Séminaire Samuel.
Algèbre commutative

Jean-Pierre Olivier

Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. n° 6, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A6_0>

ANNEAUX ABSOLUMENT PLATS UNIVERSELS ET ÉPIMORPHISMES À BUTS RÉDUITS

par Jean-Pierre OLIVIER

Le présent laïus se compose de trois parties. Dans la première, nous donnons une caractérisation "épimorphique" des anneaux absoluments plats, qui donne envie de construire des anneaux absolument plats universels, et de montrer quel rôle ils jouent dans la théorie des épimorphismes de la catégorie des anneaux. Dans la deuxième partie, nous caractérisons les anneaux A tels qu'il existe un épimorphisme injectif plat $A \to B$ où B est absolument plat (cette caractérisation est le fruit du labeur commun de MM. BKOUCHE et QUENTEL). Enfin, dans la troisième partie, nous montrons que tous les épimorphismes plats sont "connus" depuis la thèse de P. GABRIEL et la parution du livre de M. BOURBAKI : "Algèbre commutative" [2] (chap. 1 et 2).

I. Anneaux absolument plats universels.

Les anneaux absolument plats sont définis et étudiés dans [2] (chap. 1, § 2, ex. 16 et 17, et chap. 2, § 4, ex. 16).

PROPOSITION 1. - *Soit* $f : A \to B$ *un épimorphisme d'anneaux. Si* A *est absolument plat* f *est surjectif.*

Démonstration. - Décomposons f en $f'' \circ f'$, où f' est surjective et f'' injective. Alors f'' est un épimorphisme injectif ayant pour source un anneau abolument plat (un quotient d'absolument plat est un absolument plat). D'autre part, nous savons qu'une injection ayant pour source un anneau absolument plat est une flèche fidèlement plate (conséquence immédiate de la prop. 9 (b) de [2], chap. 1, § 3, n° 5). On en conclut que f'' est un isomorphisme (voir [6]).

Pour démontrer la proposition 2, nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. - *Soit* $f : A \to B$ *un épimorphisme plat. Pour que* f *soit surjectif, il faut et il suffit que le morphisme induit* $f_{red} : A_{red} \to B_{red}$ *soit surjectif.*

Démonstration. - Si f est injectif, f_{red} est un isomorphisme, donc Spec B est isomorphe à Spec A. On conclut par [6].

On se ramène au cas où f est injectif en décomposant f en $f'' \circ f'$, où f' est surjective et f'' injective. On a $f_{red} = f''_{red} \circ f'_{red}$; f''_{red} est donc surjective. Mais [6] nous dit que f'' est aussi un épimorphisme plat, d'où la conclusion.

PROPOSITION 2. - *Soit A un anneau. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *A_{red} est absolument plat ;*

2° *tout épimorphisme plat, de source A, est surjectif ;*

3° *pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le morphisme canonique $A \to A_{\mathfrak{p}}$ est surjectif.*

Démonstration.

1° $\Longrightarrow$ 2°. Soit $f : A \to B$ un épimorphisme plat ; alors f_{red} est un épimorphisme et A_{red} est absolument plat, donc f_{red} est surjectif. Nous sommes dans les hypothèses du lemme.

2° $\Longrightarrow$ 3° car $A \to A_{\mathfrak{p}}$ est un épimorphisme plat.

3° $\Longrightarrow$ 1°. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A_{\mathfrak{p}} \arrow[d] \\ A/\mathfrak{p} \arrow[r] & A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

Dire que $A \to A_{\mathfrak{p}}$ est surjectif entraîne que $A/\mathfrak{p} \to A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que $\mathfrak{p}$ est maximal.

La construction des anneaux absolument plats universels repose entièrement sur le lemme suivant :

LEMME 2. - *Soient A un anneau, a un élément de A. Pour que $a \in a^2 A$, il faut et il suffit qu'il existe $a_1 \in A$ vérifiant les relations :*

(1) $$aa_1 a = a \quad \text{et} \quad a_1 aa_1 = a_1 .$$

De plus, si un tel a_1 existe, il est unique, et si $e(a)$ est l'idempotent associé à a, $1 - e(a) + a$ est inversible d'inverse $1 - e(a) + a_1$.

