REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 127 (2012)

# Opérateurs invariants sur un immeuble affine de type $\widetilde{B}_n$ $(n \geq 3)$

FERDAOUS KELLIL (*) - GUY ROUSSEAU (**)

RÉSUMÉ - On considère un immeuble $\Delta$ de type $\widetilde{B}_n(n \geq 3)$, différents sous-ensembles $\mathcal{S}'$ de l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets de $\Delta$ et un groupe $G$ d'automorphismes de $\Delta$, fortement transitif sur $\Delta$ en respectant les types. On montre que l'algèbre des opérateurs $G$-invariants agissant sur l'espace des fonctions sur $\mathcal{S}'$ n'est pas commutative (contrairement aux résultats classiques) et on donne ses générateurs. On explicite également la structure de certaines sous-algèbres commutatives.

ABSTRACT - We consider a building $\Delta$ of type $\widetilde{B}_n(n \geq 3)$, different subsets $\mathcal{S}'$ of the set $\mathcal{S}$ of vertices in $\Delta$ and an automorphism group $G$ strongly transitive and type preserving on $\Delta$. We prove that the algebra of $G$-invariant operators acting on the space of functions on $\mathcal{S}'$ is not commutative (contrarily to the classical results) and we give its generators. We give also the precise structure of some commutative subalgebras

## Introduction

Soit $\Delta$ un immeuble épais localement fini et $\mathcal{S}'$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}$ de ses sommets. On suppose qu'il existe un groupe $G$ d'automorphismes de $\Delta$ qui respecte les types et agit "fortement transitivement" sur $\Delta$. Un opérateur $K$ est une fonction "localement finie" sur $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$. Ces opérateurs forment une algèbre qui agit sur l'espace des fonctions sur $\mathcal{S}'$. On s'intéresse à l'algèbre $\mathcal{O}'$ des opérateurs $G$-invariants

(*) Indirizzo dell'A.: Département de Mathématiques, Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir (ISIMM), Université de Monastir, 5000 Monastir Tunisie.
E-mail: kelliferdaous@yahoo.fr
(**) Indirizzo dell'A.: Institut Élie Cartan, UMR 7502, Nancy-Université, CNRS, BP 70239, 54506 Vandœuvre lès Nancy Cedex, France.
E-mail: Guy.Rousseau@iecn.u-nancy.fr

*i.e.* vérifiant : $K(gu, gv) = K(u, v), \ \forall g \in G, \ \forall u, v \in \mathcal{S}'$ (*cf.* préliminaires). Ce point de vue a été adopté dans plusieurs articles antérieurs [C 01], [CM 94], [CW 04], [GL 99], [MZ 00] et [MZ 02].

Ce travail est une suite logique de notre étude précédente [K-R 07] qui traite le cas d'un immeuble de type $\widetilde{A}_2$ ou $\widetilde{B}_2$. On s'intéresse à des cas non classiques, c'est à dire non couverts par les résultats d'Ichiro Satake [S 63] qui affirment que $\mathcal{O}'$ est souvent commutative.

Plus précisément on se place dans le cas d'un immeuble $\Delta$, épais localement fini, de type $\widetilde{B}_n (n \geq 3)$. D'après les travaux de Jacques Tits (cf. [T 78], [R 89; corollary 10.25] ou [W 09; chap. 27]) un tel immeuble est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe $G$ quasi-simple simplement connexe sur un corps local non archimédien $\mathbb{K}$. Ce groupe $G$ agit fortement transitivement sur $\Delta$ en respectant les types. Si on remplace $G$ par son groupe adjoint $G^*$, alors celui-ci permute les deux types spéciaux (0 et 1) de sommets [T 78; 2.5 p. 47]. On n'utilisera ci-dessous que les propriétés de transitivité de $G$ et $G^*$.

Après une première partie consacrée aux résultats généraux, on s'intéresse, dans la seconde partie, aux sommets spéciaux (donc de type 0 ou 1). Sans surprise l'algèbre $\mathcal{O}_0$ (resp. $\mathcal{O}_1$) des opérateurs sur l'ensemble $\mathcal{S}_0$ (resp. $\mathcal{S}_1$) des sommets de type 0 (resp. 1) invariants par $G$ est commutative. Soit $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}^*$) l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants par le groupe $G$ (resp. $G^*$). On montre que $\mathcal{O}$ n'est pas commutative et, grâce à une filtration sur cette algèbre, on en détermine des générateurs (théorème 2.6). On explicite complètement la structure des algèbres commutatives $\mathcal{O}_0$, $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}^*$ (théorèmes 2.7 et 2.9), en particulier $\mathcal{O}^*$ est une algèbre de polynômes. On en déduit aussi la structure explicite de l'algèbre $\mathcal{O}$ (remarque 2.8).

Dans la partie 3, on étudie l'algèbre $\mathcal{O}^n$ (resp. $\mathcal{O}^{n*}$) des opérateurs sur l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des sommets de type $n$ de $\Delta$ invariants par $G$ (resp. $G^*$). C'est techniquement plus difficile. On trouve cependant des générateurs de l'algèbre non commutative $\mathcal{O}^n$ (théorème 3.8) et on prouve que l'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ est une algèbre de polynômes (théorème 3.10).

Enfin dans une dernière partie, on compare ces résultats avec ceux que l'on peut déduire des travaux classiques d'Ichiro Satake [S 63].

## 1. Préliminaires :

### 1.1 – *Complexes de chambres*

Un *complexe simplicial* d'ensemble de sommets $\mathcal{S}$ est un ensemble $X$ de parties finies de $\mathcal{S}$ qu'on appelle *simplexes* (*facettes*) tel que :

1. Chaque singleton $\{x\}$ pour $x$ dans $S$ est un simplexe.
2. Chaque partie $F'$ d'un simplexe $F$ est un simplexe, une telle partie est appelée *face* du simplexe initial. La *codimension* de $F'$ (dans $F$) est alors le cardinal de $F \backslash F'$.

Un *morphisme simplicial* d'un complexe $X$ dans $Y$ est une application $f$ de l'ensemble des sommets de $X$ dans l'ensemble des sommets de $Y$ qui envoie simplexe sur simplexe. Si de plus $f$ est bijective et $f^{-1}$ est un morphisme simplicial on parle d'*isomorphisme* simplicial. Dans le cas où l'ensemble des sommets de $X$ est une partie de l'ensemble des sommets de $Y$ et tout simplexe de $X$ est un simplexe de $Y$, on dit que $X$ est un *sous-complexe* de $Y$. Alors $X$ est un complexe simplicial à part entière.

Un complexe simplicial est un *complexe de chambres* si tout simplexe est contenu dans un simplexe maximal (chambre) et si pour toute paire $\{c, c'\}$ de chambres il existe une suite appelée *galerie* $c = c_1, c_2, \ldots, c_m = c'$ de chambres consécutivement adjacentes (*i.e.* telles que $\forall i, 1 \leq i \leq m-1, c_i$ et $c_{i+1}$ ont un simplexe de codimension 1 (*cloison*) en commun). Alors toutes les chambres ont le même nombre $n+1$ de sommets, le nombre $n$ est appelé le *rang* du complexe.

## 1.2 – *Complexes de Coxeter*

On appelle *groupe de réflexions affine essentiel* un groupe $W^a$ agissant de manière affine sur un espace vectoriel euclidien $V$ de dimension $n$ tel qu'il existe un ensemble $\mathcal{H}$ d'hyperplans affines (appelés murs) vérifiant :

1. $W^a$ stabilise l'ensemble de ces hyperplans ;
2. $W^a$ est engendré par les réflexions orthogonales $r_H$ pour $H \in \mathcal{H}$ ;
3. il existe un ensemble fini $\Phi$ d'éléments non nuls du dual $V^*$ engendrant $V^*$ tel que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des hyperplans $H_{\alpha,k}$ d'équation $\alpha(v) + k = 0$ pour $\alpha \in \Phi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

On peut en fait montrer que $\Phi$ est alors un système de racines et $W^a$ son groupe de Weyl affine, *cf*. [B 68].

À chaque point $x$ on associe sa facette qui est l'intersection des demi-appartements $D_{\alpha,k}$ (d'équation $\alpha(v) + k \geq 0$ pour $\alpha \in \Phi$ et $k \in \mathbb{Z}$) qui le contiennent. Une facette minimale est réduite à un sommet; c'est l'intersection de $n$ murs $H_{\alpha,k}$ associés à des $\alpha$ indépendants. Les facettes maximales appelées chambres, sont les adhérences des composantes connexes de $V$ privé de la réunion de tous les murs.

Une facette est l'enveloppe convexe des sommets qu'elle contient.

L'*enclos* d'une partie $\Omega$ de $V$ est l'intersection des demi-appartements contenant $\Omega$, c'est une partie convexe de $V$. La partie $\Omega$ est dite *close* si elle est égale à son enclos.

