REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 116 (2006)

Gruppi che sono unione di un numero finito di laterali doppi.

ENRICO JABARA (*)

ABSTRACT - Let G be a group and H a polycyclic subgroup of G. If G is union of a finite number of double cosets of H, it is an open question whether H is necessarily of finite index in G. The aim of this paper is to show that this is true if G is residually finite or hyperabelian or linear or word hyperbolic.

1. Introduzione.

Questo lavoro è motivato dalla seguente

CONGETTURA. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo nilpotente e finitamente generato. Se esiste un sottoinsieme finito $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ di G tale che $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$ allora H ha indice finito in G.

Tale congettura è una generalizzazione di una congettura, proposta in [3] e discussa ampiamente in [7], che riguarda il caso in cui H è ciclico.

Estenderemo il Teorema 2 di [7] al caso dei sottogruppi nilpotenti dimostrando il

TEOREMA 1. Sia G un gruppo residualmente finito e H un suo sottogruppo virtualmente nilpotente. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

Le ipotesi del teorema precedente si possono notevolmente indebolire se si suppone che il sottogruppo H sia finitamente generato (f.g.); sussiste infatti il

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica Applicata. Dorsoduro 3825/E, 30122 Venezia; e-mail: jabara@unive.it

TEOREMA 2. Sia G un gruppo residualmente periodico e H un suo sottogruppo f.g. virtualmente {nilpotente per policiclico}. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

Il teorema 2 permette di dimostrare altri risultati sui gruppi lineari e sui gruppi risolubili. Inoltre faremo vedere come si può rimuovere dal teorema 3 di [7] la condizione che il gruppo Γ sia aperiodico dimostrando il

TEOREMA 8. Sia G un sottogruppo di un gruppo iperbolico (secondo Gromov) Γ e sia H un sottogruppo virtualmente ciclico di G. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

2. Notazioni e risultati preliminari.

Sia $\mathscr{C}$ una classe di gruppi.

DEFINIZIONE 1. Un gruppo G si dice residualmente $\mathscr{C}$ se per ogni $g \in G^\sharp = G \setminus \{1\}$ esiste un sottogruppo normale N di G tale che $\overline{G} = G/N$ è un $\mathscr{C}$-gruppo e $\overline{g} \neq \overline{1}$ (ovvero $g \notin N$).

DEFINIZIONE 2. Un sottogruppo X di un gruppo G si dice $\mathscr{C}$-separabile (in G) se per ogni $g \in G \setminus X$ esiste un sottogruppo normale N di G tale che $\overline{G} = G/N$ è un $\mathscr{C}$-gruppo e $\overline{g} \notin \overline{X}$ (ovvero $g \notin NX$).

Ovviamente un gruppo G è residualmente $\mathscr{C}$ se e solo se il sottogruppo identico $\{1\}$ risulta $\mathscr{C}$-separabile in G e quindi:

OSSERVAZIONE 1. Un sottogruppo normale N di un gruppo G è $\mathscr{C}$-separabile (in G) se e solo se G/N è residualmente $\mathscr{C}$. $\square$

OSSERVAZIONE 2. Sia $\mathscr{C}$ una classe di gruppi chiusa rispetto alla formazione dei sottogruppi. Allora ogni sottogruppo di un gruppo residualmente $\mathscr{C}$ è a sua volta residualmente $\mathscr{C}$, inoltre un sottogruppo $\mathscr{C}$-separabile in G risulta $\mathscr{C}$-separabile in ogni sottogruppo che lo contiene. $\square$

OSSERVAZIONE. 3. Sia $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di sottogruppi $\mathscr{C}$-separabili di un gruppo G. Allora anche il sottogruppo

$$C = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$$

è $\mathscr{C}$-separabile in G.