<u>Démonstration</u>. - Si $a \in a^2 A$, soit $x \in A$ tel que $a^2 x = a$. On pose $a_1 = ax^2$ et on vérifie sans peine que a_1 vérifie les relations (1).

De plus, on sait que l'idempotent $e(a)$, tel que $e(a)A = aA$, est donné par $e(a) = aa_1$. On vérifie que $(1 - e(a) + a)(1 - e(a) + a_1) = 1$. D'où l'unicité du a_1.

DÉFINITION. - *Soient A un anneau, a un élément de A. Un élément a_1 vérifiant les relations (1), s'il existe, sera dit inverse ponctuel de a, et sera noté $a^{(-1)}$.*

<u>Remarques</u>. - Avec des notations évidentes, on a

$$f(a^{(-1)}) = f(a)^{(-1)}$$

$$(ab)^{(-1)} = a^{(-1)}\, b^{(-1)} .$$

Si a est nilpotent et si a est ponctuellement inversible, on a $a = 0$.

PROPOSITION 3. - *Soient A un anneau, S une partie de A. Il existe un anneau $S^{(-1)}A$ et un morphisme $h_S : A \to S^{(-1)}A$ ayant les propriétés :*

1° *Pour tout $s \in S$, $h_S(s)$ a un inverse ponctuel dans $S^{(-1)}A$;*

2° *le couple $(S^{(-1)}A, h_S)$ est universel pour la propriété précédente.*

<u>Démonstration</u>. - L'anneau $A[T_s]_{s\in S}/I_S$, où I_S est l'idéal de $A[T_s]_{s\in S}$ engendré par les éléments de la forme $s^2T - s$ et $sT^2 - T$, et le morphisme canonique de A dans cet anneau, vérifient les propriétés demandées.

PROPOSITION 4. - *Sous les hypothèses et notations de la proposition 3 :*

1° h_S *est un épimorphisme ;*

2° ${}^a h_S$: Spec $S^{(-1)}A \to$ Spec A *est une bijection ;*

3° *pour tout* $s \in S$, ${}^a h_S^{-1}(V_A(s))$ *est ouvert et fermé dans* Spec $S^{(-1)}A$.

<u>Démonstration</u>.

1° et 3° sont faciles.

2° Le morphisme h_S étant un épimorphisme, ${}^a h_S$ est une injection. Montrons que c'est une surjection. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $d_{\mathfrak{p}}$ le morphisme canonique de A dans le corps résiduel en $\mathfrak{p}$, $k(\mathfrak{p})$. Il existe un, et un seul, morphisme $e_{\mathfrak{p}}$ de $S^{(-1)}A$ dans $k(\mathfrak{p})$ tel que $d_{\mathfrak{p}} = e_{\mathfrak{p}} \circ h_S$, d'où

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Ker} d_{\mathfrak{p}} = h_S^{-1}(\operatorname{Ker} e_{\mathfrak{p}}) .$$

COROLLAIRE.

1° Ker $h_S \subseteq$ Nil A (nilradical de A).

2° Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $S^{(-1)} A$, le morphisme canonique du corps résiduel de A en $\mathfrak{p} \cap A$ dans le corps résiduel de $S^{(-1)} A$ en $\mathfrak{p}$ est un isomorphisme.

Considérons maintenant le cas où $S = A$, notons $T(A)$ l'anneau obtenu et i_A le morphisme canonique $A \to T(A)$. Notons que T est un foncteur, vu la définition "universelle" de $T(A)$.

PROPOSITION 5. - Soit A un anneau.

1° $T(A)$ est un anneau absolument plat ;

2° Spec $T(A) \simeq$ (Spec $A)_{\text{cons}}$, c'est-à-dire Spec $T(A)$ est identique à Spec A muni de la topologie constructible ;

3° Pour tout $x \in$ Spec $T(A)$, $T(A)_x$ est isomorphe au corps résiduel de A en $i_A^{-1}(x)$;

4° T est la restriction aux objets du foncteur adjoint à gauche du foncteur inclusion de la sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux dont les objets sont les anneaux absolument plats.