On considère uniquement le cas où l'action de $W$ sur $V$ est irréductible. Alors toute facette est un simplexe : les sommets qu'elle contient sont affinement indépendants. On associe à ce groupe de réflexions un complexe simplicial appelé *complexe de Coxeter affine* de type $W^a$ dont les sommets sont les sommets de $V$ et les simplexes les ensembles de sommets d'une facette de $V$. Ce complexe est un complexe de chambres de rang $n$. Le groupe $W^a$ induit un groupe d'automorphismes simpliciaux que l'on appelle le groupe de Weyl de ce complexe. Un sommet $a \in V$ est dit *spécial* pour $W^a$ si pour tout hyperplan $H \in \mathcal{H}$, il existe un hyperplan $H' \in \mathcal{H}$ parallèle à $H$ et tel que $a \in H'$.

## 1.3 – *Immeubles*

Un *immeuble* de type $W^a$ est un complexe simplicial $\Delta$ qui peut être recouvert par une famille de sous-complexes appelés *appartements* et vérifiant :

1. chaque appartement est un complexe de Coxeter de type $W^a$ ;
2. deux simplexes quelconques de $\Delta$ sont toujours contenus dans un même appartement ;
3. Si $A$ et $A'$ sont deux appartements contenant une chambre $c$, il existe un isomorphisme de $A$ dans $A'$ fixant tous les simplexes de $A$ et $A'$ en commun.

Un immeuble est un complexe de chambres. Il existe une application $\tau$ de $\Delta$ dans $\{0, 1, \cdots, n\}$ qui à chaque sommet associe son *type* et dont la restriction à chaque simplexe est injective. Une cloison $F$ est dite de type $i$ si $\tau(F) = \{0, 1, \cdots, n\} \backslash \{i\}$ ; la *valence* $v(F)$ de cette cloison est le nombre de chambres la contenant, elle ne dépend en général que du type $\tau(F)$. On dit que l'immeuble est *épais* si $v(F) \geq 3$ pour toute cloison $F$. Dans la suite on note $q_i + 1$ la valence d'une cloison de type $i$ ; c'est un nombre fini si l'immeuble est localement fini.

Un *automorphisme* de l'immeuble $\Delta$ est un automorphisme simplicial qui envoie appartement sur appartement. On dit qu'un automorphisme $\varphi$ de $\Delta$ *respecte les types* si et seulement si pour toute facette $F$ contenue dans un appartement $A$ et pour tout $w \in W(A)$ tel que $\varphi(F) \subset A$ et $w\varphi(F) = F$, alors $w\varphi$ stabilise toute face de $F$.

Un groupe $G$ d'automorphismes de l'immeuble $\Delta$ agit *fortement transitivement* sur $\Delta$ s'il est transitif sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des appartements de $\Delta$ et si pour tout $A \in \mathcal{A}$ les trois conditions ci-dessous pour une paire $(C, C')$ de chambre de $A$ sont équivalentes :

1. $C$ et $C'$ sont conjuguées par le groupe de Weyl $W(A)$ de $A$.
2. $C$ et $C'$ sont conjuguées par le stabilisateur $N_G(A)$ de $A$ dans $G$.
3. $C$ et $C'$ sont conjuguées par $G$ (comme chambres de $\Delta$).

Le groupe $G$ agit *très fortement transitivement* sur $\Delta$ si le sous-groupe $G_0$ de $G$ formé des éléments conservant les types agit transitivement sur les paires $(A, C)$ où $C$ est une chambre de l'appartement $A$.

Soit $\mathcal{S}'$ un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets d'un immeuble. Un *opérateur* $K$ sur $\mathcal{S}'$ est une fonction sur $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}'$. L'opérateur est dit *localement fini* si pour tout $u \in \mathcal{S}'$, $\{v \in \mathcal{S}' / K(u,v) \neq 0\}$ est fini. Le produit de deux tels opérateurs $K$, $K'$ est alors donné par $K * K'(s,t) = \sum\limits_u K(s,u)K'(u,t)$. Ces opérateurs localement finis forment une algèbre qui agit sur l'espace des fonctions sur $\mathcal{S}'$ par $(K * f)(s) = \sum\limits_u K(s,u) f(u)$. L'opérateur est dit *G-invariant* par un groupe $G$ d'automorphismes si $K(gu, gv) = K(u,v)$, $\forall g \in G$, $\forall u, v \in \mathcal{S}'$. Si on suppose $G$ transitif sur $\mathcal{S}'$ alors un tel opérateur s'identifie à une fonction à support fini sur $G/K_s$ où $K_s$ est le fixateur dans $G$ d'un sommet $s$ de $\mathcal{S}'$.

On considérera dans la suite des immeubles "géométriques" de type $W^a$ dans lesquels un simplexe est remplacé par son "enveloppe convexe". Alors l'appartement "géométrique" associé à un appartement est isomorphe à l'espace $V$ sur lequel $W$ agit (comme en 1.2). L'intersection de deux appartements est une partie close de chacun d'eux. L'immeuble $\mathcal{I}$ est muni d'une métrique qui induit la métrique euclidienne sur chaque appartement et les isomorphismes entre appartements sont des isométries. De même tout automorphisme de $\mathcal{I}$ agit par isométrie.

## 1.4 – *Immeubles de type* $\widetilde{B}_n$

Plus précisément dans ce papier on va regarder le cas particulier d'un immeuble localement fini épais de type $\widetilde{B}_n (n \geq 3)$ :

Nous prendrons pour $V$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ et du produit scalaire usuel $\langle .,. \rangle$. Soit $R = \{\pm e_i (1 \leq i \leq n),\ \pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq n)\}$ un système de racines réduit et irréductible dans $V$ et $B = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de $R$ où, pour

$1 \leq i \leq n-1$, $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ et pour $i = n$, $\alpha_n = e_n$. Comme $R$ est irréductible, il existe une plus grande racine $\widetilde{\alpha} = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \cdots + 2\alpha_n = e_1 + e_2$. On a $\langle \widetilde{\alpha}, \alpha_i \rangle = 0$ pour $i \neq 2$ et $\langle \widetilde{\alpha}, \alpha_2 \rangle = 1$.

La formule $\alpha^\vee = \dfrac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ donne pour le système $R^\vee$ des coracines l'ensemble des vecteurs $\pm 2e_i (1 \leq i \leq n)$, $\pm e_i \pm e_j (1 \leq i < j \leq n)$. Comme $R$ est réduit, il s'en suit que $B^\vee = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 2\alpha_n\}$ est une base de $R^\vee$. La base duale $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $B$ est définie par $< \lambda_i, \alpha_j >= \delta_{ij}$ pour tout $j (1 \leq j \leq n)$, ses éléments s'appellent les *copoids fondamentaux* relativement à $B$ et valent $\lambda_i = e_1 + e_2 + \cdots e_i$. Le $\mathbb{Z}-$module de $R$ est $P = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\lambda_i$ de base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Finalement, soit $Q$, le sous-$\mathbb{Z}-$module de $P$ défini par $Q = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha^\vee = \Big\{ x \in P,\ x = (a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ pair} \Big\}$.

Le groupe de Weyl $W = W(R)$ est engendré par les réflexions $r_\alpha$, $\alpha \in R$. Or dans $\mathbb{R}^n$, la réflexion orthogonale $r_{e_i - e_j} (i \neq j)$ échange $e_i$ et $e_j$ et laisse invariants les $e_k$ d'indice $k$ distinct de $i$ et $j$. Ces réflexions engendrent un groupe isomorphe au groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. La réflexion orthogonale $r_{e_i}$ transforme $e_i$ en $-e_i$ et laisse invariants les $e_k$ d'indice $k$ distinct de $i$. Ces dernières réflexions engendrent un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, distingué dans le groupe de Weyl $W$. Ainsi $W$ est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathcal{S}_n$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, il est d'ordre $2^n.n!$.

Le groupe de Weyl affine $W^a = W^a(R)$ engendré par les réflexions affines $r_{\alpha,k}$ ( par rapport au mur $H_{\alpha,k}$) pour $\alpha \in R$ et $k \in \mathbb{Z}$ est le produit semi-direct de $W$ par $Q$. Le groupe de Weyl affine étendu est $W^{et} = W \ltimes P$.

Soit $\mathcal{C}$ la chambre fermée de Weyl définie par la base de racines $B$, on a :

$$\mathcal{C} = \{x = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0\}.$$

Les sommets spéciaux dans $\mathcal{C}$ sont les $x = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i$ pair, ou $\sum_{i=1}^{n} a_i$ impair qui correspondent respectivement aux sommets de types 0 ou 1 dans $\mathcal{C}$. Les sommets non spéciaux de type $h$ avec $2 \leq h \leq n$ dans $\mathcal{C}$ ont des coordonnées demi-entières avec un nombre égal à $h (h \geq 2)$ de non-entiers.

Dans la suite on sera amené à choisir un sommet $x = (b_1, \cdots, b_n)$ de type 0, 1 ou $n$ dans $V = A$ et on notera $(j_1, \cdots, j_n)$ les coordonnées de $V$ d'origine $x$ ($j_i = a_i - b_i$).

