STATISTIQUE ET ANALYSE DES DONNÉES

J. P. VILA

Un logiciel d'ajustement de modèles non linéaires

Statistique et analyse des données, tome 2, nº 1 (1977), p. 102-118
<http://www.numdam.org/item?id=SAD_1977__2_1_102_0>

UN LOGICIEL D'AJUSTEMENT DE MODELES NON LINEAIRES

-=-=-=-=-=-=-=-=-

M. L. P.

Maximum Likelihood Program

J.P. VILA
Laboratoire de Biométrie du C.N.R.Z.
78350 JOUY EN JOSAS

Résumé :

Le logiciel M.L.P. offre à l'utilisateur un langage simple lui permettant de commander l'ajustement à ses données du modèle de son choix. Celui-ci pourra être éventuellement défini s'il ne fait pas déjà partie des modèles standardisés reconnus par le programme de traitement : la plupart des modèles non linéaires et de distributions de probabilités classiques. L'ajustement du modèle aux données s'effectue de façon transparente à l'utilisateur, par la méthode des moindres carrés ou la méthode du maximum de vraisemblance. La convergence des algorithmes d'optimisation utilisés est favorisée par la prise en compte de l'aspect statistique du problème.

Mots clés.

Maximum de vraisemblance
Modèle
Modèle non linéaire
Moindres carrés
Optimisation
Régression non linéaire

I- INTRODUCTION -

Le logiciel M.L.P. a été conçu par G.J.S. ROSS (1970). Il permet l'ajustement de modèles non linéaires et de distributions de probabilités, par la méthode des moindres carrés ou la méthode du maximum de vraisemblance. Chaque ajustement est mené en tenant compte :

1 - des propriétés analytiques et statistiques du modèle
2 - de la structure des données
3 - des relations entre modèle et données.

Ceci, afin de simplifier le problème et conduire à une solution admissible directement, ou indirectement après transformation du modèle ou des données Cette démarche, systématisée pour tous les ajustements possibles a été intégrée dans M.L.P. de façon transparente à l'utilisateur, de manière à ce que :

1 - l'utilisateur n'ait qu'à fournir les données et spécifier son modèle il n'a pas à fournir de valeurs initiales aux paramètres. Il n'a pas non plus à connaître le principe de l'ajustement.

2 - la convergence soit rapide et les résultats aussi précis que possible.

3 - toute anomalie dans les données ou incompatibilité avec le modèle soit signalée immédiatement.

4 - les cas vraiment insolubles soient détectés aussitôt que possible et ceux qui peuvent être "repris" après transformation, le soient effectivement.

5 - en cas d'existence de solution multiple, la solution souhaitable puisse être atteinte.

6 - toute analyse statistique appropriée et utile soit fournie, pour juger de la validité des résultats.

II- CARACTERISTIQUES GENERALES ET FACILITES OFFERTES .-

II-1. Le logiciel M.L.P. offre un langage simple à l'utilisateur qui a le choix entre différents modèles "standardisés", mais qui peut aussi définir rapidement le sien :

II-1.1. Les modèles standardisés disponibles sont une cinquantaine répartis en classes dont les plus importantes concernent les courbes, les distributions de probabilités discrètes et continues, les réponses par tout ou rien (analyse des probits):

Chaque modèle a été considéré de manière particulière de façon à éliminer toutes ses difficultés spécifiques lors d'un ajustement. Les principes des traitements effectués sont quelquefois généraux (réduction des dimensions, transformation de paramètres, politique d'ajustements 'emboîtés"), quelquefois spécifiques aux modèles. Mais tout traitement est la résultante d'un raisonnement analytique et statistique a priori, et d'une expérience pratique des auteurs. C'est ce qui explique son efficacité dans la plupart des cas.

II.1.1.1. Courbes : $y = f(x,A,B,C,...) + e$

les erreurs e peuvent être normales, log-normales. Elles peuvent être pondérées

a - Courbes exponentielles

b - Courbes de "croissance"

. Courbes logistiques

. Courbes de Gompertz

c - Modèles à compartiments

d - Autres : polynômes orthogonaux, fractions rationnelles....

II.1.1.2. Distributions de probabilité.

Il est possible d'ajuster à des distributions de fréquences observées.

a - des distributions discrètes :

de Poisson, de Neyman type A, géométrique, logarithmique, binomiale négative.

b - des distributions continues :

normale, combinaison de lois normales, log-normale, exponentielle, gamma, chi-deux, béta, de Fisher, de Weibull.

II.1.1.3. Régression linéaire multiple.

II.1.1.4. Analyse de probit.

Un ajustement linéaire de la transformée probit ou logit d'une variable pourcentage peut-être effectué en fonction d'une ou deux variables indépendantes dans différents types de problèmes (Estimation des coefficients de la droite de régression des probits, analyses de mélanges, problème de Wadley, etc...)

II.1.1.5. Autres types d'ajustements possibles.

Ils sont relatifs à des modèles plus spécialisés.

II.1.1.5.1. Modèles de génétique : estimation de linkage

II.1.1.5.2. Modèle de dilution : dénombrement biologique

II.1.1.5.3. Modèle de transition entre états dans un système fermé ou ouvert : ajustement de paramètres déterminant les éléments d'une matrice de transition stationnaire ou non.

