Séminaire Samuel.
Algèbre commutative

DANIEL LAZARD

Épimorphismes plats

Séminaire Samuel. Algèbre commutative, tome 2 (1967-1968), exp. nº 4, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SAC_1967-1968__2__A4_0>

ÉPIMORPHISMES PLATS

par Daniel LAZARD

1. Préliminaires.

Dans tout ce qui suit, $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme d'anneaux, $i_1 : B \to B \otimes_A B$ (resp. $i_2 : B \to B \otimes_A B$) l'homomorphisme défini par $i_1(x) = x \otimes 1$ (resp. $i_2(x) = 1 \otimes x$) ; $p : B \otimes_A B \to B$ est l'homomorphisme défini par $p(x \otimes y) = xy$, et $\mathfrak{J}$ est le noyau de p .

LEMME 1.0. - Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) f est un épimorphisme ;

(ii) $i_1 = i_2$;

(iii$_1$) i_1 est un isomorphisme ;

(iii$_2$) i_2 est un isomorphisme ;

(iv) p est un isomorphisme.

C'est une conséquence de ce que le produit tensoriel est la somme dans la catégorie des anneaux, et a été exposé en détails par ROBY.

LEMME 1.0'.

(i) Le composé de deux épimorphismes est un épimorphisme ;

(ii) Si $g \circ f$ est un épimorphisme, il en est de même de g ;

(iii) Si $f : A \to B$ est un épimorphisme et $g : A \to A'$ une flèche, alors $f' : A' \to A' \otimes_A B$ est un épimorphisme.

La dernière assertion de 1.0' admet une réciproque dans la catégorie des anneaux.

LEMME 1.1. - Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) f est un épimorphisme ;

(ii) Pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $A_{\mathfrak{p}} \to B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ est un épimorphisme.

C'est une conséquence immédiate de 1.0 (iv) et de l'isomorphisme canonique

$$B \otimes_A B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \simeq (B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} (B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) .$$

LEMME 1.2. - <u>Un épimorphisme fidèlement plat est un isomorphisme.</u>

Soient f un tel épimorphisme, $K = \mathrm{Ker}\, f$, $L = \mathrm{Coker}\, f$ (dans la catégorie des A-modules).

Comme $A \otimes_A B \to B \otimes_A B$ est un isomorphisme (1.0 (iii_2)), on a

$$K \otimes_A B = L \otimes_A B = 0 \ ,$$

donc $K = L = 0$.

COROLLAIRE 1.3.

(i) <u>Si</u> A <u>est un corps et</u> f <u>un épimorphisme,</u> f <u>est surjectif</u> ;

(ii) <u>Si</u> f <u>est un épimorphisme plat et local d'anneaux locaux, c'est un isomorphisme</u>.

PROPOSITION 1.4. - <u>Si</u> f <u>est un épimorphisme, l'application</u> ${}^t f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ <u>est injective</u>.

Cela résulte de 1.3 (i), de 1.0' (iii) et du fait que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , $\mathrm{Spec}(K(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$ s'identifie à $({}^t f)^{-1}(\mathfrak{p})$.

La proposition suivante est essentielle, car elle caractérise les épimorphismes en termes de géométrie algébrique.

PROPOSITION 1.5. - <u>Pour que</u> f <u>soit un épimorphisme, il faut et il suffit que</u> :

(i) ${}^t f$ <u>soit injective</u> ;

(ii) <u>les extensions résiduelles soient triviales</u> ;

(iii) $\mathfrak{J}$ <u>est de type fini en tant que</u> $(B \otimes B)$-<u>module (rappelons que c'est vrai si</u> B <u>est un localisé d'une</u> A-<u>algèbre de type fini</u>) ;

(iv) $\Omega_A(B) = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ <u>est nul</u>.

1° <u>La condition est nécessaire</u> : C'est une conséquence immédiate de 1.4 pour (i), de 1.3 (i) et de 1.0' (iii) pour (ii), et de 1.0 (iv) pour (iii) et (iv).