L'immeuble $\varDelta$ considéré est donc réunion d'appartements isomorphes à $V$. Pour un tel immeuble on sait que les valences vérifient $q_0 = q_1 = \cdots = q_{n-1}$, éventuellement différent de $q_n$. Si $\varDelta$ est l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe quasi-simple simplement connexe $G$ sur un corps local non archimédien $\mathbb{K}$, on sait que $q_0$ et $q_n$ valent $q$, $q^2$ ou $q^3$ où $q$ est le cardinal du corps résiduel de $\mathbb{K}$, voir les tables de [T 78] ou [W 09; chap. 28].

## 2. L'algèbre $\mathcal{O}$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ :

Soit $A$ un appartement, $x$ un sommet de $\mathcal{S}_i \cap A$, $i \in \{0,1\}$ ( c'est à dire $x$ spécial ) et $C$ une chambre de $A$ contenant $x$, il existe un unique système orthonormé de coordonnées sur l'appartement $A$ tel que $x = x_{0,\cdots,0}$, $\mathcal{S} \cap C = \{x_{0,\cdots,0}, x_{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\cdots,0}, x_{\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}}, x_{1,0,\cdots,0}\}$ avec $\tau(x_{\underbrace{\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}}_{k},0,\cdots,0}) = k \geq 2$, $\tau(x_{0,\cdots,0}) = i$, $\tau(x_{1,0,\cdots,0}) = 1 - i$. Alors $\{x_{j_1,\cdots,j_n} \mid j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0\}$ est le quartier $Q_{x,C}$ de $A$ de sommet $x$ contenant $C$. L'ensemble $\mathcal{S}_i \cap A$ (*resp.* $\mathcal{S}_{1-i} \cap A$, $\mathcal{S}_k \cap A (k \geq 2)$) est formé des $x_{j_1,\cdots,j_n}$ avec $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ est pair (*resp.* $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ impair, $j_1, \cdots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ et $\sharp\{j_p \mid j_p \notin \mathbb{Z}\} = k$).

On note $V_{j_1,\cdots,j_n}(x)$ l'ensemble des points $x_{j_1,\cdots,j_n}$ associés aux différents choix de $A$ et $C$ tels que $x \in C \subset A$; cet ensemble est fini car l'immeuble est supposé localement fini.

L'ensemble $\mathcal{S}_i$ (*resp.* $\mathcal{S}_{1-i}, \mathcal{S}_k (k \geq 2)$) est réunion disjointe des $V_{j_1,\cdots,j_n}(x)$ avec $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0, j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ est pair (*resp.* $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=1}^{n} j_p$ impair, $j_1, \cdots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ et $\sharp\{j_p \mid j_p \notin \mathbb{N}\} = k$). Ces ensembles sont les orbites de $G_x$ (fixateur de $x$ dans $G$) dans $\mathcal{S}_i$ (*resp.* $\mathcal{S}_{1-i}$, $\mathcal{S}_k$). Pour tout sommet spécial $s$ et tout $s_k$ dans $\mathcal{S}_k \cap A (k \geq 2)$, $\{s, s_k\}$ est une arête si et seulement si $s_k = s + (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = 0$ ou $\pm\frac{1}{2}$ (avec $\sharp\{\varepsilon_p \mid \varepsilon_p \neq 0\} = k$ ) *i.e.* $\|s_k - s\|_\infty = \frac{1}{2}$.

On définit des opérateurs $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ sur $(\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \times \mathcal{S}$ pour $i \in \{0,1\}$, $j_1, \cdots, j_n \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$ (et nombre de non-entiers $\neq 1$) par :

$$K^i_{j_1,\cdots,j_n}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau(u) = i \text{ et } v \in V_{j_1,\cdots,j_n}(u) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N}, j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$, les opérateurs $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ opèrent sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

On note $\mathcal{O}$ l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants par le groupe $G$ fortement transitif et respectant les types. Ainsi l'algèbre $\mathcal{O}$ admet pour base les $K^0_{j_1,\cdots,j_n}$ et $K^1_{j_1,\cdots,j_n}$ ($j_1,\cdots,j_n \in \mathbb{N},\ j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$). Comme le support de $K^0_{j_1,\cdots,j_n} K^1_{j'_1,\cdots,j'_n}$ est différent du support de $K^1_{j'_1,\cdots,j'_n} K^0_{j_1,\cdots,j_n}$, l'algèbre $\mathcal{O}$ est non commutative.

On veut maintenant déterminer les générateurs de $\mathcal{O}$. Pour cela on définit d'abord ci-dessous une relation d'ordre compatible avec l'addition dans $\mathbb{R}^n$.

On note :

$$\mathcal{C}^{\perp} = \mathbb{R}_+(e_1 - e_2) \oplus \mathbb{R}_+(e_2 - e_3) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_+ e_n.$$

On a $\mathcal{C}^{\perp} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in \mathcal{C}\}$ et $\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \geq 0,\ \forall\, x \in \mathcal{C}^{\perp}\}$. On pose par définition :

$$x \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} y \Longleftrightarrow y - x \in \mathcal{C}^{\perp}.$$

En particulier pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\begin{gathered} x \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} y \Longrightarrow (y_1 > x_1) \text{ ou } (y_1 = x_1 \text{ et } y_2 > x_2) \text{ ou}, \ldots, \\ \text{ou } (y_1 = x_1, \cdots y_{n-1} = x_{n-1}, y_n \geq x_n); \end{gathered}$$

donc $\leq_{\mathcal{C}^{\perp}}$ implique l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^n$.

D'après un résultat classique (*cf*. [B 68], VI § 1 proposition 18) on a :

$$y \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \forall\, w \in W,\ wy \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} y.$$

Proposition 2.1. *Si on pose, pour* $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta(x) = Wx \cap \mathcal{C}$ *on a* :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n;\ \delta(x+y) \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} \delta(x) + \delta(y).$$

Démonstration. En effet soit $w \in W$ tel que $w(x+y) \in \mathcal{C}$ et soient $w', w'' \in W$ tels que $w'x \in \mathcal{C}$ et $w''y \in \mathcal{C}$. Alors pour tout $w_0 \in W$ on a $w_0(w'x) \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} w'x$. En particulier pour $w_0 = ww'^{-1}$ on obtient $wx \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} w'x$. De même $w_0 = ww''^{-1}$ donne $wy \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} w''y$. Il s'en suit que $wx + wy = w(x+y) \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} w'x + w''y$. Ainsi on a le résultat. □

Conséquence. Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ posons $\delta(x,y) = \delta(y-x)$. On définit ainsi une application $\delta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{C}$ qui est invariante par le groupe de Weyl affine $W^a$ (ou le groupe de Weyl affine étendu $W^{et} = W \ltimes P$). La proposition 2.1 montre l'inégalité triangulaire :

$$\delta(x,z) \leq_{\mathcal{C}^{\perp}} \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

Comme $\delta$ est invariante par $W^a$ elle peut être définie de manière intrinsèque, sur tout appartement de l'immeuble et même sur l'immeuble car deux appartements contenant $x$ et $y$ sont isomorphes par un isomorphisme fixant $x$ et $y$.

Pour $x \in (\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1) \cap A$ et $(j_1, \cdots, j_n) \in \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ on a $s \in V_{j_1,\cdots,j_n}(x)$ si et seulement si $\delta(x, s) = (j_1, \cdots, j_n)$.

On a $\delta(x, y) = \delta(y, x), \forall x, y \in \mathcal{I}$, car $-Id$ est dans $W$.

PROPOSITION 2.2. *L'inégalité triangulaire est vérifiée dans l'immeuble :*

$$\forall x, y, z \in \mathcal{I} \ ; \ \ \delta(x, z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

DÉMONSTRATION. Il existe un nombre fini de points $y_0 = y, y_1, \cdots, y_n = z$ du segment $[y, z]$ tel que, pour tout $i = 1, \cdots, n,\ x, y_{i-1}, y_i$ soient dans un même appartement. Dans cet appartement on a $\delta(x, y_i) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y_{i-1}) + \delta(y_{i-1}, y_i)$ d'après la proposition 2.1. Donc $\delta(x, z) \leq_{\mathcal{C}^\perp} \delta(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \delta(y_{i-1}, y_i)$. Mais les points $y_0 = y, y_1, \cdots, y_n = z$ sont alignés dans un même appartement, donc $\sum_{i=1}^{n} \delta(y_{i-1}, y_i) = \delta(y, z)$. □

REMARQUE. On sait que ce résultat se généralise à tout immeuble affine.

DEFINITION 2.3. *Le terme dominant d'un élément non nul* $\kappa = \sum a^i_{j_1,\cdots,j_n} K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ *de* $\mathcal{O}$ *est l'élément* $dom(\kappa)$ *de* $\mathcal{O}$ *obtenu en remplacant chaque* $a^i_{j_1,\cdots,j_n}$ *par* 0 *dès qu'il existe* $(j'_1, \cdots, j'_n)$ *strictement supérieur à* $(j_1, \cdots, j_n)$ *tel que* $a^i_{j'_1,\cdots,j'_n} \neq 0$.