II.1.2. Ajustements de modèles spécifiques :

S'il n'est pas satisfait, par les modèles standardisés reconnus par le programme de traitement, l'utilisateur peut définir son propre modèle, au moyen :

1 - de combinaisons linéaires de variables intermédiaires de travail

2 - d'options contrôlant le calcul de la vraisemblance compte tenu du modèle et de la distribution supposée de sa partie aléatoire :

a. normale ou log-normale pour courbes et surfaces

b. poissonnienne pour des dénombrements

c. binomiale pour des variables pourcentages

d. multinomiale pour des distributions

e. au choix de l'utilisateur qui programmera directement sa fonction de vraisemblance.

Les principes statistiques et numériques qui assurent l'efficacité des ajustements des modèles standardisés sont également appliqués dans les ajustements de ces modèles spécifiques.

III- L'UTILISATION EFFICACE DES METHODES DE MINIMISATION DANS M.L.P. .-

La méthode de minimisation utilisée est une méthode à convergence quadratique de type Newton modifié (Box (1969)). Elle est utilisée pour minimiser par rapport aux paramètres

. une somme de carrés d'écarts pondérés, ou

. l'opposé du logarithme de la fonction de vraisemblance calculée sur les données en fonction du modèle théorique et de la loi supposée de sa partie aléatoire.

Mais certains modes d'utilisation de cette procédure dans M.L.P., associés à certaines opérations sur le modèle, favorisent cette minimisation d'une manière décisive :

III-1. Minimisation hiérarchique : réduction des dimensions des espaces paramétriques de recherche.

Dans certains types de modèles, M.L.P. traite les paramètres selon une hiérarchie, telle que des valeurs optimales pour les paramètres de rangs inférieurs puissent être obtenues aisément, pour toutes valeurs des paramètres de rangs supérieurs.

Il est quelquefois possible d'obtenir pour les paramètres de rangs inférieurs à partir des équations normales, des solutions analytiques fonctions des paramètres de plus hauts rangs. Les premiers peuvent alors être éliminés dans la fonction critère: La minimisation s'effectuera dans un espace de dimension plus faible. De plus les paramètres éliminés ne nécessitent plus de valeurs initiales. Ainsi les paramètres linéaires seront-ils éliminés en priorité. Ces idées avaient déjà été exploitées par Richards (1961) et depuis par Lawton et Sylvestre (1971).

Quand une élimination analytique de paramètres n'est plus possible, la procédure de minimisation est utilisée de manière récursive dans une hiérarchie de sous espaces paramétriques complémentaires.

III-2. Transformation des paramètres afin de réduire les variances et corrélations de leurs estimateurs et d'obtenir une approximation quadratique suffisante de la fonction critère dans un voisinage du minimum : création de paramètres "stables" selon ROSS (1970).

Dans le cas des modèles non linéaires, il n'existe pas de transformation linéaire orthogonale assurant les objectifs désirés dans un domaine assez vaste pour englober toutes les estimations initiales plausibles des paramètres. Il faut donc essayer des transformations non-linéaires et si possible biunivoques pour pouvoir revenir facilement aux paramètres initiaux du modèle. Le choix de la transformation sera d'autant plus aisé que l'on pourra trouver des paramètres variant très peu dans la région de "bon" ajustement de l'espace paramétrique : d'où leur qualification de stable. De plus étant fonction des valeurs ajustées, ils pourront souvent être initialisés automatiquement par ces mêmes fonctions.

La première démarche opératoire consiste à examiner les espérances de certaines statistiques qui, fonction des paramètres du modèle, peuvent elles-mêmes être des paramètres potentiels. Ainsi, dans les ajustements de distributions, les moments d'ordres inférieurs sont assez stables (sauf si la queue de distribution est exceptionnellement longue). Dans le cas d'ajustement de courbe, un modèle à p paramètres, peut-être défini par les espérances en p points différents. Quand ces points sont régulièrement répartis sur l'intervalle des données, les intercorrélations sont généralement faibles, et si la courbe est un polynôme de degré $p-1$, il existe même des ensembles de p points pour lesquels, toutes les intercorrélations entre valeurs ajustées sont nulles. Bien entendu, cette recherche de paramètres stables est combinée quand c'est possible avec la démarche vue précédemment de réduction des dimensions de l'espace paramétrique : ainsi on recherchera de nouveaux paramètres stables caractéristiques seulement de la forme de la courbe, et non de son échelle et de sa position caractérisées par les paramètres linéaires qui auront été éliminés. Pour cela, il est possible d'utiliser les différences premières ou secondes des ordonnées, ou leurs rapports, ou d'autres transformations (ROSS (1970)) suivant les modèles.

III-3. Minimisation séquentielle : ajustements emboîtés.

Le modèle décrit ou appelé par l'utilisateur est quelquefois remplacé dans le corps des programmes du système par une suite de modèles emboîtés plus simples. Leurs ajustements successifs amènent à de bonnes estimations initiales pour le premier modèle. Par exemple, un paramètre "stable" déterminé pourra être fixé à une constante convenable estimée. Et un ajustement préliminaire dans un espace de dimension réduite sera effectué. Cette méthode a été en particulier appliquée dans les modules de M.L.P. relatifs aux ajustements de distributions, car les premiers moments sont très "stables", et ont été pour cette raison utilisés.
ROSS (1970) décrit une application à l'ajustement d'une distribution combinaison linéaire inconnue de deux distributions normales ;

le modèle à ajuster

$$f(x) = \alpha\, N(\mu_1, \sigma^2) + (1-\alpha)\, N(\mu_2, \sigma^2)$$

est remplacé par les trois modèles successifs

Modèle 1 : $\mu_1 = \mu_2$
Modèle 2 : $\alpha = 0.5$, $\mu_1 \neq \mu_2$
Modèle 3 : $\alpha \neq 0.5$, $\mu_1 \neq \mu_2$

A chaque étape, des valeurs initiales pour les paramètres sont obtenues en fixant la moyenne et la variance de la distribution combinée à des valeurs dérivées de l'étape précédente. Il est très facile de plus, d'obtenir un test de validité d'ajustement pour chaque modèle.