DIM. Sia $g \notin C$, allora esiste un $\widetilde{\lambda} \in \Lambda$ tale che $g \notin C_{\widetilde{\lambda}}$ e quindi un sottogruppo normale N di G tale che $\overline{G} = G/N$ è un $\mathscr{C}$-gruppo e $\overline{g} \notin \overline{C}_{\widetilde{\lambda}}$. Ovviamente si ha $\overline{g} \notin \overline{C}$. $\square$

LEMMA 1. Sia G un gruppo residualmente $\mathscr{C}$ e X un suo sottoinsieme. Allora il sottogruppo $C_G(X)$ è $\mathscr{C}$-separabile in G.

DIM. Posto $C = C_G(X)$, se $g \notin C$ allora esiste un $x \in X$ con $[g, x] \neq 1$. Essendo G residualmente $\mathscr{C}$ esso ammette un sottogruppo normale N tale che $\overline{G} = G/N$ è un $\mathscr{C}$-gruppo e $[g, x] \notin N$. In $\overline{G}$ si ha $[\overline{g}, \overline{x}] \neq \overline{1}$ e quindi $\overline{g} \notin C_{\overline{G}}(\overline{X})$; si conclude osservando che $\overline{C} \leq C_{\overline{G}}(\overline{X})$. $\square$

LEMMA 2. Sia C un sottogruppo $\mathscr{C}$-separabile del gruppo G. Allora anche il sottogruppo $T = N_G(C)$ è $\mathscr{C}$-separabile in G.

DIM. Se $g \notin T$ esiste $x \in C$ con $[g, x] \notin C$. Siccome C è $\mathscr{C}$-separabile esiste un sottogruppo normale N di G tale che $\overline{G} = G/N$ è un $\mathscr{C}$-gruppo e $[\overline{g}, \overline{x}] \notin \overline{C}$. Allora $\overline{g} \notin N_{\overline{G}}(\overline{C})$; si conclude osservando che $\overline{T} \leq N_{\overline{G}}(\overline{C})$ e quindi $\overline{g} \notin \overline{T}$. $\square$

Nel seguito con $\mathscr{F}$ denoteremo la classe dei gruppi finiti, con $\mathscr{T}$ quella dei gruppi periodici, con $\mathscr{N}$ quella dei gruppi nilpotenti e con $\mathscr{P}$ quella dei gruppi policiclici. Tutte tali classi sono chiuse rispetto alla formazione dei sottogruppi e dei quozienti.

Se $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ sono due classi di gruppi con $\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2$ denoteremo la classe dei gruppi G che ammettono un sottogruppo normale $N \in \mathscr{C}_1$ tale che $G/N \in \mathscr{C}_2$.

DEFINIZIONE 3. Un gruppo G si dice virtualmente $\mathscr{C}$ se possiede un sottogruppo di indice finito che è un $\mathscr{C}$-gruppo.

Se $\mathscr{C}$ è una classe chiusa rispetto alla formazione dei sottogruppi allora, con le notazioni precedenti, è facile vedere che la classe dei gruppi virtualmente $\mathscr{C}$ coincide con quella dei $\mathscr{C}\mathscr{F}$-gruppi.

CONVENZIONE. Sia G un gruppo unione di un numero finito n di laterali doppi (distinti) di un suo sottogruppo H. Allora porremo sempre $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$ con $y_1 = 1$ e $Hy_iH \neq Hy_jH$ se $i \neq j$.

Faremo spesso uso delle seguenti osservazioni.

Osservazione 4. Sia G un gruppo unione di un numero finito di laterali doppi di un suo sottogruppo H. Allora se H è f.g. ogni sottogruppo di G contenente H è finitamente generato.

Dim. È sufficiente dimostrare che G è finitamente generato. Ma se H è f.g. e $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$ allora $G = \langle H, y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$. $\square$

Osservazione 5. Sia G un gruppo unione di un numero finito n di laterali doppi di un suo sottogruppo H. Allora:

a) se G_0 è un sottogruppo di G contenente H allora G_0 è unione di un numero finito n_0 di laterali doppi di H, inoltre se $G_0 \neq G$ si ha $n_0 < n$;

b) se K è un sottogruppo di indice finito di H allora G è unione di un numero finito di laterali doppi di K;

c) se N è un sottogruppo normale di G allora il gruppo $\overline{G} = G/N$ è unione di un numero finito $\overline{n}$ di laterali doppi di $\overline{H}$, inoltre se $N \leq H$ allora $\overline{n} = n$. $\square$