2° Réciproquement, soient g et h deux flèches de B dans un anneau <u>réduit</u> C telles que $g \circ f = h \circ f$. Il est immédiat, par (i), que ${}^t g = {}^t h$. Soient

$$Z = \mathrm{Spec}\, C \ , \qquad Y = {}^t g(Z) = {}^t h(Z) \qquad \text{et} \qquad X = {}^t f(Y) \ .$$

On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\
\prod\limits_{p \in X} K(p) \arrow[r, "f'"'] & \prod\limits_{q \in Y} K(q) \arrow[r, shift left, "g'"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & \prod\limits_{m \in Z} K(m)
\end{tikzcd}$$

On a $g' \circ f' = h' \circ f'$. Par (i) et (ii), f' est un isomorphisme. Donc $g' = h'$. Donc $c \circ g = c \circ h$. Comme C est réduit, c est injectif, et $g = h$.

3° Soit $\varphi : (B \otimes B) \to (B \otimes B)_{\text{réd}}$. Ce qui précède montre que $\varphi \circ i_1 = \varphi \circ i_2$. Donc si $x \in B$, $1 \otimes x - x \otimes 1$ est dans $\operatorname{Ker} \varphi$. Mais $\mathfrak{J}$ est engendré par les éléments de la forme $1 \otimes x - x \otimes 1$ (en effet, si $y = \sum a_i \otimes b_i$ et $p(y) = 0$, $\sum a_i\, b_i = 0$ et $y = \sum a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$).

Donc $\mathfrak{J} \subset \operatorname{Ker} \varphi$ est un nil-idéal, qui est nul par (iii) et (iv). Par conséquent f est un épimorphisme par 1.0 (iv).

EXEMPLE 1.6. - Si A est l'anneau local d'un point double à tangentes distinctes d'une courbe, et B le localisé en un de ses idéaux maximaux de la fermeture intégrale de A , $A \xrightarrow{f} B$ est un épimorphisme injectif et local d'anneaux locaux intègres à spectres homéomorphes ; mais h n'est pas un isomorphisme. Comme exemple explicite, on peut prendre pour A le localisé à l'origine de $k[X , Y]/(X^3 + X^2 - Y^2)$, pour B le localisé à l'origine de $k[T]$, et pour f :

$$f(X) = T^2 - ZT \qquad f(Y) = (T^2 - ZT)(T - 1) .$$

PROPOSITION 1.7. - <u>Un épimorphisme fini est surjectif</u>.

D'après 1.1, il suffit de supposer A local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Mais si $\varphi : M \to N$ est un morphisme de modules de type fini tel que $\varphi \otimes A/\mathfrak{m}$ est surjectif, alors φ est surjectif. En appliquant ceci à p , on est ramené au cas connu (1.3) des corps grâce à l'isomorphisme canonique

$$B \otimes_A B \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq (B \otimes_A A/\mathfrak{m}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (B \otimes_A A/\mathfrak{m}) .$$

Une autre démonstration, due à G. SABBAG, a été donnée en annexe à l'exposé de N. ROBY.

2. Epimorphismes plats

L'exemple de l'épimorphisme $A \to A_a \times A/aA$ (voir introduction et exposé de ROBY) montre qu'un épimorphisme $f : A \to B$ n'induit pas nécessairement un homéomorphisme de $\operatorname{Spec} B$ sur son image. Nous allons voir que si on suppose f plat, la situation est bien meilleure.

PROPOSITION 2.1. - <u>Si</u> $f : A \to B$ <u>est un épimorphisme plat, et</u> $\mathfrak{b}$ <u>un idéal de</u> B , <u>alors</u> $\mathfrak{b} = B.f^{-1}(\mathfrak{b})$.

Soit $\mathfrak{a} = f^{-1}(\mathfrak{b})$. On a $B/\mathfrak{b} \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_A B$, par exemple parce que

$$B/\mathfrak{b} \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_B B \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_B B \otimes_A B \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_A B .$$

En tensorisant par B l'injection $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{b}$, on obtient donc l'injection $B/\mathfrak{a}B \to B/\mathfrak{b}$. Comme c'est évidemment une surjection, on en déduit le résultat.

COROLLAIRE 2.2. - <u>Si</u> $f : A \to B$ <u>est un épimorphisme plat,</u> ${}^t f$ <u>est un homéomorphisme de</u> Spec B <u>sur son image</u>.

COROLLAIRE 2.3. - <u>Si</u> $f : A \to B$ <u>est un épimorphisme plat et si</u> A <u>est noethérien,</u> B <u>l'est aussi</u>.