IV- TECHNIQUE OPERATOIRE .-

IV-1. D'une manière très concise, l'utilisateur

1. introduit ses données
2. spécifie numériquement ou mnémoniquement par une seule directive le modèle à ajuster et des contraintes éventuelles
3. commande l'ajustement par une seconde directive.

Toutes ces opérations peuvent être exécutées en mode différé ou en mode conversationnel.

Exemple : ajustement à une courbe de croissance logistique

$$\texttt{DATA}\quad \overbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7}^{X}\quad \overbrace{3.5\ 5.8\ 8.2\ 10.1\ 11.3\ 11.7\ 13.3}^{Y}\ ;$$

```
CMODEL = LOGISTIC; FIT CURVE
```

IV.2. Dans tous les cas, les sorties minimum sont constituées

1 - des estimations des paramètres du modèle

2 - des erreurs-types et des corrélations des estimateurs de ces paramètres

3 - des valeurs estimées de la variable à expliquer

4 - des résidus

5 - de la valeur atteinte par la fonction critère.

Ce résultat peut conduire à un test de validité du modèle.
Ses sorties peuvent être complétées par diverses informations statistiques, numériques, et des graphiques.
Pour faciliter à l'utilisateur sa recherche de paramètres les plus "stables" quand il ajuste son propre modèle, il est possible de définir des fonctions de paramètres qui seront calculées avec leurs variances et leur corrélations.
L'utilisateur peut également faire calculer en un réseau de points de son choix dans l'espace paramétrique, les valeurs de la fonction critère. Il peut obtenir les représentations graphiques des courbes de niveaux correspondantes, dans les différents plans paramétriques.

IV-3. Des diagnostics d'erreurs ont été prévus pour aider aux corrections de la syntaxe et à l'amélioration du modèle quand l'ajustement est défectueux

V- LE PRODUIT PROGRAMME .-

Le logiciel M.L.P. est un interpréteur écrit en langage fortran, d'un encombrement de 150 KØ environ. Les différents sous programmes sont disposés selon une structure arborescente à deux niveaux.
Le produit est diffusé par le département de statistique de Rothamsted Experimental Station, Herts, Grande-Bretagne. En France M.L.P. a été étudié et généré dans le cadre d'une A.T.P. au laboratoire de Biométrie du C.N.R.Z.-I.N.R.A. (Jouy-en-Josas). Il fonctionne en mode différé sur l'ordinateur IBM 370/145 de ce centre et sur l'ordinateur IBM 370/168 du C.I.R.C.E. (Orsay). Une version interactive devrait être générée sous peu dans ce dernier centre.
Des documents techniques et utilitaires sont disponibles au laboratoire de Biométrie du C.N.R.Z.

VI- EXEMPLES .-

VI-1. Ajustement d'une double exponentielle en faisant appel au modèle standardisé :

$$Y = A + B.\exp(-K.x) + C.\exp(-L.x)$$

VI-2. Ajustements de distributions de Poisson, binomiale négative, et de Neyman type A à des mêmes fréquences observées.

VII- BIBLIOGRAPHIE .-

BOX M.J., DAVIES D. and SWANN W.H. (1969) : Non linear optimisation techniques. I.C.I. Monograph n° 5. Edinburgh : Oliver & Boyd.

LAWTON W.H., and SYLVESTRE E.A. (1971) : Elimination of linear parameters in non-linear regression. Technometrics, 13, 461-467.

RICHARDS F.S.G. (1961) A method of maximum likelihood estimation. J.R. Statistical Soc. B, 23, 469-476.

ROSS G.J.S. (1970) The efficient use of function minimization in non-linear maximum likelihood estimation. J.R. Statistical. Soc., C, 19, 205-221.

ROSS G.J.S. (1975) : Simple non-linear modelling for the General user. Bulletin of the International Statistical Institute. Proceedings of the 40th session - Volume XLVI. Book 2 - Invited papers - p. 585 - 593 WARSAW 1975.

oooOooo

VIII- REMERCIEMENTS .-

Je remercie Monsieur Jean-Pierre PAGES (laboratoire de statistiques et d'études Economiques et Sociales - C.E.A.) pour ses judicieuses suggestions.

oooOooo

A N N E X E :