Démonstration. - Il suffit de montrer 2° et 3°, car 1° et 4° sont faciles.

La topologie de Spec $T(A)$ est séparée, car elle est plus fine que la topologie engendrée par les $D(a)$ et les $V(a)$; elle lui est donc identique.

Par le même raisonnement, on montre que la topologie constructible de Spec A est identique à la topologie engendrée par les $D(a)$ et les $V(a)$. (Pour l'étude de la topologie constructible, voir [4], III et IV.)

3° résulte du lemme suivant, appliqué au morphisme $A \to T(A) \to T(A)_x$.

LEMME 3. - Soit $f : A \to B$ un épimorphisme d'anneaux. Si B est connexe et si, pour tout $a \in A$, $f(a)$ est ponctuellement inversible dans B, alors $f(A)$ est intègre et B est identique au corps des fractions de $f(A)$.

Démonstration. - Pour tout $a \in A$, $f(a)$ est ponctuellement inversible dans B, donc inversible ou nul, car B est connexe, c'est-à-dire n'a pas d'autres idempotents que 0 et 1. On en conclut que $f(A)$ est intègre et que B contient le corps des fractions K de $f(A)$. De plus, $K \xrightarrow{\subset} B$ est un épimorphisme ; c'est donc un isomorphisme, car K est un corps.

PROPOSITION 6. - Tout épimorphisme $f : A \to B$, où B est réduit, se décompose

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\text{can}"] \arrow[d, "f"'] & B' \arrow[r, "\text{injection}"] \arrow[dl, "\text{surjection}"] & T(A) \\ B & & \end{tikzcd}$$

Démonstration. - Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_A"] \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "f"'] & & T(A) \arrow[dd, "T(f)"] \\ & B \times_{T(B)} T(A) \arrow[ur, "i"] \arrow[dl, "f_2"] & \\ B \arrow[rr, "i_B"'] & & T(B) \end{tikzcd}$$

Si B est réduit, i_B est injectif, donc i est injectif. Si f est un épimorphisme, il en est de même (prop. 4) de $i_B \circ f = T(f) \circ i_A$, donc de $T(f)$. Ainsi $T(f)$ est surjectif (prop. 4). On en déduit que f_2 est surjectif, et il suffit de prendre $B' = B \times_{T(B)} T(A)$.

Quelques commentaires.

1° Dans la proposition 2, on ne peut pas remplacer "épimorphisme plat" par "épimorphisme". D. LAZARD a donné des exemples d'épimorphismes injectifs $A \to B$, où A et B sont des anneaux locaux de dimension zéro, qui ne sont pas des isomorphismes (voir exposé n° 8 de ce Séminaire [7]). On ne sait pas ajouter, d'une manière "générique", des éléments nilpotents à un anneau A de manière que A soit dense dans l'anneau B ainsi obtenu. D. FERRAND a des résultats dans ce sens.

2° Soit Ep la sous-catégorie pleine de la catégorie des anneaux dont les objets sont les anneaux A , tels que tout épimorphisme de source A soit surjectif. Le foncteur injection canonique de Ep dans la catégorie des anneaux n'a pas d'adjoint à gauche : soit p un nombre premier ; pour tout $i > 0$, l'anneau $Z/(p^i)$ est un objet de Ep (car artinien, voir exposé n° 8 [7]), mais l'anneau $\prod_{i \in N - \{0\}} Z/(p^i)$ n'est pas un objet de Ep .

3° Soit $f : A \to B$ un morphisme, on peut définir "l'image épimorphe" de A par f comme étant le plus grand sous-anneau C de B contenant $f(A)$ tel que, dans la décomposition de f en $A \xrightarrow{f'} C \xrightarrow{\subset} B$, f' soit un épimorphisme. On montre sans difficulté l'existence de cet anneau. Dans la décomposition de la proposition 6, le morphisme $f_1 : A \to B'$ n'est pas en général un épimorphisme. Si C est l'image épimorphe de A dans B' par f_1, on peut décomposer f en $A \to C \to B$. Le morphisme $C \to B$ est-il encore une surjection ?