3. Gruppi residualmente finiti.

Ricordando l'osservazione 2 si ha

Osservazione 6. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Allora:

a) se G è residualmente finito anche H lo è;

b) se G è residualmente periodico anche H lo è. $\square$

Dal fatto che ogni gruppo iperabeliano, f.g. e periodico è finito discende subito il

Lemma 3. Sia H un sottogruppo iperabeliano e f.g. di un gruppo residualmente periodico G. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora G è residualmente finito.

Dim. Per dimostrare l'asserto è sufficiente dimostrare che ogni quoziente periodico di G è finito. Sia N un sottogruppo normale di G tale che $\overline{G} = G/N$ sia periodico; allora il sottogruppo $\overline{H}$, immagine di H in $\overline{G}$, è periodico, f.g. e iperabeliano e quindi finito. Dunque anche $\overline{G}$, essendo unione di un numero finito di laterali doppi di un suo sottogruppo finito, deve essere finito. $\square$

Nel seguito utilizzeremo le osservazioni 1 - 6 senza richiamarle esplicitamente.

LEMMA 4. Sia H un sottogruppo $\mathscr{F}$-separabile di un gruppo G. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. Sia $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$ e dimostriamo l'asserto ragionando per induzione su n.

Se $n = 1$ allora $G = H$ e l'enunciato è ovviamente verificato.

Sia $n > 1$ e $y_n \notin H$; per ipotesi esiste un sottogruppo normale N di G con G/N finito e $y_n \notin NH$. Allora $NH \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} Hy_iH$, NH risulta unione di al piú $n-1$ laterali doppi di H e l'ipotesi induttiva porge che $|NH : H| < \infty$.

Allora

$$|G : H| = |G : NH| \cdot |NH : H| \leq |G/N| \cdot |NH : H| < \infty$$

da cui la conclusione. $\square$

TEOREMA 1. Sia G un gruppo residualmente finito e H un suo sottogruppo (virtualmente) nilpotente. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. Non è restrittivo supporre che H sia nilpotente: detta c la classe di nilpotenza di H sia $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$. Dimostriamo l'asserto ragionando per induzione su $n + c$.

Se $n + c = 1$ allora $G = H = \{1\}$.

Sia $n + c > 1$; se $c = 0$ allora $H = \{1\}$ e l'asserto è ovvio; sia dunque $c \geq 1$ e distinguiamo due casi.

- esiste $g \in G \setminus H$ con $g \in C_G(H)$.

Allora il gruppo $\langle H, g\rangle$ è nilpotente di classe c. Siccome H è contenuto propriamente in $\langle H, g\rangle$ ne segue che G è unione di un numero $n' < n$ di laterali doppi di $\langle H, g\rangle$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, $|G : \langle H, g\rangle| < \infty$. Ricordando che H è normale in $\langle H, g\rangle$ si ha $|\langle H, g\rangle : H| \leq n$ da cui la conclusione.

- Si ha $C_G(H) \leq H$.

Allora $C_G(H) = C_H(H) = Z(H)$ e $T = N_G(Z(H))$ sono, per i lemmi 1 e 2, sottogruppi $\mathscr{F}$-separabili di G. Essendo $H \leq T$ il gruppo G è unione di un numero finito di laterali doppi di T e quindi, per il lemma 4, $|G : T| < \infty$. Se $T \neq G$ allora T è unione di un numero $n'' < n$ di laterali doppi di H e l'ipotesi induttiva porgerebbe $|T : H| < \infty$ da cui la conclusione. Resta da considerare il caso in cui $T = G$; in tal caso $Z(H)$ risulta normale in G e, essendo $\mathscr{F}$-separabile, si ha che il gruppo $\overline{G} = G/Z(H)$ è residualmente finito. $\overline{G}$ è unione di al piú n laterali doppi di $\overline{H}$ e $\overline{H}$ ha classe di nilpotenza $c-1$; l'ipotesi induttiva porge allora $|\overline{G} : \overline{H}| < \infty$. Poiché $Z(H) \leq H$ si ha $|G : H| = |\overline{G} : \overline{H}|$ e la conclusione. $\square$