PROPOSITION 2.4. *Pour* $i = 0$ *ou* 1, $j_1, \cdots, j_n \in \mathbb{N},\ j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$, *on a :*

$$dom(K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n} K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}) = K^i_{j_1+i_1,j_2+i_2,\cdots,j_n+i_n} \ ;$$

*où* $\overline{i + \sum_p j_p}$ *est la classe de* $i + \sum_p j_p$ *modulo* 2.

DÉMONSTRATION. Par définition la valeur $(K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n} K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n})(s, t)$ en $(s, t) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ de ce produit est $\sum_u K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(s, u) K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(u, t)$. Ceci est non nul si et seulement si $s \in \mathcal{S}_i$, $t \in \mathcal{S}_{\overline{i+\sum_p (j_p+i_p)}}$ et il existe $u \in \mathcal{S}_{\overline{i+\sum_p j_p}}$ tel que $u \in V_{j_1,\cdots,j_n}(s)$ et $t \in V_{i_1,\cdots,i_n}(u)$. Par un bon choix de la chambre fondamentale d'origine $s$ les coordonnées normalisées de $u$ sont $(j_1,\cdots,j_n)$, les coordonnées de $t$ normalisées par rapport à $u$ sont $(i_1,\cdots,i_n)$. Cela signifie que $\delta(s,u)=(j_1,\cdots,j_n)$ et $\delta(u,t)=(i_1,\cdots,i_n)$. D'après la proposition 2.2 $\delta(s,t) \leq_{\mathcal{C}^\perp} (i_1+j_1,\cdots,i_n+j_n)$. Autrement dit après renormalisation les coordonnées de $t$ sont de la forme $(j'_1,\cdots,j'_n)$ avec $(j'_1,\cdots,j'_n) \leq_{\mathcal{C}^\perp} (j_1+i_1,\cdots,j_n+i_n)$. De plus pour $s=(0,\cdots,0)$ et $t=(j_1+i_1,\cdots,j_n+i_n)$, il existe un unique $u \in \mathcal{I}$ tel que $\delta(s,u)=(j_1,\cdots,j_n)$ et $\delta(u,t)=(i_1,\cdots,i_n)$, puisque ce $u$ est forcément dans l'enclos de $s$ et $t$. Donc $dom(K^i_{j_1,j_2,\cdots,j_n} K^{\overline{i+\sum_p j_p}}_{i_1,i_2,\cdots,i_n}) = K^i_{j_1+i_1,j_2+i_2,\cdots,j_n+i_n}$. □

DEFINITION 2.5. *Le degré de l'opérateur $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ est $j_1+\cdots+j_n \in \mathbb{N}$.*

THÉOREMÈ 2.6. *Pour $i \in \{0,1\}$, $k \geq 1$, on note : $L^i_k = K^i_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0}$.*

1. *$dom(K^i_{j_1,\cdots,j_n} L_k^{\overline{i+\sum_p j_p}}) = K^i_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},j_n}$.*
2. *Les opérateurs $L^i_k$ pour $i \in \{0,1\}$ et $0 \leq k \leq n$ engendrent l'algèbre $\mathcal{O}$.*

DÉMONSTRATION. 1. S'obtient en appliquant la proposition 2.4.

2. S'obtient facilement par un raisonnement par récurrence sur le degré de $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$. □

NOTATIONS. On note

$$L^*_j = L^0_j + L^1_j,\ K^*_{j_1,\cdots,j_n} = K^0_{j_1,\cdots,j_n} + K^1_{j_1,\cdots,j_n}.$$

Un opérateur $K$ de $\mathcal{O}$ est dit *symétrique* si $K(s,t)=K(t,s)$, $\forall s,t \in \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$. L'opérateur $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ pour $j_1,\cdots,j_n \in \mathbb{Z}$ est symétrique si et seulement si son degré est pair : c'est clairement une condition nécessaire car sinon son support est $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_{1-i}$ et on a $K^i_{j_1,\cdots,j_n}(t,s) = K^{1-i}_{j_1,\cdots,j_n}(s,t)$ et c'est suffisant car on a vu que $\delta(s,t)=\delta(t,s)$.

L'espace vectoriel $\mathcal{O}^\sigma$ des opérateurs invariants symétriques a pour base les $K^i_{j_1,\cdots,j_n}$ de degré pair et les $K^*_{j_1,\cdots,j_n}$ de degré impair.

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{O}^*$ de $\mathcal{O}^\sigma$ de base les $K^*_{j_1,\cdots,j_n}$ est formé des opérateurs "très symétriques" ou "P-invariants", c'est à dire invariants par le groupe affine étendu $W^{et} = W \ltimes P$. C'est l'algèbre des opérateurs sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ invariants sous le groupe $G^*$ très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$.

THÉOREMÈ 2.7. *L'algèbre $\mathcal{O}^*$ est commutative, c'est l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[L^*_1,\cdots,L^*_n]$.*

Remarque. La commutativité de $\mathcal{O}^*$ est un résultat de Parkinson [P 06].

Démonstration. L'algèbre $\mathcal{O}^*$ est formée d'opérateurs symétriques, elle est donc commutative. Pour $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{N}$, on voit facilement que le terme dominant de $(L_1^*)^{a_1} \cdots (L_n^*)^{a_n}$ est $K^*_{a_1+a_2+\cdots+a_n, a_2+\cdots+a_n, \cdots, a_n}$, les variables $L_1^*, \cdots, L_n^*$ sont donc algébriquement indépendantes et $\mathcal{O}^* = \mathbb{C}[L_1^*, \cdots, L_n^*]$. □

L'algèbre $\mathcal{O}$ est la somme directe des quatre sous-espaces vectoriels :

$$\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}^{0,0},\ \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}^{1,1},\ \mathcal{O}^{0,1} \text{ et } \mathcal{O}^{1,0},$$

où $\mathcal{O}^{i,j}$ est formé des opérateurs de support dans $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$. Pour $K \in \mathcal{O}$ et $i,j \in \{0,1\}$ on note ${}_i|K|_j$(*resp.* ${}_i|K$, $K|_j$) sa restriction à $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$(*resp.* $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \times \mathcal{S}_j$) prolongée par 0 en dehors. L'application $K \longmapsto {}_i|K|_j$ est la projection de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}^{i,j}$.

Malheureusement $\mathcal{O}^\sigma$ n'est pas une algèbre : $L_2^0 = K^0_{1,1,0,\cdots,0} \in \mathcal{O}^\sigma$ et $L_1^* = K^0_{1,0,\cdots,0} + K^1_{1,0,\cdots,0} \in \mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}^\sigma$, mais $L_2^0 L_1^*$ est non nul et son support est dans $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1$ il ne peut donc être symétrique.

Comme une base de $\mathcal{O}$ est formée des $K^i_{j_1,\cdots,j_n} = {}_i|K^*_{j_1,\cdots,j_n}$, on a $\mathcal{O} = {}_0|\mathcal{O}^* \oplus {}_1|\mathcal{O}^*$ avec la relation :

$$({}_i|K)({}_{i'}|K') = \begin{cases} {}_i|KK' & \text{si } i + i' + deg(K) \equiv 0[2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

si $K$ et $K'$ sont des monômes (ou plus généralement si tous les monômes de $K$ ont des degrés de même parité).

Remarque 2.8. *Cette relation de composition des ${}_i|K$ et la structure de l'algèbre $\mathcal{O}^*$ décrivent entièrement la structure de l'algèbre $\mathcal{O}$.*

Par restriction à $\mathcal{S}_i (i = 0$ ou $1)$, l'algèbre $\mathcal{O}_i$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_i$ invariants par $G$ est contenue dans ${}_i|\mathcal{O}^*$ et on a :

$$\mathcal{O}_i = \{{}_i|K / K \in \mathcal{O}^* \text{ et tous monômes de } K \text{ ont un degré pair.}\}$$

La relation ci-dessus sur la composition des ${}_i|K$ permet de montrer :

Théoremè 2.9. *L'algèbre $\mathcal{O}_i$ est commutative et isomorphe (par $K \mapsto {}_i|K$) à la sous-algèbre $\mathcal{O}^{**}$ de $\mathcal{O}^* = \mathbb{C}[L_1^*, \cdots, L_n^*]$ formée des éléments de degré pair.*

N.B. On rappelle que le degré de $L_j^*$ est $j$.

## 3. L'algèbre $\mathcal{O}^n$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ :

Soit $A$ un appartement, $u$ un sommet de $\mathcal{S}_n \cap A$ (c'est à dire $u$ est de type $n$), la chambre de Weyl $C_u$ de sommet $u$ est déterminée par :

$$C_u = \{(j_1, \cdots, j_n) \in \mathbb{R}^n \mid j_1 \geq j_2 \geq \cdots j_n \geq 0\},\ et\ C_u \cap \mathcal{S}_n = C_u \cap \mathbb{Z}^n$$

pour un système de coordonnées $(j_1, \cdots, j_n)$ d'origine $u$.

