δ des *estimateurs biaisés, mais asymptotiquement justes si* $n \to +\infty$.

Plus généralement on peut étudier le comportement asymptotique de C et D lorsque $n_2 \to +\infty$, $n_1 \to -\infty$ avec $\frac{n_2}{n_1} \to -\nu < 0$.

Dans cette étude nous poserons $\sigma = \frac{\lambda}{\mu} > 1$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Par développement limité on obtiendra

$$\text{(5-17)} \quad \begin{aligned} W_j\left(e^{i\eta/n_2}, \zeta/n_2\right) &= \frac{1+\sigma+\zeta/\mu n_2}{2\sigma} + \frac{(-1)^j}{2\sigma}\left\{(1-\sigma)^2 + \frac{2(1+\sigma)\zeta}{\mu n_2} - 4\sigma i\eta/n_2 + o\left(\frac{1}{n_2}\right)\right\}^{1/2} \\ &= \frac{1+\sigma+(-1)^j(\sigma-1)}{2\sigma} + \left[\frac{\zeta}{2\mu\sigma} + \frac{(-1)^j(1+\sigma)\zeta}{2\mu\sigma(\sigma-1)} - \frac{2\sigma i\eta(-1)^j}{2\sigma(\sigma-1)}\right]\frac{1}{n_2} + o\left(\frac{1}{n_2}\right) \end{aligned}$$

Si $j = 1$, cette dernière expression aura pour limite $1/\sigma$ et donc

$$\lim W_1^{n_2} = 0 \qquad\qquad \lim W_1^{n_1} = +\infty$$

tandis que pour $j = 2$

$$\lim W_2^{n_2} = \exp\left\{\frac{\zeta}{\mu(\sigma-1)} - \frac{i\eta}{\sigma-1}\right\} \qquad \text{(notée K)}$$

$$\lim W_2^{n_1} = K^{-1/\nu}$$

On en déduit

(5-18) $$\lim H_M\left(e^{i\eta/n_2}, \zeta/n_2\right) = K^{-1}$$

Une étude analogue portant sur

$$W_j\left(e^{i\eta/n_1}, \zeta/n_1\right)$$

conduirait à

$$\lim W_1^{n_1} = \infty \qquad \lim W_1^{n_2} = 0$$

$$\lim W_2^{n_1} = K \qquad \lim W_2^{n_2} = K^{-\nu}$$

et donc à

(5-19) $$\lim H_L\left(e^{i\eta/n_1}, \zeta/n_1\right) = 0$$

ce qui entraîne avec (5-18)

(5-20) $$\lim E\{e^{i\eta C-\zeta D}\} = e^{i\eta\gamma-\zeta\delta}$$

Donc si $n_2 \to +\infty$, $n_1 \to -\infty$, $\frac{n_1}{n_2} \to -\nu$, (C,D) *est convergent vers* (γ,δ).

6 - EXTENSIONS

Les généralisations sont immédiates. Pour un processus de naissance n-dimensionnel $(X_{1t}, X_{2t}, \dots X_{nt})$ initié au point origine et dont les générateurs infinitésimaux sont de la forme $\nu_i f(X_{1t}, \dots X_{nt}, t)$, on obtiendra à la place de (3-3)

(6-1) $$E\left\{\prod_{i=1}^{n} u_i^{X_{iT}} e^{-\xi \int_0^T f(X_{1u}, \dots X_{nu}, u)\, du}\right\} = 1$$

avec

(6-2) $$\xi = \sum_{i=1}^{n} \nu_i (u_i - 1)$$

De même, à la place de (4-2), on aura pour fonction de vraisemblance

(6-3) $$L = K \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\rho_i}{\theta}\right)^{x_{iT}} e^{-\frac{1}{\theta}\int_0^T f\, dv}$$

avec $\rho_i = \theta\nu_i$ et $1/\theta = \sum_1^n \nu_i$

En prenant par exemple $T = \inf\{t : \sum_1^n X_{it} = k\}$, les estimateurs du maximum de vraisemblance pour θ et les ρ_i seront $\frac{1}{k}\int_0^T f\, dv$ et $\frac{1}{k} X_{iT}$, dont (6-1) donnera facilement la distribution.

L'auteur remercie les deux lecteurs de la revue dont les remarques ont permis d'améliorer la version initiale de cet article.

REFERENCE

KARLIN, S. and TAYLOR, H.M. (1975) - "A first course in stochastic processes". Academic Press - N.Y.