4° Il est souvent difficile de montrer qu'un épimorphisme est surjectif. On peut parfois s'en tirer à l'aide du lemme suivant :

LEMME 4. - Soient R et R' deux anneaux, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ des idéaux de R et R', et $f : R \to R'$ tels que

1° $f^{-1}(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}$;

2° $\overline{f} : R/\mathfrak{m} \to R'/\mathfrak{m}$ est surjectif ;

3° f est un épimorphisme ;

4° R est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, et R' est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}'$-adique.

Alors f est surjectif.

Démonstration.

(a) On se ramène au cas où f est injective et R séparé et complet en coupant par $\operatorname{Ker} f$.

(b) Cas où $\mathfrak{m}'^2 = 0$. Soit I le R-transporteur de $\mathfrak{m}'$ dans R ; alors I est un idéal de R.

C'est aussi un idéal de R' : soient $a' \in R'$ et $b \in I$; alors a' s'écrit $a + \eta'$ avec $a \in R$, $\eta' \in \mathfrak{m}'$, donc

$$ba' = ba + b\eta' \in R ,$$

et $ba'\eta'' = ba\eta'' = ab\eta''$ est un élément de R pour tout $\eta'' \in \mathfrak{m}'$. L'idéal I contient $\mathfrak{m}$, car $\mathfrak{m}\mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{m}'^2 = 0$. On a le dessin suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & R' \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
R/\mathfrak{m} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[dd] & R'/\mathfrak{m}' \arrow[l, bend left, "\overline{f}^{-1}"] & \\
& & \\
R/I \arrow[rr, "\overline{\overline{f}}", "\text{injection}"'] & & R'/I
\end{tikzcd}$$

D'où deux morphismes de R' dans R'/I qui, après composition avec f, sont égaux. Si on suppose $R \neq R'$, ces deux morphismes sont distincts, ce qui est contradictoire.

(c) Le cas où $\mathfrak{m}'^n = 0$ se traite par récurrence à l'aide du (b). Le passage au cas général relève de BOURBAKI, "Algèbre commutative" ([2] chap. III, § 2, n° 8).

II. Anneaux réduits à spectre minimal compact.

PROPOSITION 7 (QUENTEL). - *Soit A un anneau réduit. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1° *il existe un monomorphisme plat de source A et de but absolument plat ;*

2° *il existe un mono-épimorphisme plat de source A et de but absolument plat* (celui-ci est d'ailleurs unique et s'identifie à $A \to M(A)$) ;

3° *l'ensemble, $\mathrm{Min}\, A$, des idéaux premiers minimaux de A, muni de la topologie de Zariski, est compact ;*

4° *le morphisme canonique $A \to \prod_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Min}\, A} A_{\mathfrak{p}}$ est plat.*

Démonstration.

1° <==> 2° . Soit $f : A \to B$ un monomorphisme plat où B est absolument plat : il existe $T(A) \xrightarrow{f_1} B$ tel que $f = f_1 \circ i_A$. Soit C l'image de $T(A)$ dans B par f_1 , C est absolument plat et $A \to C$ est un épimorphisme. D'autre part, $C \to B$ est fidèlement plat donc $A \to C$ est plat.

1° ==> 3° . On utilise le lemme suivant :

LEMME 5. - *Soit $f : A \to B$ un morphisme plat. On a* ${}^a f(\mathrm{Min}\, B) \subseteq \mathrm{Min}\, A$.

Démonstration du lemme. - Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal de B . Considérons le morphisme $f_{\mathfrak{p}} : A_{f^{-1}(\mathfrak{p})} \to B_{\mathfrak{p}}$ c'est un morphisme local plat, donc $f_{\mathfrak{p}}$ est fidèlement plat, en particulier $f_{\mathfrak{p}}$ est injectif. De plus, $B_{\mathfrak{p}}$ est local de dimension zéro, donc aussi $A_{f^{-1}(\mathfrak{p})}$. Soit donc $f : A \to C$ un monomorphisme plat où C est absolument plat. On a

$$ {}^a f(\mathrm{Spec}\, C) = {}^a f(\mathrm{Min}\, C) \subseteq \mathrm{Min}\, A $$

car f est plat, et on a

$$ {}^a f(\mathrm{Spec}\, C) = {}^a f(\mathrm{Min}\, C) \supseteq \mathrm{Min}\, A $$

car f est injectif. D'où la conclusion.