Il existe un système de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ d'origine un sommet spécial $u_s$ dans lequel $u$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$ alors $x_i = j_i + \frac{1}{2}$ et la chambre $C_u$ est $\left\{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \frac{1}{2}\right\}$. Le fixateur $W_u^a$ (dans le groupe de Weyl affine $W^a = W \ltimes Q$) de $u$ contient les permutations et les changements de signes des $j_i$ (avec un nombre pair de changements de signe). En effet $W$ contient toutes les permutations et tous les changements de signes des $x_i$ (*cf.* [B 68] ou encore § 1 préliminaires), mais $Q = \left\{(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ pair}\right\}$ et le changement de signe $j_i \longmapsto -j_i$ (autres $j_k$ fixés) correspond à la transformation $(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto r_i(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$.

Donc, à $G_u$ près, tout sommet $v \in \mathcal{S}$ est dans $C'_u = C_u \cup r_n(C_u) = \{(j_1, \cdots, j_n) \mid j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_{n-1} \geq |j_n|\}$. Pour choisir entre la coordonnée $j_n$ ou $-j_n$, on décide par convention que $\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$ est de type 1 et $\left(\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2}\right)$ est de type 0 (i.e. $\tau(u_s) = (-1)^n$).

On dit que $v \in V_{j_1, \cdots, j_n}(u)$ avec $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq |j_n|$ s'il existe $g \in G_u$ tel que $g(v) = u + (j_1, \cdots, j_n)$. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est réunion disjointe des $V_{j_1, \cdots, j_n}(u)$ (pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$) qui sont les orbites dans $\mathcal{S}_n$ du fixateur $G_u$ de $u$ dans $G$. De même $\mathcal{S}_k$ $(2 \leq k \leq n-1)$ (resp. $\mathcal{S}_0$ ou $\mathcal{S}_1$) est réunion disjointe des $V_{j_1, \cdots, j_n}(u)$ pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^n$ et le nombre de $j_i$ entiers égal à $k$ (resp. égal à 0 et $n + \sum_{i=1}^{n}\left(j_i + \frac{1}{2}\right)$ pair ou impair).

Pour $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^n$ les opérateurs $K^n_{j_1, \cdots, j_n}$ sont définis sur $\mathcal{S}$ par :

$$K^n_{j_1, \cdots, j_n}(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau(u) = n \text{ et } v \in V_{j_1, \cdots, j_n}(u) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note aussi $L^n_k = K^n_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0}$ (pour $0 \leq k \leq n$) et $L^n_{n-} = K^n_{1,\cdots,1,-1}$.

L'algèbre $\mathcal{O}^n$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ invariants par le groupe $G$ fortement transitif et respectant les types a pour base les $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$ pour $(j_1,\cdots,j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$.

Pour $(j_1,\cdots,j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ on a $v \in V_{j_1,\cdots,j_n}(u) \Longleftrightarrow v = u + (j_1,\cdots,j_n)$ (avec des coordonnées normalisées par rapport à $u$) $\Longleftrightarrow u = v + (-j_1,\cdots,-j_n)$ et par $W^a_u$ on a $u = v + (j_1,\cdots,j_{n-1},(-1)^n j_n)$, mais si on veut des coordonnées normalisées par rapport à $v$ cela donne $u = v + (j_1,\cdots,j_{n-1},(-1)^{n+\deg(j)} j_n)$. Ainsi on a $v \in V_{j_1,\cdots,j_n}(u) \Longleftrightarrow u \in V_{j_1,\cdots,j_{n-1},(-1)^{n+\deg(j)}j_n}(v)$, autrement dit $K^n_{j_1,\cdots,j_n}(u,v) = K^n_{j_1,\cdots,j_{n-1},(-1)^{n+\deg(j)}j_n}(v,u)$. En particulier si $n + \deg(j)$ est pair ou si $j_n = 0$ l'opérateur $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$ est symétrique.

On veut déterminer les générateurs de l'algèbre $\mathcal{O}^n$. En utilisant le préordre lexicographique sur $(j_1,\cdots,j_{n-1},|j_n|)$, on définit le terme dominant d'un élément de $\mathcal{O}^n$ (ou plus généralement d'une combinaison linéaire des $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$) comme en 2.3.

PROPOSITION 3.1. *Si $(j_1,\cdots,j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$, on a*

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} K^n_{1,\cdots,1,0}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n}.$$

DÉMONSTRATION. $K^n_{j_1,\cdots,j_n} K^n_{1,\cdots,1,0}(s,t) = \sum_u K^n_{j_1,\cdots,j_n}(s,u) K^n_{1,\cdots,1,0}(u,t)$.

Or $K^n_{1,\cdots,1,0}(u,t) \neq 0 \Longleftrightarrow u$ et $t \in \mathcal{S}_n$ et il existe une galerie $C_0, C_1$ tel que $u \in C_0$ et $t \in C_1$. Il existe alors un appartement $A$ contenant $s, C_0$ ( et par suite $u$) avec ou bien $A$ contient $s, C_0$ et $t$ ou bien la rétraction $\rho_{A,C}(t) = u$ ($C$ est la chambre de sommet $s$ dans la chambre de Weyl fondamentale). Les $t$ possibles sont alors $s + (j_1 + m_1,\cdots,j_n + m_n)$ avec :

$$(m_i = 0 \text{ ou } \pm 1 \text{ et } \sharp\{m_i \neq 0\} = n-1) \text{ ou } (m_i = 0\ \forall i).$$

Même après renormalisation elles sont toutes inférieures à $s + (j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n)$. De plus pour $s$ et $t = s + (j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n)$ on a un unique $u$ car cet $u$ doit appartenir à l'enclos de $s$ et $t$. D'où le résultat. $\square$

DEFINITION 3.2. *Pour $i,j \in \{0,1,\cdots,n\}$ on définit l'opérateur $M^{i,j}$ sur $\mathcal{S}$ par :*

$$M^{i,j}(u,v) = \begin{cases} 1 & si\ \tau(u) = i,\ \tau(v) = j\ et\ \{u,v\}\ arête \\ 0 & sinon \end{cases}$$

PROPOSITION 3.3. *Pour* $1 \leq k \leq n-2$ *et* $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ *on a :*

1. $dom(M^{n,n-k}M^{n-k,n}) = K^n_{\underbrace{1,1\cdots,1}_{k},0,\cdots,0} = L^n_k.$

2. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}) = K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}.$

3. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}M^{n-k,n}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}.$

DÉMONSTRATION. 1. $M^{n,n-k}M^{n-k,n}(s,t) = \sum_{u \in \mathcal{S}_{n-k}} M^{n,n-k}(s,u)M^{n-k,n}(u,t)$, où la somme porte sur les $u$ tel que $\{s,u\}$ et $\{t,u\}$ sont des arêtes. Il existe alors un appartement contenant $s, u$ et $t$ et si $s = \left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$, les coordonnées de $u$ normalisées sont $\left(\underbrace{1,\cdots,1}_{k},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)$ ou $\left(\underbrace{1,\cdots,1}_{k-1},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},0\right)$, les $t$ possibles voisins de $u$ sont $\left(1+\varepsilon_1,\cdots,1+\varepsilon_k,\frac{1}{2}+\varepsilon_{k+1},\cdots,\frac{1}{2}+\varepsilon_n\right)$ ou $\left(1+\varepsilon'_1,\cdots,1+\varepsilon'_{k-1},\frac{1}{2}+\varepsilon'_k,\cdots,\frac{1}{2}+\varepsilon'_{n-1},\varepsilon'_n\right)$, avec $\varepsilon_i, \varepsilon'_i = 0$, ou $\pm\frac{1}{2}$. Même après renormalisation elles sont inférieures à :

$$(\underbrace{1+\frac{1}{2},\cdots,1+\frac{1}{2}}_{k},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}) = s + (\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0).$$

De plus pour $s,\ t = s + (\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0)$, on a $u$ est dans l'enclos de $s$ et $t$. Donc $u$ est bien déterminé par $s$ et un tel $t$. Ainsi on obtient le résultat.