- EXEMPLES .-

1. Ajustement d'une double exponentielle :

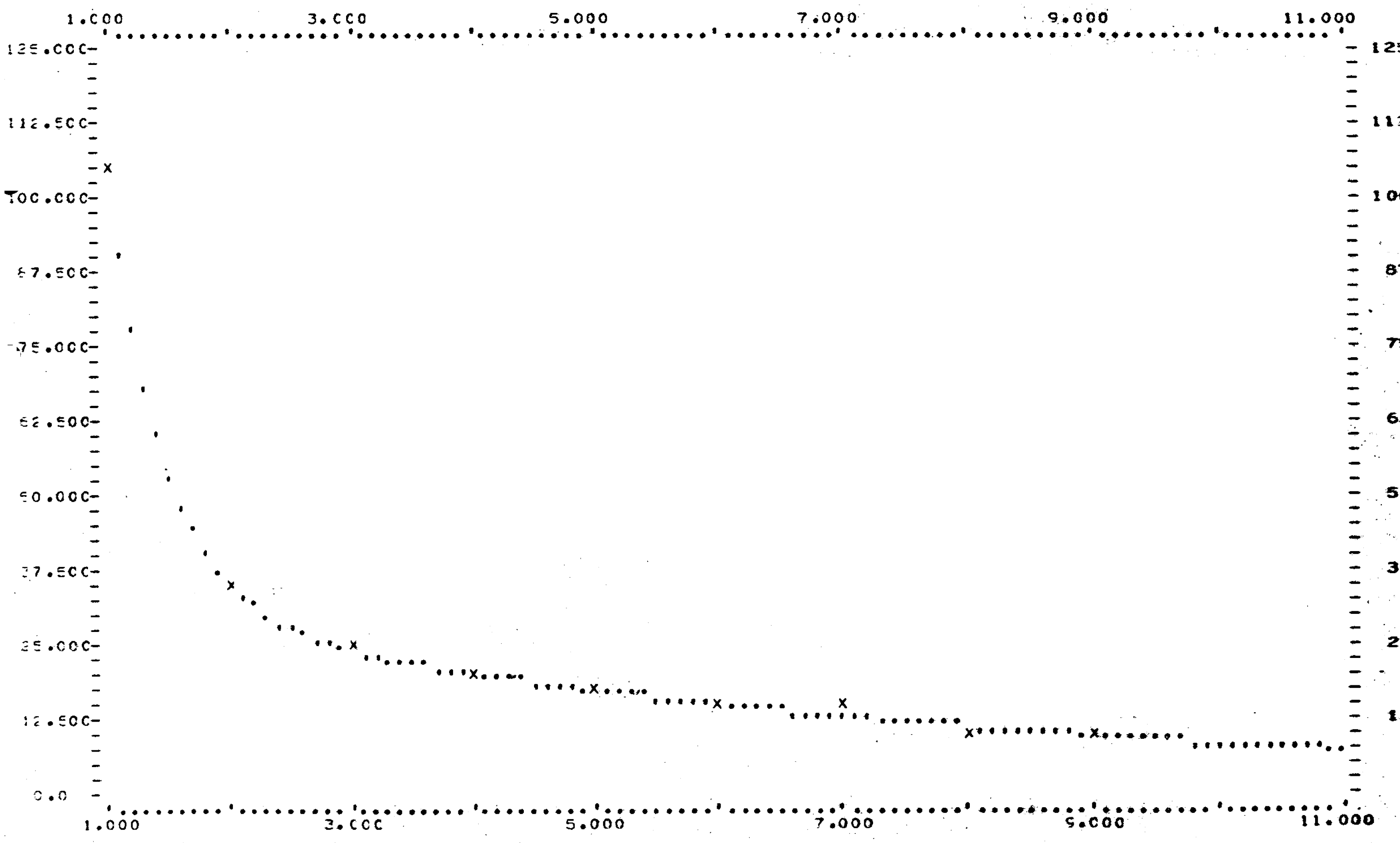
$$y = A + B.EXP(-Kx) + C.EXP(-Lx)$$

```
CAPTION (5) AJUSTEMENT D'UNE DOUBLE EXPONENTIELLE AVEC IMPRESSION DE LA
  SURFACE CRITERE - DONNEES DE G.J.S. ROSS ;
  DATA    1 2 3 4 5 6 7 8 9  IO5  35  24  20  I7  I4  I5  II  9 ;

  OPT      2         2     0      0           4         I          I
        modèle    axe des  x moindres    décimales  erreur      erreurs
                  asymptote  carrés      en sortie  résiduelle  types des
                  vers la    ordinaires                          ajustées
                  droite

           O              O             I       ;
        pas de pente  pas d'ajuste-   graphique
        calculée      ment par poly-
                      gônes orthogonaux

  FIT CURVE;DISPLAY   1             2                  100          1000
                   rang de       projection         unité        seuil provo-
                   l'ajustement  dans le plan       d'impression quant l'impres-
                   concerné      des deux para-     des valeurs  sion d'un X
                                 mètres non
                                 linéaires

              0.0   0.0      2.0   0.0      2.0   1.0     ;
               point S-O      point          point
               du reseau      S-E            N-W

  DISPLAY  I  2  5  IOO  .80  .OI6  .9I  .OI6  .80  .2I  ;
  DISPLAY  I  2  I   20  .80  .OI6  .9I  .OI6  .80  .2I  ;   END
```