3° $\Longrightarrow$ 4° . Nous allons utiliser le critère de platitude suivant ([5], IV, chap. 0, 6.3.3) : "soit $f : A \to B$, pour que f soit plat, il faut et il suffit que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de B , $A_{f^{-1}(\mathfrak{p})} \xrightarrow{f_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{p}}$ soit plat."

On doit, auparavant, s'assurer que, sous la condition 3°, l'image du spectre de $\prod_{\mathfrak{p}\in \operatorname{Min} A} A_{\mathfrak{p}}$ dans A est $\operatorname{Min} A$.

LEMME 6. - Soient A un anneau, X une partie du spectre de A , c_X le morphisme canonique de A dans $\prod_{x\in X} k(x) = B_X$ ($k(x)$ étant le corps résiduel de A en x). On a ${}^a c_X(\operatorname{Spec} B_X) = \gamma(X)$ l'adhérence constructible de X dans $\operatorname{Spec} A$.

Démonstration du lemme 6. - L'ensemble ${}^a c_X(\operatorname{Spec} B_X)$ contient X , est fermé pour la topologie constructible, et par suite contient $\gamma(X)$. Soit X' l'ensemble des points isolés de $\operatorname{Spec} B_X$, ${}^a c_X$ est une bijection de X' sur X , ${}^a c_X$ est continue pour les topologies constructibles des spectres, donc

$${}^a c_X(\gamma(X')) \subseteq \gamma(X) .$$

Mais B_X est absolument plat, la topologie constructible de $\operatorname{Spec} B_X$ est identique à la topologie de Zariski, et X' est dense dans $\operatorname{Spec} B_X$.

Si $\operatorname{Min} A$ est compact, $\gamma(\operatorname{Min} A) = \operatorname{Min} A$. Soit alors $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $B_{\operatorname{Min} A}$. Le morphisme $A_{\mathfrak{p}\cap A} \to B_{\operatorname{Min} A, \mathfrak{p}}$ est plat, parce que $A_{\mathfrak{p}\cap A}$ est un corps.

PROPOSITION 8 (BKOUCHE). - Soit A un anneau réduit. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1° toute intersection d'idéaux premiers minimaux est noyau de localisation ;

2° la famille $(V(f) \cap \operatorname{Min} A)_{f\in A}$ est une base d'ouverts de $\operatorname{Min} A$;

3° tout élément f de A , diviseur de zéro, a un complémentaire g (c'est-à-dire $V(f) \cap \operatorname{Min} A = D(g) \cap \operatorname{Min} A$) ;

4° l'anneau total des fractions de A est absolument plat.

Démonstration. - 2° $\Longrightarrow$ 1° .

LEMME 7. - Soient A un anneau réduit, I un idéal de A tel que I soit une intersection d'idéaux premiers minimaux. Pour que I soit le noyau d'une localisation, il faut et il suffit que $V(I) \cap \operatorname{Min} A$ soit une intersection d'ouverts affines spéciaux de $\operatorname{Min} A$ (c'est-à-dire de la forme $D(f) \cap \operatorname{Min} A$).