LEMMA 5. Sia H un sottogruppo $\mathscr{F}$-separabile del gruppo G. Se H è (virtualmente) iperabeliano e f.g. e se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. Non è restrittivo supporre che H sia iperabeliano. Per il lemma 4 è sufficiente far vedere che H è $\mathscr{F}$-separabile in G. Sia $g \in G \setminus H$ e sia N un sottogruppo normale di G tale che $\overline{G} = G/N$ sia periodico e $\overline{g} \notin \overline{H}$. Allora $\overline{H}$ essendo un gruppo iperabeliano, f.g. e periodico è finito e $\overline{G}$ stesso, essendo unione di un numero finito di laterali doppi di $\overline{H}$, risulta finito. $\square$

LEMMA 6. Sia G un gruppo residualmente periodico e H un suo sottogruppo virtualmente policiclico. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. Dal lemma 3 discende che G è residualmente finito.

Sia H_0 un sottogruppo normale, policiclico e di indice finito di H; sia $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$ e sia d la lunghezza derivata di H_0. Dimostriamo l'asserto ragionando per induzione su $n + d$.

Se $n + d = 1$ allora $G = H$.

Sia quindi $n + d > 1$; se $d = 0$ allora $H_0 = \{1\}$, H è finito e l'asserto è banalmente verificato. Supponiamo allora $d \geq 1$ e poniamo $C_1 = C_G(H_0^{d-1})$, $T_1 = N_G(C_1)$, $C_2 = C_G(C_1)$, $T_2 = N_G(C_2)$. Per i lemmi 1 e 2 i sottogruppi C_1, C_2, $C = C_1 \cap C_2$, T_1 e T_2 sono $\mathscr{F}$-separabili in G. Se T_k ($k \in \{1, 2\}$) è un sottogruppo proprio di G allora esso risulta unione di un numero finito $n' < n$ di laterali doppi di H e, per l'ipotesi induttiva, T_k sarebbe virtiualmente policiclico. Ricordando che T_k è $\mathscr{F}$-separabile dal lemma 4 si avrebbe $|G : T_k| < \infty$ e la conclusione.

Possiamo quindi supporre che $T_1 = G = T_2$ e che C_1, C_2 e C siano sottogruppi normali di G. In $\overline{G} = G/C$ il sottogruppo $\overline{H}_0$ ha lunghezza derivata $\overline{d} \leq d-1$ e $\overline{G}$ è unione di un numero finito $\overline{n} \leq n$ di laterali doppi di $\overline{H}$; l'ipotesi induttiva porge allora che $|\overline{G} : \overline{H}| < \infty$.

Distinguiamo quindi due casi.

- Se $G \neq CH$ allora CH sarebbe unione di un numero $n'' < n$ di laterali doppi di H e quindi l'ipotesi induttiva permetterebbe di concludere la dimostrazione.
- Se $G = CH$ allora, poiché H_0^{d-1} è normale in H e $H_0^{d-1} \leq C$ e ricordando che C è abeliano in quanto $C = C_1 \cap C_G(C_1)$, si ricava che H_0^{d-1} è normale in G. Il gruppo (f.g.) $\widetilde{G} = G/H_0^{d-1}$ in quanto estensione del gruppo abeliano $\widetilde{C}$ tramite il gruppo policiclico $\widetilde{H}$ è, per un risultato di Jategaonkar [6] e Roseblade [8], residualmente finito. In $\widetilde{G}$ il sottogruppo $\widetilde{H}_0$ ha lunghezza derivata $d-1$; l'ipotesi induttiva ed il fatto che $H_0^{d-1} \leq H$ permettono di concludere che

$$|G : H| = |\widetilde{G} : \widetilde{H}| < \infty. \qquad \square$$

TEOREMA 2. Sia G un gruppo residualmente periodico e H un suo sottogruppo f.g. e virtualmemte $\mathscr{NP}$. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. Dal lemma 3 discende che G è residualmente finito.