Remarque

Les deux dernières projections sont des agrandissements de la zone solution entourée sur la lère projection.

```
AJUSTEMENT D'UNE DOUBLE EXPONENTIELLE
AVEC IMPRESSIONS DE LA SURFACE CRITERE -
DONNEES DE G.J.S. ROSS

Y = A + B*R**X + C*S**X   R=EXP(-K),S=EXP(-L)
WITH ASYMPTOTE Y=    0.0

         PARAMETER            S.E.           CORRELATIONS
  1  R        0.86690       0.01391          1.0000
  2  S        0.11495       0.02474          0.7128  1.0000
  3  B       35.20181       3.16776         -0.9528 -0.8033   1.0000
  4  C      647.96045     124.95264         -0.6480 -0.9923   0.7385   1.0000
FIX  A        0.0

     K        0.14283       0.01604
     L        2.16327       0.21523

             X          Y        F(Y)    WTD.RES.       S.E.
        1.0000   105.0000   104.9990     0.0010      1.0714
        2.0000    35.0000    35.0166    -0.0166      1.0599
        3.0000    24.0000    23.9180     0.0820      0.7331
        4.0000    20.0000    19.9946     0.0054      0.6353
        5.0000    17.0000    17.2484    -0.2484      0.4744
        6.0000    14.0000    14.9429    -0.9429      0.4373
        7.0000    15.0000    12.9529     2.0471      0.4936
        8.0000    11.0000    11.2288    -0.2288      0.5683
        9.0000     9.0000     9.7343    -0.7343      0.6298

RESIDUAL M.S.     1.147959    D.F.     5
RESIDUAL S.S.     5.739796
```

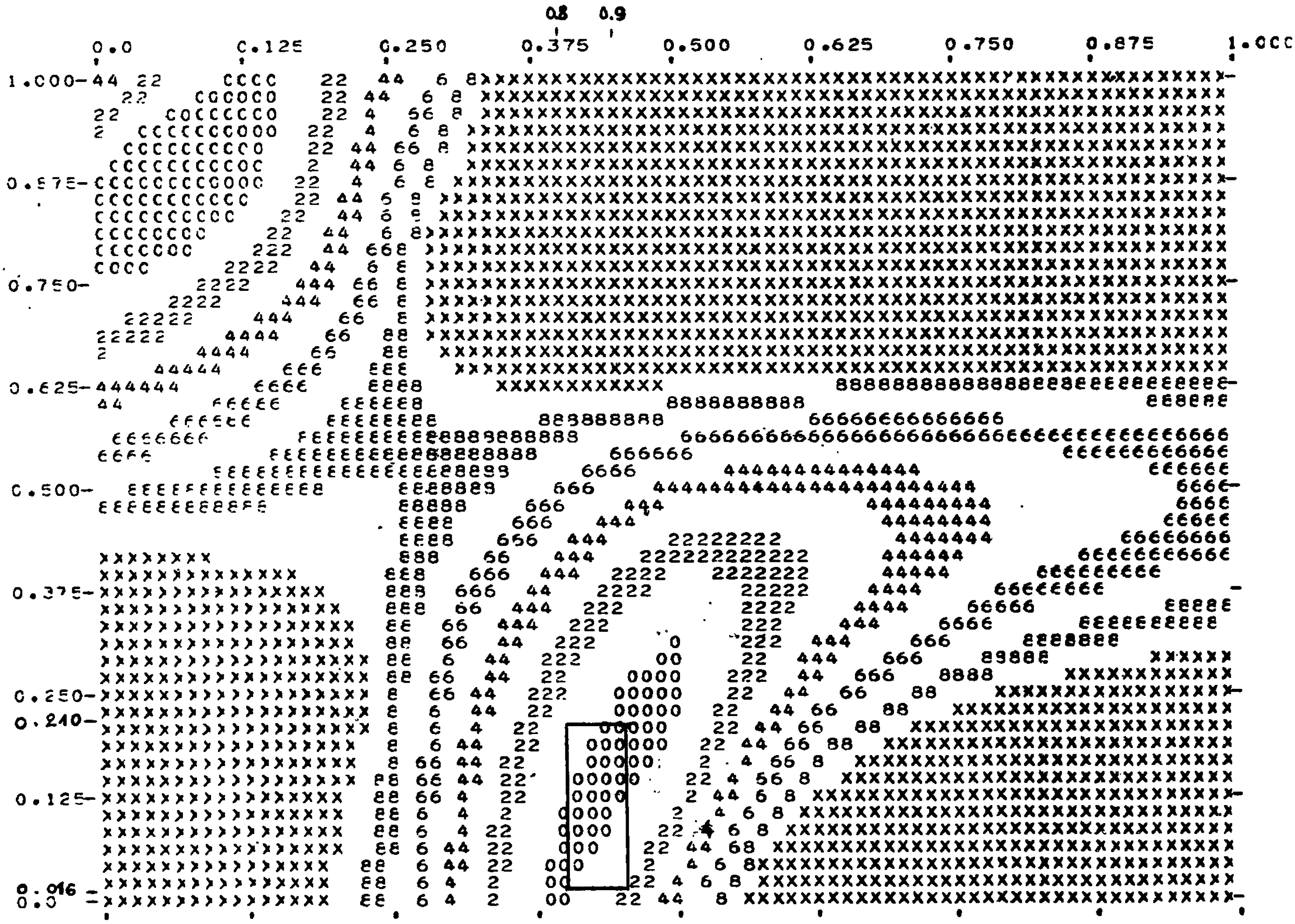

1.000
3.000
5.000
7.000
9.000
11.000
125.000
112.500
100.000
87.500
75.000
62.500
50.000
37.500
25.000
12.500
0.0