Démonstration du lemme 7. - Soit $I = \operatorname{Ker}(j_S : A \to S^{-1} A)$, où S est une partie multiplicative de A ; $I = \sum_{f \in S} \mathrm{Ann}\, f$ (cf. [1] ou [2]), d'où

$$V(I) \cap \mathrm{Min}\, A = \bigcap_{f \in S} (D(f) \cap \mathrm{Min}\, A) .$$

Si $V(I) \cap \mathrm{Min}\, A = \bigcap_{\ell \in L} (D(f) \cap \mathrm{Min}\, A)$, où $L \subseteq A$, soit S la partie multiplicative de A engendrée par L . On a

$$V(I) \cap \mathrm{Min}\, A = \bigcap_{f \in S} (D(f) \cap \mathrm{Min}\, A) = V(\mathrm{Ker}\, j_S) \cap \mathrm{Min}\, A$$

et puisque I et $\mathrm{Ker}\, j_S$ sont des intersections d'idéaux premiers minimaux $I = \mathrm{Ker}\, j_S$ (voir [1]).

Soit I une intersection d'idéaux premiers minimaux sous l'hypothèse 6, $\mathrm{Min}\, A \cap D(I) = \bigcup_{f \in L} (V(f) \cap \mathrm{Min}\, A)$, d'où

$$\mathrm{Min}\, A \cap V(I) = \bigcap_{f \in L} (D(f) \cap \mathrm{Min}\, A) .$$

1° $\Longrightarrow$ 3° . Soit f un diviseur de zéro dans A , l'intersection I des idéaux premiers minimaux de A contenant f est un noyau de localisation : soit $I = \mathrm{Ker}\, j_S$; alors

$$V(f) \cap \mathrm{Min}\, A = V(I) \cap \mathrm{Min}\, A = \bigcap_{g \in I} (D(g) \cap \mathrm{Min}\, A) .$$

D'autre part f annule un élément g' de S : on a $D(f) \cap \mathrm{Min}\, A \cap D(g') = \emptyset$, donc

$$D(g') \cap \mathrm{Min}\, A \subseteq V(f) \cap \mathrm{Min}\, A ,$$

d'où $V(f) \cap \mathrm{Min}\, A = D(g') \cap \mathrm{Min}\, A$.

3° $\Longrightarrow$ 4° . Soit g un complémentaire de f . On a $gf = 0$, car

$$V(fg) \cap \mathrm{Min}\, A = (V(f) \cap \mathrm{Min}\, A) \cup (V(g) \cap \mathrm{Min}\, A) = \mathrm{Min}\, A ,$$

comme $V(f) \cap \mathrm{Min}\, A \cap V(g) = \emptyset$, on en conclut que $f + g$ est régulier (n'est contenu dans aucun idéal premier minimal).

Si B est l'anneau total des fractions de A , et si A vérifie la propriété 7, alors B la vérifie aussi. Pour tout élément f de B , il existe g dans B tel que $fg = 0$ et $f + g$ soit inversible. On en conclut que B est absolument plat.

4° $\Longrightarrow$ 2° . Il suffit, pour cela, de remarquer que $V_{\mathbf{M}(A)}(f/g) = V(f) \cap \mathrm{Min}\, A$ (g étant un élément régulier de A).

PROBLÈME. - Quoiqu'on ait annoncé lors du séminaire une démonstration de "les conditions de la proposition 6" $\Longrightarrow$ "les conditions de la proposition 7", les arguments avancés ne permettaient pas de conclure. Ce problème reste entier.

III. Épimorphismes plats et localisation au sens de P. GABRIEL.

Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Considérons le foncteur image $f^* :$ Mod $A \to$ Mod B , et le foncteur image réciproque $f_* :$ Mod $B \to$ Mod A . On sait que f_* est adjoint à droite de f^* , et que f_* est exact. Notons Φ la transformation naturelle de $f^* \circ f_*$ dans Id Mod B .

LEMME.

1° Pour que f^* soit exact, il faut et il suffit que f soit plat ;

2° Pour que Φ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f soit un épimorphisme.

Démonstration.

1° est bien connu.

2° Si Φ est un isomorphisme, $\Phi(B) : B \otimes_A B \to B$ est un isomorphisme, donc f est un épimorphisme.