PROPOSITION 2.4. - <u>Si</u> $f : A \to B$ <u>est un homomorphisme d'anneaux, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) f <u>est un épimorphisme plat</u> ;

(ii) <u>Pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{m}$ <u>de</u> A , $f \otimes_A A_\mathfrak{m}$ <u>est un épimorphisme plat</u> ;

(iii) <u>Pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{n}$ <u>de</u> B , $f \otimes_A A_{f^{-1}(\mathfrak{n})}$ <u>est un isomorphisme</u> ;

(iv) <u>Pour tout idéal premier</u> $\mathfrak{m}$ <u>de</u> A , <u>ou bien on a</u> $B = \mathfrak{m}B$, <u>ou</u> $f \otimes A_\mathfrak{m}$ <u>est un isomorphisme</u>.

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) par 1.1 et le théorème de globalisation de la platitude.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv), car si $B \otimes_A A_\mathfrak{m}$ est un $A_\mathfrak{m}$-module fidèlement plat, $f \otimes_A A_\mathfrak{m}$ est un isomorphisme ; sinon, $B \otimes_A k(\mathfrak{m}) = 0$, donc aussi $B/\mathfrak{m}B = 0$, car B plat sur A implique $B/\mathfrak{m}B \subset B \otimes_A k(\mathfrak{m})$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) est trivial.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) . Par 1.0 (iii), il suffit de montrer que $B_\mathfrak{n} \otimes_B i_1 : B_\mathfrak{n} \to B_\mathfrak{n} \otimes_A B$ est un isomorphisme. Il en est ainsi car c'est le composé des flèches :

$$B_\mathfrak{n} \xrightarrow{\sim} B_\mathfrak{n} \otimes_{A_\mathfrak{m}} A_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} B_\mathfrak{n} \otimes_{A_\mathfrak{m}} A_\mathfrak{m} \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B_\mathfrak{n} \otimes_A B$$

où $\mathfrak{m} = f^{-1}(\mathfrak{n})$.

PROPOSITION 2.5. - <u>Si</u> A <u>est un anneau, il y a bijection entre les classes à un isomorphisme près d'épimorphismes plats, et les parties de</u> Spec A <u>qui, munies du faisceau induit, sont des schémas affines. Ces parties sont stables par générisation</u>.

Il résulte de 2.2 et de 2.4 (iii) que, si $A \to B$ est un épimorphisme plat, $\operatorname{Spec} B$ s'identifie à une partie de $\operatorname{Spec} A$ stable par générisation, et que le faisceau structural de B est le faisceau induit sur $\operatorname{Spec} B$ par le faisceau structural de A.

Réciproquement, si X est une partie de $\operatorname{Spec} A$ qui, munie du faisceau induit, est un schéma affine, le morphisme $A \to \Gamma(X)$ est un épimorphisme plat par 2.4 (iii).

3. *Epimorphismes plats injectifs.*

PROPOSITION 3.1. - *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'anneaux, tel que f *est plat,* h *est injectif, et le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "i_1"] & \\ C \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & B \otimes_A B \\ & B \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

commute. Alors :

1° *L'application canonique* $B \otimes_A C \to B \otimes_C C$ *définit un isomorphisme*

$$B \otimes_A C \xrightarrow{\sim} B \ ;$$

2° h *est plat* ;

3° *Si* g *est plat,* g *est un épimorphisme* ;

4° *Si* f *est fidèlement plat,* g *est un isomorphisme.*

Le 1° résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A C \arrow[r] \arrow[d, "B \otimes_A h"'] & B \otimes_C C \arrow[d, "B \otimes_C h"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\sim"] & B \otimes_C B \end{tikzcd}$$

En effet, la flèche du bas est bijective par hypothèse, et celle de gauche est injective car f est plat. Donc la flèche du haut que l'on sait surjective est aussi injective.

Le 2° résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f \otimes C"'] & B \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

et de la platitude de f .

Le 3° provient de l'injectivité de $C \otimes_A C \to C$ (1.0 (iv)) que l'on déduit du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C \otimes_A C \arrow[r] \arrow[d, "h \otimes C"'] & C \arrow[d, "h"] \\ B \otimes_A C \arrow[r, phantom, "\simeq"] & B \end{tikzcd}$$

car, comme g est plat et h injectif, $h \otimes C$ est injectif.