Y = A + B*R**X + C*S**X R=EXP(-K),S=EXP(-L)
WITH ASYMPTOTE Y= 0.0

CONTOUR PLOT OF FUNCTION IN UNITS OF 100.0000

	SW	SE	NW	NE
PAR 1	0.0	2.00000	0.0	2.00000
PAR 2	0.0	0.0	1.00000	1.00000

4.8458	0.8357	4.6557	17.1956	71.9355	46.0043	53.3276	57.4642	59.9287
0.6620	0.6896	5.9027	15.6000	25.4669	31.6049	34.6190	36.0935	36.8809
1.0001	2.8443	7.3983	18.7801	17.1956	18.5118	18.7591	18.7793	18.7678
4.1511	5.9029	8.4985	10.3378	9.9479	9.0698	8.8180	8.8783	9.0053
7.8521	8.6402	9.0002	7.3983	4.6557	4.1461	4.9093	5.6696	6.2210
11.2167	10.7239	8.9376	4.8210	1.6495	3.2574	5.5371	6.9992	7.8795
14.1255	15.9965	8.6402	2.8443	0.8357	5.5328	9.3180	11.3145	12.3950
16.6518	13.3322	8.2427	1.5643	1.9792	10.2740	15.4218	17.8138	19.0262
31.1226	14.1255	7.8521	1.0001	4.8458	17.0147	23.3837	26.0811	27.3809