Sia H_0 un sottogruppo normale, $\mathscr{NP}$ e di indice finito di H; allora G è unione di un numero finito n di laterali doppi di H_0. H_0 ammette un sottogruppo K nilpotente di classe c e normale tale che il quoziente H_0/K è virtualmemte policiclico. Sia $G = \bigcup_{i=1}^{n} H_0 y_i H_0$ e dimostriamo che H_0 (e quindi H) ha indice finito in G ragionando per induzione su $n+c$.

Se $n + c = 1$ allora $G = H_0$.

Se $n + c > 1$ e $c = 0$ allora $K = \{1\}$, H_0 è policiclico e l'asserto discende dal lemma precedente.

Possiamo quindi supporre $n + c > 1$ e $c > 0$. Posto $C_1 = C_G(Z(K))$, $C_2 = C_G(C_1)$, $C = C_1 \cap C_2$, $T_1 = N_G(C_1)$ e $T_2 = N_G(C_2)$, per i lemmi 1 e 2 tutti tali sottogruppi sono $\mathscr{F}$-separabili in G. Ragionando come nella dimostrazione del lemma precedente si ha che se $T_1 \neq G$ o $T_2 \neq G$ l'ipotesi induttiva permette di concludere. Supponiamo quindi che C_1, C_2 e C siano sottogruppi normali di G. Si ha $Z(K) \leq C$ e quindi nel gruppo $\overline{G} = G/C$ il sottogruppo $\overline{K}$ ha classe di nilpotenza $\overline{c} \leq c-1$ e $\overline{G}$ è unione di $\overline{n} \leq n$ laterali doppi di $\overline{H}_0$. L' ipotesi induttiva porge che $|\overline{G} : \overline{H}_0| < \infty$.

Se $G \neq CH_0$ allora CH_0 sarebbe unione di un numero $n' < n$ di laterali doppi di H_0 e l'ipotesi induttiva porgerebbe la conclusione.

Sia quindi $G = CH_0$; il sottogruppo K è normale in H_0 ed è centralizzato da C perché $K \leq C_G(Z(K)) = C_1$ e $C_2 = C_G(C_1)$; inoltre $C = C_1 \cap C_2$ è abeliano. Il gruppo $\widetilde{G} = G/K$ è certamente f.g. ed è estensione del gruppo abeliano $\widetilde{C}$ tramite il gruppo policiclico $\widetilde{H}_0$; per il citato risultato di Jategaonkar e Roseblade ([6], [8]) $\widetilde{G}$ è residualmemte finito e il lemma precedente porge $|\widetilde{G} : \widetilde{H}_0| < \infty$.

Si conclude osservando che $K \leq H_0$ e quindi $|G : H_0| = |\widetilde{G} : \widetilde{H}_0|$. □

4. Gruppi topologici.

In ogni gruppo si può definire una topologia (detta la topologia *profinita*) dichiarando come base di aperti di 1 l'insieme dei sottogruppi di indice finito. Se H è un sottogruppo del gruppo G, con $H^\wedge$ si indica l'intrersezione di tutti i sottogruppi di indice finito di G contenenti H. Nella topologia profinita un sottogruppo H risulta chiuso se e solo se $H^\wedge = H$: tale condizione è manifestamente equivalente alla $\mathcal{F}$-separabilità.

Un gruppo G dotato della topologia profinita è un gruppo topologico in quanto le due applicazioni:

$$G \times G \longrightarrow G \qquad (x, y) \mapsto xy \qquad \text{e} \qquad G \longrightarrow G \qquad x \mapsto x^{-1}$$

risultano continue.