4° De l'isomorphisme $A \otimes_A B \to C \otimes_A B$, on déduit aussitôt l'isomorphisme $A \to C$.

COROLLAIRE 3.2. - Soit $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \\ & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$ un diagramme commutatif d'anneaux tel que f est un épimorphisme plat et h une injection. Alors :

(i) h est un épimorphisme plat ;

(ii) Si g est plat, c'est un épimorphisme ;

(iii) Si f est fidèlement plat, g est un isomorphisme.

PROPOSITION 3.3. - Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

(i) Si f est injectif, $\mathrm{Ass}\, A \subset {}^t f(\mathrm{Ass}\, B)$;

(ii) Si f est plat et si $\mathrm{Ass}\, A \subset {}^t f(\mathrm{Spec}\, B)$, f est injectif ;

(iii) En particulier, si f est plat, f injectif équivaut à $\mathrm{Ass}\, A \subset {}^t f(\mathrm{Spec}\, B)$.

Il suffit de montrer (i) et (ii).

(i) On peut supposer A local, d'idéal maximal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Ass}\, A$, car, si f est injectif, il en est de même de $f \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$, et car Ass se localise bien.

Donc $\mathfrak{m}$ est le seul idéal premier contenant l'annulateur d'un élément $a \in A$. Comme f est injectif, $\mathrm{Ann}_B(a) \neq B$, et il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de Spec B minimaux parmi ceux contenant $\mathrm{Ann}_B(a)$. On a donc $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}\, B$, et comme $f^{-1}(\mathfrak{q}) \supset \mathrm{Ann}_A(a)$, il vient $f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$.

(ii) Pour montrer que f est injectif, il suffit de montrer que, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A$, $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A f$ est une injection. Cela résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\, A} A_{\mathfrak{p}} & \to & \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}\, A} (A_{\mathfrak{p}} \otimes_A B) \end{array}$$

Mais comme $\mathrm{Ass}\, A \subset {}^t f(\mathrm{Spec}\, B)$, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, A$, on a $\mathfrak{p}(A_{\mathfrak{p}} \otimes_A B) \neq A_{\mathfrak{p}} \otimes_A B$. Donc la flèche $A_{\mathfrak{p}} \otimes_A f$ est fidèlement plate, et donc injective.

PROPOSITION 3.4. - <u>Pour tout anneau</u> A, <u>il existe un épimorphisme plat injectif</u> $A \to M(A)$, <u>que nous appellerons épimorphisme plat maximal, tel que les classes à un isomorphisme près d'épimorphismes plats injectifs s'identifient aux sous-anneaux de</u> $M(A)$ <u>qui sont plats sur</u> A.

Un produit tensoriel ou une limite inductive filtrante d'épimorphismes plats injectifs est un épimorphisme plat injectif. La première assertion montre que l'inclusion des spectres induit un ordre filtrant sur les classes d'épimorphismes plats injectifs. En passant à la limite inductive, on obtient une plus grande classe. Prenons pour $A \to M(A)$ un représentant de cette classe. D'après ce qui précède, $A \subset M(A)$. Si $B \subset M(A)$ est plat sur A, $A \to B$ est un épimorphisme plat injectif par 3.2. Réciproquement, si $A \to B$ est un épimorphisme plat injectif, par définition de $M(A)$, on a un diagramme commutatif $\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & M(A) \\ & B \arrow[u] \end{tikzcd}$, et $B \to M(A)$ est injectif par 3.5.

LEMME 3.5. - <u>Soit</u> $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \\ & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$ <u>un diagramme commutatif d'anneaux tel que</u> f <u>est injectif et</u> g <u>est un épimorphisme plat ; alors</u> h <u>est injectif</u>.

Comme g est un épimorphisme, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A A & \xrightarrow{B \otimes g} & B \otimes_A C \\ \wr\!\mid & & \wr\!\mid \\ B \simeq B \otimes_C C & \simeq & B \otimes_C C \otimes_A C \end{array}$$

et $B \otimes_A g$ est un isomorphisme. On en déduit que h est injectif grâce au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f \otimes_A C"'] & B \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 3.6. - *Si* $f : A \to B$ *est un homomorphisme plat d'anneaux, il existe un homomorphisme et un seul,* $M(f) : M(A) \to M(B)$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ M(A) \arrow[r, "M(f)"'] & M(B) \end{tikzcd}$$

De plus, $M(f)$ *est plat.*

Si f *est injectif, il en est de même de* $M(f)$.