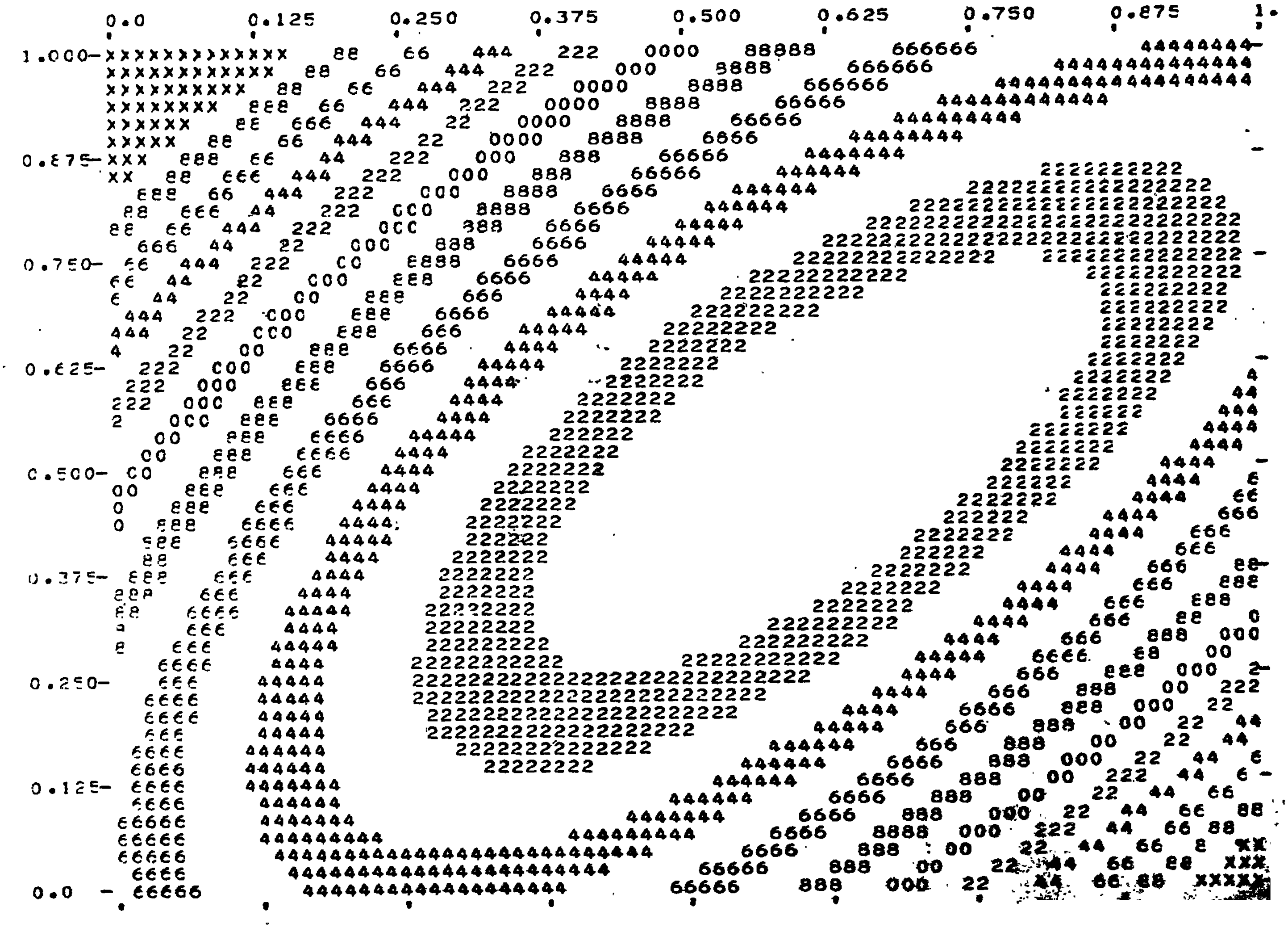


Y = A + B*R**X + C*S**X R=EXP(-K),S=EXP(-L)
WITH ASYMPTOTE Y= 0.0

CONTOUR PLOT OF FUNCTION IN UNITS OF 5.0000

	SW	SE	NW	NE
PAR 1	0.80000	0.91000	0.80000	0.91000
PAR 2	0.01600	0.01600	0.21000	0.21000

26.1119	21.3168	17.0479	13.3536	10.2780	7.8587	6.1264	5.1031	4.8022
21.3166	16.7540	12.7715	9.4216	6.7492	4.7925	3.5815	3.1371	3.4700
17.2234	12.9354	9.2865	6.3288	4.1082	2.6631	2.0228	2.2064	3.2224
13.8228	9.8560	6.5861	4.0668	2.3448	1.4585	1.4361	2.2952	4.0412
11.1122	7.5098	4.6630	2.6267	1.4484	1.1662	1.8073	3.3872	5.9081
9.0866	5.8904	3.5091	1.9990	1.4078	1.7735	3.1219	5.4661	8.8052
7.7403	4.9909	3.1163	2.1739	2.2119	3.2676	5.3654	8.5159	12.7144
7.0671	4.8038	3.4757	3.1413	3.8491	5.6356	8.5235	12.5204	17.6181
7.0606	5.3215	4.5786	4.8913	6.3081	8.8646	12.5817	17.4640	23.4952