2. $K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,n-k}(s,t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_{n-k}$ et $\exists u \in \mathcal{S}_n$ tel que $u$ est voisin de $t$($s, u$ et $t$ sont alors dans un même appartement). Avec un repère adapté si $s = \left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)$, $u = s + \left(j_1,\cdots,j_n\right)$ normalisé, les voisins $t$ de $u$ sont $s + (j_1+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_i = 0$, ou $\pm\frac{1}{2}$ et $\sharp\{\varepsilon_i/\varepsilon_i \neq 0\} = k(t \in \mathcal{S}_{n-k})$. Même après renormalisation, elles sont inférieures à $s + (j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots j_n)$. Par ailleurs pour $s = \left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)$ et $t = s + \left(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots j_n\right)$, $u$ est bien déterminé ($u$ est dans l'enclos de $s$ et $t$) puisque pour toute racine $\alpha$ telle que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, on a

$\alpha(s) \leq \alpha(u) \leq \alpha(t)$. D'où :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,n-k}) = K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}.$$

3. Si on sait que :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,n-k} M^{n-k,n}) = dom(K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n} M^{n-k,n}),$$

par un raisonnement analogue au 1) on aura:

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,n-k} M^{n-k,n}) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}.$$

Il suffit alors de s'assurer que les termes intervenant dans $K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,n-k}$ et qui sont strictement inférieurs à $K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n}$ donnent par le produit par $M^{n-k,k}$ des termes strictement inférieurs à $K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$. En effet les voisins dans $\mathcal{S}_{n-k}$ d'un sommet $u = s + (j_1 + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = 0$, ou $\pm\dfrac{1}{2}$ et $\sharp\{\varepsilon_p \mid \varepsilon_p \neq 0\} = k$ sont sous la forme $s + (j_1 + m_1, \cdots, j_n + m_n)$, avec $m_p = 0$, ou $\pm 1$ et $\sharp\{m_p \mid m_p \neq 0\} \leq k$. Si de plus $(j_1 + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n) < \left(j_1 + \dfrac{1}{2}, \cdots, j_k + \dfrac{1}{2}, j_{k+1}, \cdots, j_n\right)$, on a $(j_1 + m_1, \cdots, j_n + m_n) < \left(j_1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}, \cdots, j_k + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}, j_{k+1}, \cdots, j_n\right)$ et par suite $s + (j_1 + m_1, \cdots, j_n + m_n) < s + (j_1 + 1, \cdots, j_k + 1, j_{k+1}, \cdots, j_n)$.

Revoyons l'analogue de 1) : $K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_k+\frac{1}{2},j_{k+1},\cdots,j_n} M^{n-k,n}(s,t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n$, $t \in \mathcal{S}_n$ et $\exists u \in \mathcal{S}_{n-k}$ tel que $\{u, t\}$ est une arête (donc $s, u$ et $t$ sont dans un même appartement). Ainsi avec un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = \left(\dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{2}\right)$ et $u = s + (j_1 + \dfrac{1}{2}, \cdots, j_k + \dfrac{1}{2}, j_{k+1}, \cdots j_n)$, les $t$ voisins de $u$ dans $\mathcal{S}_n$ sont de la forme $u = s + \left(j_1 + \dfrac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, j_k + \dfrac{1}{2} + \varepsilon_k, j_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \cdots j_n + \varepsilon_n\right)$, avec $\varepsilon_p = 0$, ou $\pm\dfrac{1}{2}$ et comme $t \in \mathcal{S}_n$ alors $t = s + (j_1 + \dfrac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, j_k + \dfrac{1}{2} + \varepsilon_k, j_{k+1}, \cdots j_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm\dfrac{1}{2}$.

Or un $t = s + (j_1 + m_1, \cdots, j_k + m_k, j_{k+1}, \cdots j_n)$, avec $m_p = 0$ ou $1$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (j_1 + 1, \cdots, j_k + 1, j_{k+1}, \cdots j_n)$. De plus pour $s$ et $t = s + (j_1 + 1, \cdots, j_k + 1, j_{k+1}, \cdots j_n)$, on a $u$ est bien déterminé ($u$ est dans l'enclos de $s$ et $t$). $\square$

Corollaire 3.4. *Pour* $k \leq n-2$ *et* $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$, *on a :* $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} L^n_k) = K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$.

Démonstration. On utilise la proposition 3.3 et le fait que les termes intervenant dans $M^{n,n-k}M^{n-k,n}$ et qui sont strictement inférieurs à $L^n_k$ donnent par le produit à gauche par $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$ des termes strictement inférieurs à $K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}$. □

Proposition 3.5. *Pour* $k = n$, $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ *et* $i \in \{0, 1\}$ *on a :*

1. $$dom(M^{n,i}M^{i,n}) = K^n_{1,\cdots,1,(-1)^{n+i}}.$$

2. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) =$
$$\begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n+\frac{1}{2}} & si \quad j_n \geq 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n+\frac{1}{2}} & si \quad j_n < 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad pair \\ K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n-\frac{1}{2}} & si \quad j_n \leq 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad impair \\ q_n K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n-\frac{1}{2}} & si \quad j_n > 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad impair \end{cases}$$

3. $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}M^{0,n}) =$
$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n \geq 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n < 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n > 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad impair \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n \leq 0 \quad et\ n + \sum j_p \quad impair \end{cases}$$

Démonstration. : Faisons la démonstration dans le cas $i = 0$; le raisonnement est semblable pour $i = 1$.

1. $M^{n,0}M^{0,n}(s,t) \neq 0$ si $s \in \mathcal{S}_n$, $t \in \mathcal{S}_n, \exists\, u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{s,u\}$ est une arête et $\{u,t\}$ aussi. Il existe un appartement contenant $s$, $u$ et $t$. Par un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = \left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$, $u = s + (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$($u$ spécial).

S'il y a un nombre pair des $\varepsilon_p$ négatifs, on se ramène par changement de signe avec des $\varepsilon_p$ tous positifs. S'il y a un nombre impair des $\varepsilon_p$ négatifs, on se ramène par changement de signe et par permutation à $\left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Donc les $u$ spéciaux voisins de $s$ sont $(1, \cdots, 1)$ ou $(1, \cdots, 1, 0)$. Maintenant les $u$ dans $\mathcal{S}_0$ sont $(1, \cdots, 1)$ si $n$ est pair ou $(1, \cdots, 1, 0)$ si $n$ est impair.

(a) Si $n$ est pair, les $t$ voisins de $u = (1, \cdots, 1)$ dans $\mathcal{S}_n$ sont $(1 + \varepsilon_1, \cdots, 1 + \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm \dfrac{1}{2}$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $\left(\dfrac{3}{2}, \cdots, \dfrac{3}{2}\right) = s + (1, \cdots, 1)$. De plus il n' y a qu'un seul $u$ déterminé par $s = \left(\dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{2}\right)$ et $t = \left(\dfrac{3}{2}, \cdots, \dfrac{3}{2}\right)$, donc :

$$dom(M^{n,0} M^{0,n}) = K^n_{1,\cdots,1} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

(b) Si $n$ est impair, les $t$ voisins de $u = (1, \cdots, 1, 0)$ dans $\mathcal{S}_n$ sont $(1 + \varepsilon_1, \cdots, 1 + \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, avec $\varepsilon_p = \pm \dfrac{1}{2}$, donc $t = s + \left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, \dfrac{1}{2} + \varepsilon_{n-1}, m_n\right)$ où $m_n = 0$ ou $-1$ et $\varepsilon_p = \pm \dfrac{1}{2}$. Elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + (1, \cdots, 1, -1)$. De plus pour $s$ et $t = s + (1, \cdots, 1, -1)$ le sommet $u$ est entièrement déterminé par un tel choix ($u$ est dans l'enclos $cl(s, t)$). Donc :

$$dom(M^{n,0} M^{0,n}) = K^n_{1,\cdots,-1} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

2. $K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}(s, t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_0, \exists\ u \in \mathcal{S}_n$ tel que $u$ et $t$ sont voisins (donc $s, u$ et $t$ sont dans un même appartement) et par un bon choix de la chambre de Weyl fondamentale si $s = \left(\dfrac{1}{2}, \cdots, \dfrac{1}{2}\right)$, $u = s + (j_1, \cdots, j_n)$ normalisée alors les $t$ possibles sont $s + (j_1 + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_p = \pm \dfrac{1}{2}$.