Si f *est un épimorphisme plat et injectif,* $M(f)$ *est un isomorphisme.*

Il y a unicité, car $A \to M(A)$ est un épimorphisme.

Comme $B \to M(A) \otimes_A B$ est un épimorphisme plat injectif, il existe un épimorphisme plat injectif canonique $M(A) \otimes_A B \to M(B)$, d'où on en déduit $M(f)$, en composant avec $M(A) \otimes f$.

Si f est injectif, il en est de même de $M(A) \otimes f$, donc aussi de $M(f)$.

La dernière assertion résulte de la maximalité de $M(A)$.

PROPOSITION 3.7. - *Pour que* $f : A \to B$ *soit un épimorphisme plat, il faut et il suffit que* f *soit plat et que* $B \subset M(f(A))$.

La condition nécessaire résulte de 3.2 (i). Si f est plat et $B \subset M(f(A))$, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[r, "i"] & M(f(A)) \\ & f(A) \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $i \circ h$ est un épimorphisme plat, il en est de même de i (3.2 (i)) . Donc $i \circ f = (i \circ h) \circ g$ est un épimorphisme et $i \circ f$ est plat, car i et f le sont. Donc, comme f est plat et i injectif, f est un épimorphisme (3.2 (ii)).

AKIBA a défini des anneaux de fractions généralisés à l'aide de la condition de 3.7, dans laquelle il utilise $\mathrm{Tot}(f(A))$ au lieu de $M(f(A))$ (par $\mathrm{Tot}\ A$ nous désignerons l'anneau total des fractions de A). Ceci amène à poser la question :

A-t-on $M(A) = \mathrm{Tot}(A)$?

PROPOSITION 3.8. - Si Spec(Tot A) est le générisé de Ass A ,

$$M(A) = \mathrm{Tot}\ A .$$

C'est une conséquence immédiate de 2.5 et 3.3.

COROLLAIRE 3.9. - Si Ass A est fini (c'est le cas si A est noethérien ou intègre), alors

$$M(A) = \mathrm{Tot}\ A .$$

En effet, un idéal premier de Tot A est contenu dans la réunion des idéaux premiers de Ass A , et est donc contenu dans l'un d'eux.

PROPOSITION 3.10 (BKOUCHE, OLIVIER, QUENTEL). - Si A est réduit et Ass A compact, Ass A = Spec(Tot(A)) .

PROPOSITION 3.11. - Si A est cohérent et réduit,

$$\mathrm{Ass}\ A = \mathrm{Spec}(\mathrm{Tot}(A)) .$$

Ces deux résultats sont démontrés dans l'exposé d'OLIVIER. Dans ces deux cas, 3.8 montre que $M(A) = \mathrm{Tot}(A)$.

PROPOSITION 3.12. - Si A est un anneau de Krull dont le groupe des classes de diviseurs C(A) est de torsion, tout épimorphisme plat $f : A \to B$ identifie B à un anneau de fractions $S^{-1} A$.

Eliminons le cas trivial $B = 0$. Par 3.3, f est injectif, et par 3.9, M(A) est le corps des fractions K de A . Donc B s'identifie à un sous-anneau de K plat sur A .

Soit S l'ensemble des éléments $s \in A$ tels que $1/s \in B$. Il s'agit de montrer que $B = S^{-1} A$.

Soit $x \in B$; on a $\mathrm{div}(x) = D - D'$ avec D et D' diviseurs positifs étrangers. L'hypothèse sur C(A) montre qu'il existe un entier n tel que nD et nD' soient principaux, et donc que $x^n = p/q$ avec p et q dans A et étrangers, i. e. $A_p \cap A_q = A_{pq}$.

On a $qx^n = p.1$. D'après BOURBAKI (Algèbre commutative, chap. I, § 2, n° 11, corollaire 1 de la proposition 13), il existe des e_i dans B , des λ_i et des μ_i dans A tels que

$$x^n = \sum_i \lambda_i e_i \ , \quad 1 = \sum_i \mu_i e_i \quad \text{et} \quad q\lambda_i - p\mu_i = 0 \qquad \text{pour tout } i .$$

Comme $A_p \cap A_q = A_{pq}$, pour tout i , on a $\mu_i/q \in A$. Donc $1/q = \sum_i (\mu_i/q)e_i \in B$, et $q \in S$.