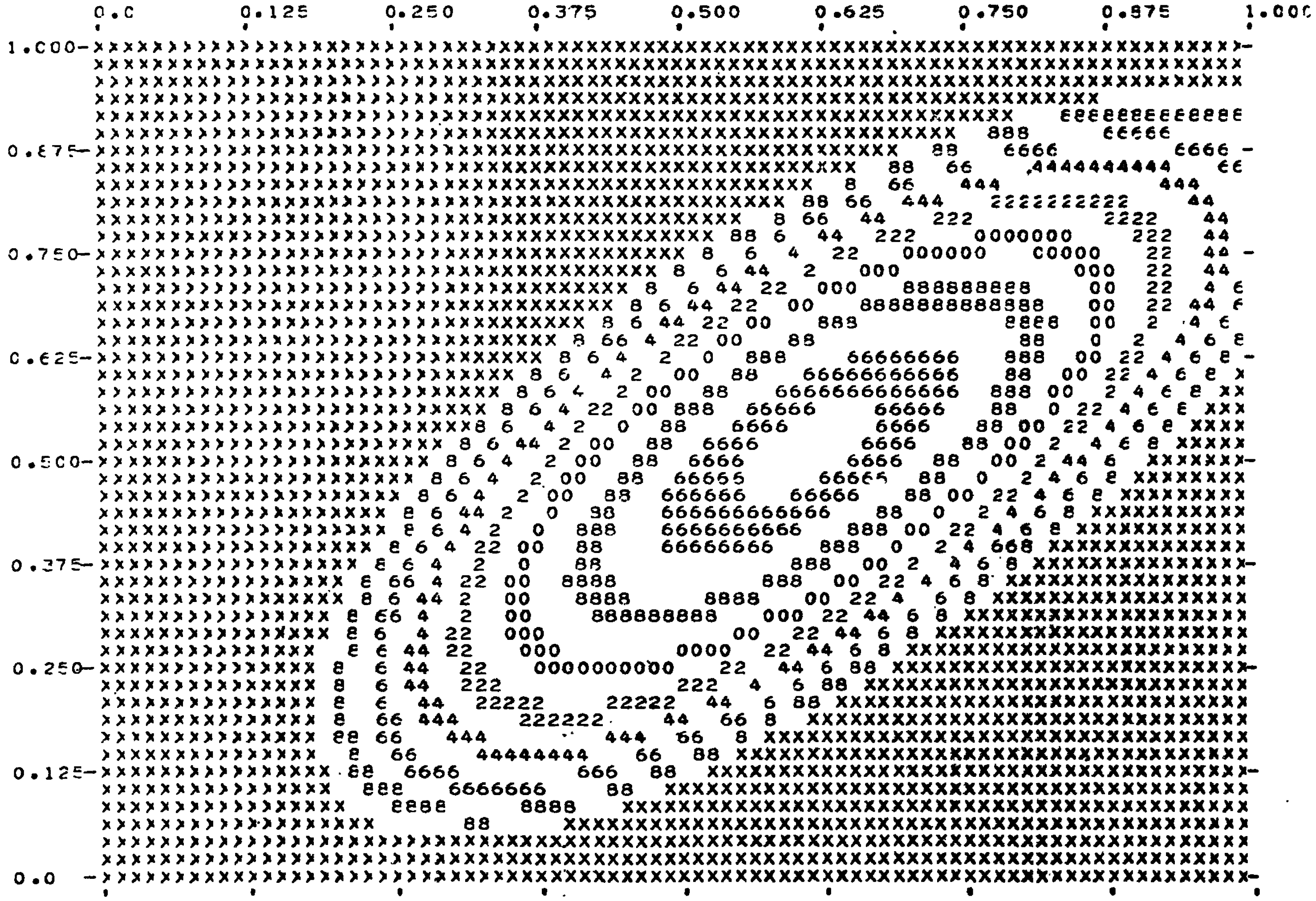


Y = A + P*R**X + C*S**X R=EXP(-K),S=EXP(-L)
WITH ASYMPTOTE Y= C.0

CONTOUR PLOT OF FUNCTION IN UNITS OF 1.0000

	SW	SE	NW	NE
PAR 1	C.8CCCC	C.91CCC	0.80000	0.91000
PAR 2	0.C160C	C.C160C	0.21000	0.21000

130.5594	106.5842	85.2393	66.7682	51.3898	39.2937	30.6319	25.5156	24.0108
106.5932	83.7701	63.8576	47.1082	33.7461	23.9627	17.9077	15.6853	17.3502
86.1172	64.677C	46.4324	31.6441	20.5411	13.3156	10.1139	11.0322	16.1122
69.1139	49.2798	32.93C5	20.3342	11.7242	7.2924	7.1807	11.4760	20.2060
55.5610	37.5490	23.3148	13.1335	7.2419	5.8308	9.0366	16.9359	29.5406
45.4329	29.4521	17.5456	9.9948	7.0391	8.8674	15.6096	27.3306	44.0258
38.7013	24.9944	15.5813	10.8693	11.0594	16.3380	26.8272	42.5794	63.5718
35.3354	24.0189	17.3765	15.7067	19.2456	28.1780	42.6174	62.6022	88.0907
35.3029	26.6073	22.8929	24.4563	31.5403	44.3230	62.9086	87.2202	117.4959



2. Ajustements de distributions discrètes.

CAPTION(4) AJUSTEMENTS DE DISTRIBUTIONS DE POISSON, BINOMIALE NEGATIVE, DE NEYMAN TYPE A, A DES MEMES FREQUENCES OBSERVEES ;

DATA 12 19 22 16 10 9 9 4 6 2 / 1 1 2 1

Fréquences observées des valeurs 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Fréquences observées des valeurs 10,11, 12,13. Elles seront cumulées.

EXTRA 17 26 37 ;

Valeurs de queue de distribution

OPTION 0 1 4 5 0 0 1 ;

0	1 4 5	0	0	1
les données sont des fréquences	codes des trois distributions à ajuster	il n'y a pas de quatrième distribution	la table des fréquences observées et calculées sera imprimée	les histogrammes des fréquences seront imprimés

FIT DISTRIBUTION ;

AJUSTEMENTS DE DISTRIBUTIONS DE POISSON,
BINOMIALE NEGATIVE,DE NEYMAN TYPE A ,
A DES MEMES FREQUENCES OBSERVEES

NO OF SAMPLES	117.	SAMPLE MEAN	4.12
SAMPLE VARIANCE	23.32	SAMPLE SKEWNESS	3.75
POISSON INDEX	1.13	N.B. INDEX	4.04

FIT POISSON

CHI-SQUARED = 93.19 ON 10 D.F.

	PARAMETER		S.E.
1	M	4.11966	0.13963

FIT NEGATIVE BINOMIAL

CHI-SQUARED = 5.34 ON 9 D.F.

	PARAMETER		S.E.	CORRELATIONS	
1	MEAN	4.11966	0.25662	1.0000	
2	VAR	12.94681	2.05221	0.7699	1.0000

DEFINING PARAMETERS

	PARAMETER		S.E.	CORRELATIONS	
1	M	4.11966	0.25655	1.0000	
2	K	1.92266	0.28944	-0.1681	1.0000
	X	0.99375	0.00417		

FIT NEYMAN TYPE A

CHI-SQUARED = 11.33 ON 9 D.F.

	PARAMETER		S.E.	CORRELATIONS	
1	MEAN	3.80170	0.19824	1.0000	
2	VAR	9.06864	0.85548	0.7010	1.0000

DEFINING PARAMETERS

	PARAMETER		S.E.	CORRELATIONS	
1	M1	2.74408	0.32686	1.0000	
2	M2	1.38542	0.16376	-0.9035	1.0000

TABLE OF OBSERVED AND FITTED VALUES

R	NO.OBS.	NO.EXP. PN	N.B.	NY.A
0	12.	1.9	12.9	15.0
1	19.	7.8	17.0	14.2
2	22.	16.1	16.9	16.6
3	16.	22.2	15.1	16.1
4	10.	22.8	12.6	14.1
5	9.	18.8	10.2	11.6
6	9.	12.9	8.0	9.0
7	4.	7.6	6.2	6.7
8	6.	3.9	4.7	4.7
9	2.	1.8	3.5	3.3
10+	5.	1.1	7.1	5.0
14+	3.	0.0	2.7	0.8
TAIL VALUES	17.	26.	37.	

```
HISTOGRAM OF OBSERVED AND FITTED VALUES

   0    OBSERVED VALUES
   1    POISSON FIT
   4    NEGATIVE BINOMIAL FIT
   5    NEYMAN TYPE A FIT

    0         10        20        30        40        50
    |         |         |         |         |

  0  000000000000
     1
     444444444444
     55555555555555

  1  0000000000000000000
     1111111
     4444444444444444
     55555555555555

  2  0000000000000000000000
     1111111111111111
     4444444444444444
     5555555555555555

  3  0000000000000000
     1111111111111111111111
     444444444444444
     5555555555555555

  4  0000000000
     1111111111111111111111
     444444444444
     55555555555555

  5  000000000
     111111111111111111
     4444444444
     55555555555

  6  000000000
     11111111-1111.
     44444444
     55555555

  7  0000
     1111111
     444444
     555555

  8  000000
     111
     4444
     5555

  9  00
     1
     444
     555

 10  00000
     1
     4444444
     55555

 14  000

     44
```