(a) Si $n + \sum j_p$ est pair alors elles sont toutes après renormalisation inférieures à $s + \left(j_1 + \dfrac{1}{2}, \cdots, j_n + \dfrac{1}{2}\right)$. De plus pour $s$ et $t = s + \left(j_1 + \dfrac{1}{2}, \cdots, j_n + \dfrac{1}{2}\right)$, il n'y a qu'un seul $u$ pour ce tel choix si $j_n \geq 0$ et plusieurs dans le cas où $j_n < 0$ car pour ce cas $u$ n'est pas dans l'enclos de $s$ et $t$. Donc :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) = \begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}}, & \text{si} \quad n + \sum j_p \quad \text{est pair et} \quad j_n \geq 0 \\ *K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}}, & \text{si} \quad n + \sum j_p \quad \text{est pair et} \quad j_n < 0 \end{cases}$$

où $*$ est un coefficient positif que l'on va calculer. Pour $s \in \mathcal{S}_n,\ t \in \mathcal{S}_0$, $t = s + \left(j_1 + \dfrac{1}{2}, \cdots, j_{n-1} + \dfrac{1}{2}, -|j_n| + \dfrac{1}{2}\right)$ fixés, on veut déterminer le nombre des $u = s + (j_1, \cdots, j_{n-1}, -|j_n|)$. Comme les racines $\alpha$ telles que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$ sont : $(e_p - e_k)_{1\leq p<k\leq n}$ ; $-(e_p - e_k)_{1\leq p<k<n}$ et $j_p = j_k$ ; $(e_p + e_k)_{1\leq p<k\leq n-1}$ ;

$$(e_p + e_n)_{1\leq p<n}; \quad (e_p)_{1\leq p<n} \text{ et } -e_n.$$

Parmi celles ci, celles telles que $\alpha(s) \leq \alpha(u) \leq \alpha(t)$ sont toutes à part $-e_n$. Soit $r_{n,t}$ la réflexion par rapport à l'hyperplan de direction $\alpha_n = -e_n$ et contenant $t$. Comme $u = t - \left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right) = t - v$ où $v = \left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$, on a $r_{n,t}(u) = t-$ $[v - \alpha_n(v)\alpha_n^\vee]$. Donc $r_{n,t}(u) = t - \left(\frac{1}{2}, \cdots, -\frac{1}{2}\right) = s + (j_1, \cdots, j_{n-1}, -|j_n| + 1)$ et on a pour tout $\alpha$ tel que $\alpha(s) \leq \alpha(t)$, $\alpha(s) \leq \alpha(r_{n,t}(u)) \leq \alpha(t)$. Ainsi $* = q_n$.

(b) Si $n + \sum j_p$ est impair, elles sont toutes inférieures après renormalisation à $s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, j_n - \frac{1}{2}\right)$ et pour $s, t = s +$ $\left(j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_{n-1} + \frac{1}{2}, j_n - \frac{1}{2}\right)$ on a $u$ est dans l'enclos de $s$ et $t$ si $j_n \leq 0$ et $u$ n'est pas dans l'enclos de $s$ et $t$ si $j_n > 0$. Donc :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) = \begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2}}, & \text{si } \; n + \sum j_p \; \text{ impair et } \; j_n \leq 0 \\ **K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2}}, & \text{si } \; n + \sum j_p \; \text{ impair et } \; j_n > 0 \end{cases}$$

où $**$ est un coefficient positif que l'on calcule comme dans le cas pair ci-dessus, en remplaçant $-e_n$ par $e_n$ ; on trouve encore $** = q_n$.

3. Si on sait que $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}M^{0,n}) = dom[dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0})M^{0,n}]$, on aura :

(a) Si $n + \sum j_p$ est pair, $K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}} M^{0,n}(s,t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n$, $t \in \mathcal{S}_n, \exists\, u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{u, t\}$ est une arête (donc $s, u$ et $t$ sont dans un même appartement) et par un bon choix du repère si $s = \left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$. $u = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_n + \frac{1}{2}\right)$ normalisée alors les $t$ possibles sont de la forme $s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$, où $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$. Après renormalisation elles sont toute inférieures à :

$$\begin{cases} s + (j_1 + 1, \cdots, j_{n-1} + 1, j_n + 1) & \text{si } \; j_n \geq 0 \\ s + \left(j_1 + 1, \cdots, j_{n-1} + 1, j_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) & \text{si } \; j_n < 0. \end{cases}$$

De plus pour $s$ et un tel $t$ les $u$ correspondants sont dans l'enclos de $s$ et $t$. Donc pour $n + \sum j_p$ pair on a :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = \begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & \text{si} \quad j_n \geq 0 \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \quad j_n < 0. \end{cases}$$

(b) Si $n + \sum j_p$ est impair on a : $K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n-\frac{1}{2}} M^{0,n}(s,t) \neq 0 \Longleftrightarrow s \in \mathcal{S}_n$, $t \in \mathcal{S}_n, \exists\, u \in \mathcal{S}_0$ tel que $\{u,t\}$ est une arête (donc $s, u$ et $t$ sont dans un même appartement) et par un bon choix du repère si $s = \left(\frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}\right)$, $u = s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_n - \frac{1}{2}\right)$ normalisée alors les $t$ possibles sont de la forme $s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, j_n - \frac{1}{2} + \varepsilon_n\right)$, où $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$. Après renormalisation elles sont toute inférieures à :

$$\begin{cases} s + (j_1 + 1, \cdots, j_{n-1} + 1, j_n) & \text{si} \quad j_n > 0 \\ s + (j_1 + 1, \cdots, j_{n-1} + 1, j_n - 1) & \text{si} \quad j_n \leq 0. \end{cases}$$

De plus pour $s$ et un tel $t$ les $u$ correspondants sont dans l'enclos de $s$ et $t$. Donc pour $n + \sum j_p$ impair on a :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = \begin{cases} q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \quad j_n > 0 \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & \text{si} \quad j_n \leq 0. \end{cases}$$

Vérifions maintenant que :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0} M^{0,n}) = dom[dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}) M^{0,n}].$$

Les $u$ dans $K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,0}$, sont dans un bon repère $s + (j_1 + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n)$, où $\varepsilon_p = \pm\frac{1}{2}$, leurs voisins dans $\mathcal{S}_n$ sont $s + (j_1 + m_1, \cdots, j_n + m_n)$, avec $m_p = 0$ ou $\pm 1$ $\left(\text{les } m_p \text{ sont obtenues en ajoutant } \pm\frac{1}{2} \text{ à } \varepsilon_p\right)$.

(a) Si $n + \sum j_p$ impair et $s + (j_1 + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n) < s + \left(j_1 + \frac{1}{2}, \cdots, j_n - \frac{1}{2}\right)$, on a $s + (j_1 + m_1, \cdots, j_n + m_n) \leq$

$$\begin{cases} s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n + \frac{1}{2}\right) & < s + (j_1 + 1, \cdots, j_n) & \text{si } j_n > 0 \\ s + \left(j_1 + \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \cdots, j_n + \varepsilon_n - \frac{1}{2}\right) & < s + (j_1 + 1, \cdots, j_n - 1) & \text{si } j_n \leq 0 \end{cases}$$

(b) Si $n+\sum j_p$ pair et $s+(j_1+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n)<s+\left(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}\right)$, on a $s+(j_1+m_1,\cdots,j_n+m_n)\leq$

$$\begin{cases} s+\left(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n+\frac{1}{2}\right) & <s+(j_1+1,\cdots,j_n+1) \quad \text{si} \;\; j_n\geq 0 \\ s+\left(j_1+\frac{1}{2}+\varepsilon_1,\cdots,j_n+\varepsilon_n-\frac{1}{2}\right) & <s+(j_1+1,\cdots,j_n-1) \quad \text{si} \;\; j_n<0 \end{cases}$$

Il faut s'assurer que $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,0}M^{0,n})=dom[K^n_{j_1,\cdots,j_n}dom(M^{n,0})M^{0,n})]$. On a les termes intervenant dans $M^{n,0}M^{0,n}$ et qui sont strictement inférieurs à $K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n}$ sont $K^n_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0}$, $k\leq n-1$. D'après ce qui précède on a :

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{\underbrace{1,\cdots,1}_{k},0,\cdots,0})=K^n_{j_1+1,\cdots,j_k+1,j_{k+1},\cdots,j_n}.$$

Vérifions que ces termes sont strictement inférieurs à $dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}M^{n,0}M^{0,n})$. Les seuls cas qui causent un problème sont lorsque $n+\sum j_p$ est impair (*resp.* pair) avec $j_n>0$ (*resp.* $j_n<0$). Prenons le cas où $n+\sum j_p$ impair et $j_n>0$ (même genre de raisonnement pour $n+\sum j_p$ pair est $j_n<0$ ) on a : pour $s=\left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\right)$, $u=s+(j_1,\cdots,j_n)$ et $t=u+(1,\cdots,1)=s+(j_1+1,\cdots,j_n+1)$, le milieu $\frac{u+t}{2}=s+\left(j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_n+\frac{1}{2}\right)$ est spécial dans $\mathcal{S}_1$($n+\sum j_p$ impair), donc par rétraction par rapport au mur correspondant on trouve $(j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n)$. Par suite $K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n}$ figure dans $K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n}$. donc :

Si $n+\sum j_p$ pair,

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n})=\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & \text{si} \;\; j_n\geq 0 \\ *K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \;\; j_n<0 \end{cases}$$

Si $n+\sum j_p$ impair,

$$dom(K^n_{j_1,\cdots,j_n}K^n_{1,\cdots,1,(-1)^n})=\begin{cases} **K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & \text{si} \;\; j_n>0 \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & \text{si} \;\; j_n\leq 0 \end{cases}$$

□

Remarque 3.6. *Un raisonnement analogue au 2) et 3) de la proposition 3.5 donne : dom*$(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,1}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n-\frac{1}{2}} & si \quad j_n \leq 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n-\frac{1}{2}} & si \quad j_n > 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad pair \\ K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n+\frac{1}{2}} & si \quad j_n \geq 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad impair \\ q_n K^n_{j_1+\frac{1}{2},\cdots,j_{n-1}+\frac{1}{2},j_n+\frac{1}{2}} & si \quad j_n < 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad impair \end{cases}$$