On obtient finalement $x^n \in S^{-1} A$. Comme $S^{-1} A$ est intégralement clos, on a $x \in S^{-1} A$ et $B = S^{-1} A$.

Il y a une réciproque partielle.

PROPOSITION 3.13. - Soit A un anneau de Dedekind, pour que les épimorphismes plats de source A s'identifient aux anneaux de fractions de A , il faut et il suffit que le groupe des classes soit de torsion.

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal dont l'image soit sans torison dans le groupe des classes. Prenons $B = A[\mathfrak{m}^{-1}]$. Comme B est plat, $A \to B$ est un épimorphisme plat (3.2 (ii)).

Mais si $s \in A$ est inversible dans B , il l'est aussi dans A : en effet, si $1/s \in B$, il existe un entier n tel que $1/s \in \mathfrak{m}^{-n}$. Donc $\mathfrak{m}^n \subset As$ et As est une puissance de $\mathfrak{m}$. Ceci n'est possible que si $n = 0$, i. e. $1/s \in A$.

4. Ouverts affines dans les spectres des anneaux intègres noethériens.

4.1. - Dans tout ce qui suit, A est un anneau intègre noethérien de corps des fractions K . Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A , on note $D(\mathfrak{a})$ l'ouvert $\operatorname{Spec} A - V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}^{-1} = (A : \mathfrak{a})$ et $\mathfrak{a}^{-n} = (\mathfrak{a}^n)^{-1}$. On a immédiatement :

4.1.1. Si $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b})$, $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

4.1.2. $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$.

4.1.3. $\mathfrak{a}^{-1}$ est un A-module de type fini.

4.1.4. Si $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{b}^{-1}$.

4.1.5. $\mathfrak{a}^{-1} \mathfrak{b}^{-1} \subset (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}$.

4.1.6. $\bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{a}^{-n} = A(\mathfrak{a})$ est un anneau contenant A .

4.1.7. Si $a \in \mathfrak{a}$ $(a \neq 0)$, $\mathfrak{a}^{-1} = \{b/a \, , \; b \in A \, , \; b\mathfrak{a} \subset Aa\}$.

4.1.8. Si $f^n \in \mathfrak{a}$, $A(\mathfrak{a}) \subset A_f$.

(C'est un corollaire de 4.1.7.) On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 4.2. - $A(\mathfrak{a})$ est l'anneau $\Gamma(D(\mathfrak{a}))$ des sections sur $D(\mathfrak{a})$.

On sait que $\Gamma(D(\mathfrak{a})) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} A_f$. Donc $A(\mathfrak{a}) \subset \Gamma(D(\mathfrak{a}))$ par 4.1.8.

Réciproquement, si $x \in \Gamma(D(\mathfrak{a}))$, on a $x \in A_f$ pour tout $f \in \mathfrak{a}$, i. e. il existe n tel que $f^n x \in A$. Comme $\mathfrak{a}$ est de type fini, il existe donc un entier n tel que $\mathfrak{a}^n x \in A$, i. e. $x \in \mathfrak{a}^{-n}$.

PROPOSITION 4.3.

(i) <u>Si</u> $D(\mathfrak{a})$ <u>est affine,</u> $A(\mathfrak{a})$ <u>est plat sur</u> A ;

(ii) <u>Les assertions suivantes sont équivalentes si</u> $A(\mathfrak{a})$ <u>est plat sur</u> A :

(a) $D(\mathfrak{a})$ <u>est affine</u> ;

(b) <u>Il existe un idéal divisoriel</u> $\mathfrak{b}$ <u>tel que</u> $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b})$;

(c) $D(\mathfrak{a}) = D((A : (A : \mathfrak{a})))$;

(d) <u>La racine de</u> $\mathfrak{a}$ <u>est divisorielle</u>.

L'assertion (i) est triviale, ainsi que les implications (c) $\Longrightarrow$ (b) et (d) $\Longrightarrow$ (b).