Se G è un gruppo residualmente finito dotato della topologia profinita si può considerare il completamento topologico $\widehat{G}$ di G. Si dimostra che $\widehat{G}$ è un gruppo topologico di Hausdorff compatto e totalmente sconnesso; ovviamente l'immersione naturale $\imath : G \to \widehat{G}$ è continua e $\imath(G)$ è denso in $\widehat{G}$. Se H è un sottogruppo di G e si considera la chiusura $\imath(H)^-$ di $\imath(H)$ in $\widehat{G}$ si ha $\imath(G) \cap \imath(H)^- = \imath(H)$ se e solo se H è chiuso (ovvero $\mathcal{F}$-separabile) in G; in ogni caso $\imath(G) \cap \imath(H)^- = \imath(H^\wedge)$. Tenendo conto di questi fatti il seguente risultato appare una naturale generalizzazione del lemma 4.

TEOREMA 3. *Sia G un gruppo topologico di Hausdorff e H un suo sottogruppo compatto. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.*

DIM. Ricordiamo che se X e Y sono sottoinsiemi compatti di un gruppo topologico, allora il sottoinsieme $XY = \{ xy \mid x \in X, y \in Y \}$ risulta compatto (si veda il teorema 4.4 di [4]).

Ora H è compatto cosí come ogni suo traslato y_iH; per quanto osservato sopra il sottoinsieme Hy_iH risulta compatto per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Siccome ogni compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso anche il sottoinsieme $\bigcup_{i=2}^{n} Hy_iH$ risulta chiuso in G. Ma allora $H = G \setminus \bigcup_{i=2}^{n} Hy_iH$ è un aperto e $\bigcup_{h\in H} hy_iH$ è un ricoprimento di Hy_iH costituito da sottoinsiemi aperti. Poiché Hy_iH è compatto da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito: ciò implica che per ogni $i = 1, 2, \dots, n$ esistono un $r_i \in \mathbb{N}$ ($r_1 = 1$) e $h_{i,1}, h_{i,2}, \dots, h_{i,r_i} \in H$ tali che $Hy_iH = \bigcup_{j=1}^{r_i} h_{i,j}y_iH$ e quindi $|G : H| \leq \sum_{i=1}^{n} r_i < \infty$. $\square$

DEFINIZIONE 4. Un sottogruppo H di un gruppo G si dice virtualmente denso in G se $|G : H^\wedge| < \infty$.

TEOREMA 4. *Sia G un e H un suo sottogruppo. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H è virtualmente denso in G.*

DIM. Sia $R(G)$ il residuale finito di G, cioé l'intersezione di tutti i sottogruppi di indice finito di G. Allora $R(G) \leq H^\wedge$ e, per dimostrare l'asserto, si può considerare il quoziente $G/R(G)$. Quindi non è restrittivo supporre $R(G) = \{1\}$ e che G sia residualmente finito.

Consideriamo $\widehat{G}$, il completamento profinito di G, e l'immersione naturale $\imath : G \to \widehat{G}$. Per quanto osservato sopra $\widehat{G}$ è un gruppo topologico compatto e di Hausdorff e quindi $\imath(H)^-$, essendo un chiuso di $\widehat{G}$, risulta compatto. Dal fatto che $G = \bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH$ discende $\imath(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \imath(H)\imath(y_i)\imath(H)$. Siccome $\imath(H)^-\imath(y_i)\imath(H)^-$ è compatto in $\widehat{G}$ esso è ivi chiuso e quindi

$$\begin{aligned}\widehat{G} = \imath(G)^- &= \imath(\bigcup_{i=1}^{n} Hy_iH)^- \\ &\subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} \imath(H)^-\imath(y_i)\imath(H)^-)^- = \bigcup_{i=1}^{n} \imath(H)^-\imath(y_i)\imath(H)^-.\end{aligned}$$

Il teorema 3 porge $|\widehat{G} : \imath(H)^-| < \infty$ da cui

$$|G : H^\wedge| = |\imath(G) : \imath(H^\wedge)| = |\imath(G) : \imath(G) \cap \imath(H)^-| < \infty. \quad \square$$

Dal teorema predente discende subito il

TEOREMA 5. *Sia G un gruppo residualmente finito e H un suo sottogruppo. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H e se H*

soddisfa (virtualmente) ad una identità gruppale $w \equiv 1$ allora anche G soddisfa virtualmente alla stessa identità.