*et dom*$(K^n_{j_1,\cdots,j_n} M^{n,1} M^{1,n}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n \leq 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n > 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad pair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad j_n < 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad impair \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n \geq 0 \quad et\ n+\sum j_p \quad impair \end{cases}$$

Proposition 3.7. *Pour* $(j_1, \cdots, j_n) \in C'_u \cap \mathbb{Z}^n$ *on a :*

1. *dom*$(K^n_{j_1,\cdots,j_n} L^n_n) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n \leq 0\ et\ \sum j_p\ impair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad (j_n > 0\ et\ \sum j_p\ impair)\ ou\ (j_n < 0\ et\ \sum j_p\ pair) \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n \geq 0\ et\ \sum j_p\ pair \end{cases}$$

2. *dom*$(K^n_{j_1,\cdots,j_n} L^n_{n-}) =$

$$\begin{cases} K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n+1} & si \quad j_n \geq 0\ et\ \sum j_p\ impair \\ q_n K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n} & si \quad (j_n < 0\ et\ \sum j_p\ impair)\ ou\ (j_n > 0\ et\ \sum j_p\ pair) \\ K^n_{j_1+1,\cdots,j_{n-1}+1,j_n-1} & si \quad j_n \leq 0\ et\ \sum j_p\ pair \end{cases}$$

Démonstration. Corollaire assez facile de la proposition 3.5 et de la remarque 3.6. □

THÉOREMÈ 3.8. *L'algèbre $\mathcal{O}^n$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ invariants par un groupe fortement transitif et respectant les types est engendrée par :*

$$L_k^n \text{ et } L_{n-}^n (0 \leq k \leq n).$$

*Elle est non commutative*

DÉMONSTRATION. Par un raisonnement par récurrence sur le degré de $K^n_{j_1,\cdots,j_n}$ et en utilisant les propositions précédentes. Pour la non commutativité on a :

$$dom(L_n^n L_{n-}^n) = K^n_{2,2,\cdots,2} \text{ alors que } dom(L_{n-}^n L_n^n) = q_n K^n_{2,2,\cdots,-1}.$$

□

REMARQUE 3.9. 1. *Les opérateurs $L_k^n$ et $L_{n-}^n$ $(0 \leq k \leq n)$ sont des opérateurs symétriques et ils engendrent $\mathcal{O}^n$ qui est formée d'opérateurs non nécessairement symétriques ; c'est possible car $\mathcal{O}^n$ n'est pas commutative.*

2. *L'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ des opérateurs sur $\mathcal{S}_n$ invariants sous le groupe $G^*$, très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, admet pour base les $K^{n*}_{j_1,\cdots,j_{n-1},j_n} = K^n_{j_1,\cdots,j_{n-1},j_n} + K^n_{j_1,\cdots,j_{n-1},-j_n}$, pour $(j_1,\cdots,j_{n-1},j_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $j_1 \geq j_2 \geq \cdots \geq j_n \geq 0$.*

THÉOREMÈ 3.10. *L'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ est commutative. C'est l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}^{n*} = \mathbb{C}[L_1^n,\cdots,L_{n-1}^n,L_n^{n*}]$, si l'on note $L_n^{n*} = L_n^n + L_{n-}^n$.*

DÉMONSTRATION. D'après le calcul précédant la proposition 3.1, l'algèbre $\mathcal{O}^{n*}$ est formée d'opérateurs symétriques, elle est donc commutative. D'après les propositions 3.1, 3.4 et 3.7 elle est engendrée par $L_k^n(0 \leq k \leq n-1)$ et $L_n^{n*}$. De plus pour $a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{N}$, le terme dominant de $(L_1^n)^{a_1}(L_2^n)^{a_2}\cdots(L_n^{n*})^{a_n}$ est $K^{n*}_{a_1+a_2+\cdots+a_n,a_2+\cdots+a_n,\cdots,a_n}$. Les variables $L_k^n(0 \leq k \leq n-1)$ et $L_n^{n*}$ sont donc algébriquement indépendantes et $\mathcal{O}^{n*} = \mathbb{C}[L_1^n,\cdots,L_n^{n*}]$. □

## 4. Commentaires :

Comme signalé en [K-R 07], on peut comparer nos résultats avec les résultats classiques de Ichiro Satake [S 63], qui a étudié les groupes réductifs sur un corps p-adique. Si $G$ est un tel groupe et $U$ un "bon" sous-groupe compact ouvert, alors l'algèbre de Hecke, $\mathcal{H}(G,U)$, c'est à dire l'algèbre de convolution des fonctions complexes bi-$U$-invariantes à support compact, est toujours commutative si $G$ est connexe. Elle est même intègre de degré de transcendance le rang relatif de $G$, et on sait déterminer des générateurs explicites.

À un tel groupe $G$ est associé son immeuble de Bruhat-Tits $\Delta$ qui est supposé ici de type $\widetilde{B_n}$, $(n \geq 3)$.

Pour faire le lien entre notre point de vue et celui de Satake il faut choisir pour $U$ le fixateur $K_s$ dans $G$ d'un sommet $s$ de type $i$. Alors $G/U$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{S}_{Gi}$ des sommets de type appartenant à l'orbite $Gi$ de $i$ sous $G$. Ainsi $\mathcal{H}(G, U)$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{O}_{Gi}$ des opérateurs $G$-invariants sur $\mathcal{S}_{Gi}$ .

Examinons de plus près les conditions d'application du théorème de Satake. Il faut que $U = K_s$ soit un "bon" sous-groupe compact ouvert ce qui se traduit par les conditions techniques I et II de Satake. La condition II est essentiellement conséquence des propriétés connues des immeubles (car on a choisi $U = K_s$). La condition I se résume en l'existence de décompositions dans $G : G = U.H.N$ (Iwasawa) et $G = U.H.U$ (Bruhat). Cette décomposition de Bruhat est vérifiée si et seulement si $U = K_s$ induit tout le groupe de Weyl relatif sur un appartement contenant $s$; cela élimine donc le cas de l'algèbre $\mathcal{O}^n$ (on a bien trouvé que $\mathcal{O}^n$ est non commutative). La décomposition d'Iwasawa est vérifiée essentiellement si $U = K_s$ est transitif sur la frontière $\Omega$ de l'immeuble, ce qui conduit à la même élimination.

Pour les autres cas envisagés ici, si $G$ respecte les types, $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$ n'est pas une orbite de $G$ et la non commutativité de $\mathcal{O}$ ne contredit pas Satake. Pour $G$ très fortement transitif, transitif sur $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_1$, on a vu que les algèbres $\mathcal{O}^*$ et $\mathcal{O}^{n*}$ sont bien commutatives.

## REFERENCES

[B 68] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5 et 6. Éléments de mathématique, Hermann, Paris (1968).

[C 01] D. I. Cartwright, *Spherical harmonic analysis on buildings of type $\widetilde{A_n}$*, Monatsh. Math., **133** (2001), pp. 93–109.

[CM 94] D. I. Cartwright - W. Mlotkowski, *Harmonic analysis for groups acting on triangle buildings*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), **56** (1994), pp. 345–383.

[CW 04] D. I. Cartwright - W. Woess, *Isotropic random walks in a building of type $\widetilde{A}_d$*, Math. Z., **247** (2004), pp. 101–135.

[GL 99] P. Gérardin - K. F. Lai, *Opérateurs invariants sur les immeubles affines de type A*, C. R. Acad. Sci. Paris ser. I, **329** (1999), pp. 1–4.

[K-R 07] F. Kellil - G. Rousseau, *Opérateurs invariants sur certains immeubles affines de rang 2*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), **16** (2007), ñ 3, pp. 591–610.

[MZ 00] A. M. Mantero - A. Zappa, *Eigenfunctions of the Laplace operators for a building of type $\widetilde{A}_2$*, J. Geom. Analysis., **10** (2000), pp. 339–363.

[MZ 02] A. M. Mantero - A. Zappa, *Eigenfunctions of the Laplace operators for buildings of type $\widetilde{B}_2$*, Boll. Unione Mat. Ital. Ser B Artic. Ric. Mat. (8), **5** (2002), pp. 163–195.

[P 06] J. Parkinson, *Buildings and Hecke algebras*, J. of Algebra, **297** (2006), pp. 1–49.

[R 89] M. Ronan, *Lectures on buildings*, Academic Press (1989).

[S 63] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Pub. Math. I. H. E. S, **18** (1963), pp. 5–69.

[T 78] J. Tits, *Reductive groups over local fields, in "Automorphic forms, representations and L-functions, Corvallis-1977"*, Proc. Symp. pure Math. **33**, Amer. Math. Soc. (1979), pp. 29–69.

[W 09] R. Weiss, *The structure of affine buildings*, Annals of Math. Studies, **168**, Princeton U. Press (2009).

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 gennaio 2011.