Daniel Lazard

Deux méchants épimorphismes

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. nº 8, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A8_0>

DEUX MÉCHANTS ÉPIMORPHISMES

par Daniel LAZARD

Le but de cet exposé est de donner, comme l'indique le titre, deux contre-exemples : FERRAND a démontré (exposé 7) que, si $f : A \to B$ est un épimorphisme, avec A noethérien, alors f est composé d'un morphisme entier et d'un épimorphisme plat. Nous allons voir que c'est faux si A n'est pas noethérien, même si A et B sont locaux intègres intégralement clos de même corps des fractions et si f est local. De même, si $f : C \to D$ est un épimorphisme local d'anneaux locaux de dimension 0 (à la KRULL), et si C est noethérien, ou même si le radical de C est nilpotent, f est surjectif. Mais cela n'est pas vrai en général.

Le point commun entre ces deux exemples est, outre leur construction voisine, que ce ne sont pas des limites inductives d'épimorphismes de type fini, contrairement à tous les épimorphismes déjà rencontrés dans ce séminaire.

1. Définition et notations.

Soient :

k : un corps ;

X_i et Y_i $(i \in \underset{\sim}{N})$: des indéterminées ;

S (resp. S_n) : le localisé en l'idéal maximal engendré par les X_i et les Y_i de l'anneau $k[X_i , Y_i]_{(i \in \underset{\sim}{N})}$ (resp. $k[X_0 , \ldots , X_n , Y_0 , \ldots , Y_n]$) ;

$\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}_n$) : l'idéal de S (resp. S_n) engendré par les $Y_i - X_{i+1} Y_{i+1}^2$ pour $i \in \underset{\sim}{N}$ (resp. $i = 0 , \ldots , n-1$) ;

$B = S/\mathfrak{J}$, et $B_n = S_n/\mathfrak{J}_n$;

x_i et y_i (resp. $x_{i,n}$ et $y_{i,n}$) : les images de X_i et Y_i dans B (resp. B_n) ;

$\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}_n$) : l'idéal maximal de B (resp. B_n) ;

A (resp. A_n) : le localisé de $k[x_i , x_i y_i]_{i \in \underset{\sim}{N}}$ (resp. $k[x_{i,n} , x_{i,n} y_{i,n}]_{i=0,\ldots,n}$) en l'idéal premier $\mathfrak{m} \cap k[x_i , x_i y_i]_{i \in \underset{\sim}{N}}$ (resp. $\mathfrak{m}_n \cap k[x_{i,n} , x_{i,n} y_{i,n}]_{i=0,\ldots,n}$);

$p(i)$, $i \in \underset{\sim}{N}$: une suite d'entiers tels que $p(i) > 2^{i-1}$;

$\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{J}_n$) : l'idéal de B (resp. B_n) engendré par les $x_i^{p(i)}$ (resp. $x_{i,n}^{p(i)}$) ;

$D = B/\mathfrak{J}$, $D_n = B_n/\mathfrak{J}_n$;

$C = A/(A \cap \mathfrak{J})$, $C_n = A_n/(A_n \cap \mathfrak{J}_n)$;

x_i' (resp. y_i' , $x_{i,n}'$, $y_{i,n}'$) : les images des x_i (resp. y_i , $x_{i,n}$, $y_{i,n}$) dans D (resp. D_n).

Nous allons voir que les injections $A \to B$ et $C \to D$ sont les exemples annoncés dans l'introduction.

2. Premiers résultats.

LEMME 2.1. - Les injections $A \to B$ et $C \to D$ sont des épimorphismes.

En effet (cf. exposés 1 et 2),

$$1 \otimes y_{i-1} = 1 \otimes x_i\, y_i^2 = x_i\, y_i \otimes y_i = y_i \otimes x_i\, y_i = x_i\, y_i^2 \otimes 1 = y_{i-1} \otimes 1$$

montre que $A \to B$ est un épimorphisme. Le même raisonnement vaut pour $C \to D$.

LEMME 2.2. - On a des isomorphismes canoniques :

$$A \simeq \varinjlim A_n , \qquad B \simeq \varinjlim B_n , \qquad C \simeq \varinjlim C_n , \qquad D \simeq \varinjlim D_n .$$

Cela est immédiat.