In particolare:

a) se H è (virtualmente) risolubile con lunghezza derivata d allora anche G è virtualmente risolubile con lunghezza derivata d;

b) se H ha esponente finito anche G ha esponente finito;

c) se H è n-Engel allora anche G è virtualmente n-Engel. $\square$

OSSERVAZIONE 7. Il teorema 5 ammette anche una dimostrazione diretta, basata sulle proprietà dei gruppi residualmente finiti, che prescinde da ogni considerazione di carattere topologico. $\square$

5. Gruppi lineari e risolubili.

ESEMPIO. Sia $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{Q})$ e sia H l'insieme delle matrici triangolari superiori di G. Allora G è unione di un numero finito di laterali doppi di H ma $|G : H| = \infty$ (si osservi che H non è f.g.).

Sussiste però il

TEOREMA 6. Sia G un gruppo lineare sopra un campo e H un sottogruppo risolubile e f.g. di G. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. G è f.g. e quindi, essendo un gruppo lineare, residualmente finito (si veda il teorema 4.2 di [9]). Per un risultato di Malcev (teorema 3.6 di [9]), H, in quanto gruppo lineare risolubile, ammette un sottogruppo di indice finito H_0 il cui derivato è nilpotente. Il teorema 2 permette di concludere la dimostrazione. $\square$

LEMMA 7. Sia $G = NH$ il prodotto di un gruppo normale abeliano N tramite un gruppo virtualmente policiclico H. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

DIM. Infatti G è f.g. e estensione di un gruppo abeliano tramite un gruppo virtualmemte policiclico e quindi G è, per il già citato risultato di Jategaonkar e Roseblade ([6], [8]), residualmente finito. Il teorema 2 porge la conclusione. $\square$

Teorema 7. Sia G un gruppo iperabeliano e H un suo sottogruppo virtualmente policiclico. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora H ha indice finito in G.

Dim. Sia $\{1\} = G_0 < G_1 < \ldots < G_\alpha = G$ una serie normale ascendente di G a quozienti abeliani. Dimostriamo, ragionando per induzione transfinita su β, che H ha indice finito in HG_β per ogni $\beta \leq \alpha$.

Distinguiamo vari casi.

- $\beta = 1$. Allora G_1 è un sottogruppo normale e abeliano di HG_1: il lemma 7 porge la conclusione.
- $\beta > 1$ non è un ordinale limite. Per l'ipotesi induttiva H ha indice finito in $HG_{\beta-1}$. Posto $\overline{H}\,\overline{G}_\beta = HG_\beta/G_{\beta-1}$, il lemma 7 permette di concludere che $\overline{H}$ ha indice finito in $\overline{H}\,\overline{G}_\beta$ ma allora:
$$|HG_\beta : H| = |HG_\beta : HG_{\beta-1}| \cdot |HG_{\beta-1} : H| < \infty.$$
- β è un ordinale limite. Allora $G_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} G_\gamma$ e per l'ipotesi induttiva su β si ha $|HG_\gamma : H| < \infty$ per ogni $\gamma < \beta$. Siccome esiste un sottoinsieme finito $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ di G_β tale che $HG_\beta = \bigcup_{i=1}^{n} Hg_iH$ deve esistere un $\overline{\gamma} < \beta$ con $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\} \subseteq G_{\overline{\gamma}}$; allora $HG_\beta = HG_{\overline{\gamma}}$ e $|HG_\beta : H| =$ $= |HG_{\overline{\gamma}} : H| < \infty$. $\square$

Osservazione 8. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia N il gruppo additivo di $\mathbb{K}$. Se $H = \mathbb{K}^\times$ è il gruppo moltiplicativo di $\mathbb{K}$ si può formare il prodotto semidiretto $G = NH$ (con l'azione naturalmente indotta da H su N per moltiplicazione). Allora G è un gruppo di Frobenius (sottilmente) 2-transitivo e quindi per ogni $y \in G \setminus H$ risulta $G = H \cup HyH$.