Si (a) $\Longleftrightarrow$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c) , on a (a) $\Longrightarrow$ (d) :

Si $D(\mathfrak{a})$ est affine, il en est de même de $D(\mathrm{rac}(\mathfrak{a}))$. Donc, si $\mathfrak{b} = \mathrm{rac}(\mathfrak{a})$, $D(\mathfrak{b}) = D((A : (A : \mathfrak{b})))$. Comme $(A : (A : \mathfrak{b})) \supset \mathfrak{b}$, on en déduit donc

$$(A : (A : \mathfrak{b})) = \mathfrak{b} .$$

Il reste donc à montrer (a) $\Longrightarrow$ (c) et (b) $\Longrightarrow$ (a).

Cela va résulter de la proposition suivante :

PROPOSITION 4.4. - <u>Si</u> $A(\mathfrak{a})$ <u>est plat,</u> $\mathrm{Spec}\, A(\mathfrak{a}) = D((A : (A : \mathfrak{a})))$.

Posons $\mathfrak{b} = (A : (A : \mathfrak{a}))$, et soient $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spec}\, A(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$. Comme $A_{\mathfrak{m}} = (A(\mathfrak{a}))_{\mathfrak{n}}$ (car $A \to A(\mathfrak{a})$ est un épimorphisme plat), $A_{\mathfrak{m}} \supset A(\mathfrak{a})$, et, pour tout $x \in \mathfrak{a}^{-1}$, il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tel que $sx \in A$. Comme $\mathfrak{a}^{-1}$ est de type fini, il existe $t \in A - \mathfrak{m}$ tel que $t\mathfrak{a}^{-1} \subset A$, i. e. $t \in \mathfrak{b}$. Donc $\mathfrak{m} \not\supset \mathfrak{b}$ et $\mathrm{Spec}\, A(\mathfrak{a}) \subset D(\mathfrak{b})$.

Réciproquement, si $\mathfrak{m} \in D(\mathfrak{b})$, soit $a \in \mathfrak{b} - \mathfrak{m}$. D'après 4.1.7 et 4.1.4, on a $A(\mathfrak{a}) \subset A(\mathfrak{b}) \subset A[\frac{1}{a}]$. Comme $a \notin \mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}} \supset A[\frac{1}{a}] \supset A(\mathfrak{a})$. On voit donc que $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cap A(\mathfrak{a})$ est un idéal premier de $A(\mathfrak{a})$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, et $\mathrm{Spec}\, A(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b})$.

Terminons la démonstration de 4.3 :

(a) $\Longrightarrow$ (c) : Si $D(\mathfrak{a})$ est affine, $\mathrm{Spec}\, A(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{a})$, donc

$$D(\mathfrak{a}) = D((A : (A : \mathfrak{a}))) .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Si $\mathfrak{b}$ est divisoriel, $D(\mathfrak{b}) = \mathrm{Spec}\, A(\mathfrak{b})$ par 4.4. Donc $D(\mathfrak{b})$ est affine par 2.5 puisque $A(\mathfrak{b}) = A(\mathfrak{a})$ est plat.

COROLLAIRE 4.5. - Si $A(\mathfrak{a})$ est plat et $\mathfrak{a}$ divisoriel, la racine de $\mathfrak{a}$ est divisorielle.

COROLLAIRE 4.6. - Les $D(f)$ sont affines (!).

COROLLAIRE 4.7. - Si $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible, $D(\mathfrak{a})$ est affine.

COROLLAIRE 4.8. - Tout ouvert d'un anneau de Dedekind est affine.

COROLLAIRE 4.9. - Si un anneau intégralement clos a un groupe de classes de torsion, tout ouvert affine est un $D(f)$ (cf. 3.11).

Car si $\mathfrak{a}$ est divisoriel, il existe n tel que $\mathfrak{a}^n$ soit principal.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKIBA (Tomoharu). - Remarks on generalized rings of quotients, Proc. Japan Acad., t. 40, 1964, p. 801-806.

[2] AKIBA (Tomoharu). - Remarks on generalized rings of quotients, II., J. Math. Kyoto Univ., t. 5, 1965, p. 39-44.

[3] BOURBAKI (Nicolas). - Algèbre commutative, Chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. - Paris, Hermann, 1961-1965 (Act. scient. et ind., 1200, 1293, 1308 et 1314 ; Bourbaki, 27, 28, 30 et 31).

[4] GROTHENDIECK (Alexander). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960-1967 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32).

[5] RICHMAN (Fred). - Generalized quotients rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 16, 1965, p. 794-799.