Si f est un épimorphisme, on peut écrire

$$B \otimes_A M \simeq B \otimes_A (B \otimes_B M) \simeq (B \otimes_A B) \otimes_B M \simeq B \otimes_B M \simeq M .$$

Si f est un épimorphisme plat, nous sommes sous les hypothèses de la proposition 5 du chapitre III de [4] (p. 374). On en conclut que la sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de Mod A , dont les objets sont les A-modules M qui vérifient $M \otimes_A B = 0$, est une sous-catégorie localisante de Mod A , et que le foncteur localisation défini par $\mathcal{C}$ est isomorphe au foncteur $f_* \circ f^*$ qui est exact. Le filtre des idéaux de A , défini par $\mathcal{C}$, admet une base formée d'idéaux de type fini : en effet, $A/I \otimes_A B = 0$ est équivalent à $IB = B$ (la suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ est transformée en la suite exacte $0 \to IB \to B \to A/I \otimes_A B \to 0$), c'est-à-dire qu'il existe une famille finie (c_i) d'éléments de I et une famille finie (d_i) d'éléments de B telles que $1 = \sum c_i d_i$, l'idéal $\sum c_i A = I_1$ est de type fini, et vérifie $I_1 B = B$.

Inversement, soit $\mathfrak{F}$ un ensemble topologisant idempotent d'idéaux d'un anneau A vérifiant :

(A) $\mathfrak{F}$ admet une base formée d'idéaux de type fini ;

(B) le foncteur localisation, défini par $\mathfrak{F}$, est exact.

Alors, l'exercice 20 (b) du chapitre II, § 2 de [2], nous dit que le morphisme $A \to A_{\mathfrak{F}}$ est plat. Cet exercice nous dit aussi que la transformation naturelle $A_{\mathfrak{F}} \otimes_A M \to M_{\mathfrak{F}}$ est un isomorphisme, et que la catégorie des A -modules s'identifie à la sous-catégorie pleine des A-modules M tels que le morphisme canonique $M \to M_{\mathfrak{F}}$ soit un isomorphisme. On en conclut que $A \to A_{\mathfrak{F}}$ est un épimorphisme. On a mis en évidence la proposition suivante :

PROPOSITION.

1° Soit $f : A \to B$ un épimorphisme plat. L'ensemble $\mathfrak{F}$ des idéaux I de A, tels que $IB = B$, est topologisant idempotent, $\mathfrak{F}$ admet une base formée d'idéaux de type fini, et le foncteur localisation défini par $\mathfrak{F}$ est exact ;

2° Réciproquement, soit $\mathfrak{F}$ un ensemble topologisant idempotent d'idéaux d'un anneau A ayant une base formée d'idéaux de type fini et tel que le foncteur localisation, défini par $\mathfrak{F}$, soit exact, alors le morphisme canonique $A \to A_{\mathfrak{F}}$ est un épimorphisme plat.

On laisse au lecteur le soin de tirer les conséquences immédiates de cette proposition et du lemme précédent. A ma connaissance, les remarques qui précèdent n'ont pas été utilisées pour construire effectivement des épimorphismes plats : en particulier, quel est l'ensemble des idéaux de A associé à l'épimorphisme $A \to M(A)$? L'obstruction à ces constructions est évidemment la condition "externe" : le foncteur localisation, défini par $\mathfrak{F}$, est exact. L'étude de cette condition n'a pas encore donné de caractérisations utilisables.

Signalons, pour finir, que le langage utilisé est celui de [4] et de [2] (chap. II, § 2, ex. 16 à 21).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BKOUCHE (Rudolphe). - Thèse Sc. math. Fac. Sc. Paris (en instance de soutenance, probablement 1968).

[2] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1 et 2, 3 et 4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 et 1293 ; Bourbaki, 27 et 28).

[3] CHEVALLEY (Claude). - Introduction à la théorie des schémas. Cours de la Faculté des Sciences de Paris, 1964/65. - Paris, Centre de Physique théorique de l'Ecole Polytechnique, s. d. (multigr.).

[4] GABRIEL (Pierre). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[5] GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique, I à IV. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[6] LAZARD (Daniel). - Epimorphismes plats, Séminaire Samuel, 1967/68, n° 4, 12 p.

[7] LAZARD (Daniel). - Deux méchants épimorphismes, Séminaire Samuel, 1967/68, n° 8 5 p.