LEMME 2.3. - L'homomorphisme canonique dans B_n du localisé de $k[X_0 , \dots , X_n , Y_n]$ en l'idéal premier $(X_0 , \dots , X_n , Y_n)$ est un isomorphisme.

La flèche, définie par

$$y_{i,n} \longmapsto X_{i+1}\, X_{i+2}^2 \dots X_n^{2^{n-i-1}}\, Y_n^{2^{n-i}} ,$$

est un morphisme de B_n dans le localisé considéré de $k[X_0 , \dots , X_n , Y_n]$, car

$$x_{i+1,n}\, x_{i+2,n}^2 \dots x_{n,n}^{2^{n-i-1}}\, y_{n,n}^{2^{n-i}} = x_{i+1,n}(x_{i+2,n} \dots x_{n,n}^{2^{n-i-2}}\, y_{n,n}^{2^{n-i-1}})^2 .$$

Cette flèche est évidemment réciproque du morphisme considéré dans l'énoncé du lemme.

COROLLAIRE 2.4. - Les anneaux A , A_n , B , B_n sont intègres. Les flèches $A_n \to A_{n+1}$ et $B_n \to B_{n+1}$ sont injectives. Les anneaux B_n et B sont intégralement clos. Si les anneaux A_n sont intégralement clos, il en est de même de A . Les anneaux A et B ont même corps des fractions.

La première assertion résulte de la seconde. La seconde est vraie, car $X_0 , \ldots , X_n , X_n Y_n^2$ sont algébriquement indépendants dans $k(X_0 , \ldots , X_n , Y_n)$. La suite en résulte immédiatement par passage à la limite inductive. La dernière assertion résulte de l'égalité $y_n = x_n y_n/x_n$.

LEMME 2.5. - Si $A \to B$ n'est pas surjectif, B n'est pas un A-module plat.

C'est le résultat 1.3 (ii) de l'exposé 4.

LEMME 2.6. - Si $C \to D$ n'est pas surjectif, il en est de même de $A \to B$.

Cela résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} .$$

3. Les résultats principaux.

PROPOSITION 3.1. - Les anneaux A et B sont locaux intègres, intégralement clos, de même corps des fractions. Le morphisme $A \to B$ est un épimorphisme local, injectif, non surjectif. Il n'existe pas de diagramme commutatif d'anneaux

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & E \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

tel que $A \to E$ soit entier et $E \to B$ plat.

PROPOSITION 3.2. - Le morphisme $C \to D$ est un épimorphisme non surjectif d'anneaux locaux de dimension 0 .

S'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & E \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

avec $A \to E$ entier et $E \to B$ plat, alors B est plat sur l'image F de E dans B (exposé 4, 3.2 (i)), et F est entier sur A . Si l'on montre que A est intégralement fermé dans B , alors on a $A = F$, et donc $A = B$ (par 2.5).

Il reste à montrer les deux lemmes suivants :

LEMME 3.3. - <u>Pour tout</u> n , <u>on a</u> $y'_{n,n} \notin C_n$.

LEMME 3.4. - A_n <u>est intégralement clos.</u>

Le lemme 3.4 est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 3.5. - $A'_n = k[X_i , X_n , X_i X_{i+1} X_{i+2}^2 \dots X_n^{2^{n-i-1}} Y_n^{2^{n-i}} , X_n Y_n]_{i=1,\dots,n-1}$ <u>est intégralement fermé dans</u> $B'_n = k[X_1 , \dots , X_n , Y_n]$.

En effet, 3.5 implique que A'_n est intégralement clos. Il en est donc de même de son localisé A_n .

Pour démontrer 3.3 et 3.5, explicitons des bases de A'_n , B'_n , C_n et D_n sur k :

Base de B'_n : les monômes en les X_i et en Y_n ;
Base de D_n : les monômes en les $x'_{i,n}$ et en $y'_{n,n}$ de degré en $x'_{i,n}$ strictement inférieur à $p(i)$;
Bases de A'_n et C_n : les éléments des bases ci-dessus qui sont dans A'_n et C_n.

LEMME 3.6. - <u>Pour qu'un monôme de la base considérée de</u> B'_n (<u>resp.</u> D_n) <u>soit dans</u> A'_n (<u>resp.</u> C_n), <u>il faut et il suffit que, si</u> q_i <u>et</u> r <u>désignent ses degrés en</u> X_i <u>et</u> Y_n (<u>resp.</u> $x'_{i,n}$ <u>et</u> $y'_{n,n}$), <u>on ait les inégalités</u>

$$(3.6.1) \qquad r - \sum_{i=0}^{n} q_i \leqslant 0 \qquad \underline{\text{et}} \qquad r - 2q_j - \sum_{j+1}^{r} q_i \leqslant 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

(<u>resp.</u>

$$(3.6.2) \qquad r - \sum_{i=0}^{n} q_i \leqslant 0 , \qquad r - 2q_j - \sum_{j+1}^{r} q_i \leqslant 0 \quad \underline{\text{pour}} \quad 1 \leqslant j \leqslant n ,$$

$$q_i \leqslant p(i) \quad \underline{\text{pour tout}} \quad i \ ) .$$

Comme $y'_{0,n} = x'_{1,n} x'^2_{2,n} \dots x'^{2^{n-1}}_{n,n} y^{2^n}_{n,n}$, il est immédiat que 3.6 implique 3.3.

Démontrons 3.6. Les monômes X_i , $X_i X_{i+1} X_{i+2}^2 \dots X_n^{2^{n-i-1}} Y_n^{2^{n-i}}$ et $X_n Y_n$ vérifient les inégalités (3.6.1). Il en est de même de produits de tels monômes, ce qui montre la nécessité des inégalités (3.6.1).

Réciproquement, si $P = X_0^{q_0} \dots X_n^{q_n} Y_n^r$ vérifie (3.6.1), nous allons montrer que $P \in A'_n$. Si $q_n \geqslant r$,

$$P = X_0^{q_0} \dots X_n^{q_n - r} (X_n Y_n)^r \in A'_n \ .$$

Si $q_n < r$, on a

$$P = X_0^{q_0} \dots X_{n-1}^{q_{n-1}} (X_n Y_n)^{2q_n - r} (X_n Y_n^2)^{r-q_n} ,$$

et donc $P = (X_n Y_n)^{2q_n - r} . P''$, où P'' est l'image dans B'_n du monôme

$$P' = X_0^{q_0} \dots X_{n-1}^{q_{n-1}} Y_{n-1}^{r'} \quad \text{de } B'_{n-1} \qquad (\text{avec } r' = r - q_n) .$$

On voit immédiatement que P' vérifie (3.6.1), et que si $P' \in A'_{n-1}$, $P \in A'_n$. On peut donc effectuer une récurrence descendante sur n , ce qui termine la démonstration, le cas $n = 0$ étant évident.

L'autre partie de 3.6 se démontre de la même manière, en remplaçant X_i par $x'_{i,n}$ et Y_n par $y'_{n,n}$.

Il reste à démontrer 3.4. Pour cela, introduisons la "mesure en i " d'un élément a de B'_n (notée $\mu_i(a)$) : Si a est un monôme $X_0^{q_0} \dots X_n^{q_n} Y_n^r$, on pose

$$\mu_i(a) = \sup(1 , r/(2q_i + \sum_{i+1}^{n} q_j)) \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n ,$$

et

$$\mu_0(a) = \sup(1 , r/(\sum_0^n q_i)) .$$

Si a est un polynôme, $\mu_i(a)$ est la borne supérieure des μ_i de ses termes. Evidemment, $a \in A'_n$ équivaut à $\mu_i(a) = 1$ pour tout i . Le lemme 3.4 résulte donc du lemme ci-après.

LEMME 3.7. - <u>Si</u> f <u>est un polynôme unitaire de</u> $A'_n[X]$, <u>et</u> a <u>un élément de</u> B'_n , <u>on a</u>

$$\mu_i(a) = \mu_i(f(a)) .$$

C'est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 3.8.

(i) <u>Si</u> $\mu_i(a) = \mu_i(b)$, <u>on a</u> $\mu_i(a) = \mu_i(ab)$.
(ii) <u>Si</u> $\mu_i(a) > \mu_i(b)$, <u>on a</u> $\mu_i(a) > \mu_i(ab) > \mu_i(b)$.

C'est le résultat d'arithmétique bien connu :

Si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, on a $\frac{p}{q} = \frac{p+p'}{q+q'}$;

Si $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$, on a $\frac{p}{q} > \frac{p+p'}{q+q'} > \frac{p'}{q'}$.