Da quanto detto e dai teoremi precedenti si ricava una dimostrazione generale del fatto che il gruppo moltiplicativo di ogni campo infinito non può essere finitamente generato. Per una discussione su questo risultato si veda anche III.A.4 (pp. 45-46) di [2]. $\square$

6. Ulteriori risultati.

Sia G un gruppo generato da un insieme finito Σ di elementi; se $g \in G$ con $|g| = |w|$ si denota la minima lunghezza delle parole w nell'alfabeto Σ che rappresentano g. In G si può definire il prodotto (di Gromov)
$$(g \cdot h) = \frac{1}{2}(|g| + |h| - |g^{-1}h|).$$

Il gruppo G si dice iperbolico (secondo Gromov) se esiste una costante reale δ tale che per ogni $g, h, k \in G$ si abbia

$$(g \cdot k) \geq \min\{(g \cdot h), (h \cdot k)\} - 2\delta$$

Si dimostra che, per un gruppo G la proprietà di essere iperbolico non dipende dal particolare sistema di generatori scelto (mentre la costante δ dipende da Σ). Il gruppo libero sull'alfabeto Σ è iperbolico con $\delta = 0$; i gruppi iperbolici hanno molte proprietà in comune con i gruppi liberi anche se, fino ad oggi, non è noto se ogni gruppo iperbolico sia residualmente finito.

Un sottogruppo elementare di un gruppo iperbolico Γ è un sottogruppo virtualmente ciclico di Γ. In analogia con quanto avviene per i gruppi liberi un sottogruppo di un gruppo iperbolico o è elementare oppure contiene un sottogruppo libero non abeliano (ma non è vero che ogni sottogruppo di un gruppo iperbolico sia a sua volta iperbolico).

In [1] si è dimostrato che se H è un sottogruppo quasiconvesso (per la definizione si veda [1]) di un gruppo iperbolico Γ e se Γ è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora $|\Gamma : H| < \infty$.

Il seguente risultato si riferisce però ai sottogruppi dei gruppi iperbolici i quali in generale non sono iperbolici.

TEOREMA 8. Sia G un sottogruppo di un gruppo iperbolico Γ e sia H un sottogruppo elementare di Γ contenuto in G. Se G è unione di un numero finito di laterali doppi di H allora G è un sottogruppo elementare di Γ.

DIM. Per un profondo risultato dovuto a Ivanov e Ol'shanskii [5] Γ è un gruppo residualmente di esponente finito. In particolare G è residualmemte periodico e, per ipotesi, H è virtualmente ciclico. Il teorema 2 permette di concludere che H ha indice finito in G e quindi G risulta un sottogruppo elementare di Γ. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] G. N. ARZHANTSEVA, *On quasiconvex subgroups of word hyperbolic groups.* Geom. Dedicata, **87** (2001), pp. 191–208.

[2] P. DE LA HARPE, *Topics in Geometric Group Theory.* Chicago Lectures in Mathematics. The University of Chicago Press. Chicago and London (2000).

[3] M. J. DUNWOODY, Problem 5 in *Combinatorial and Geometric Group Theory.* (A. J. Duncan, N. D. Gilbert and J. Howie Eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series **204** Cambridge University Press. Cambridge (1995) 322.

[4] E. HEWITT - K. A. ROSS, *Abstract Harmonic Analysis I.* Springer-Verlag. Berlin-Göttingen-Heidelberg (1963).

[5] S. V. IVANOV - A. YU. OL'SHANSKII, *Hyperbolic groups and their quotients of bounded exponents.* Trans. A. M. S. **348** (1996), pp. 2091–2138.
[6] A. V. JATEGAONKAR, *Integral group rings of polycyclic-by-finite groups.* J. Pure Appl. Algebra **4** (1974), pp. 337–343.
[7] G. A. NIBLO, *Double coset decomposition of groups.* J. Algebra **220** (1999), pp. 512–518.
[8] J. E. ROSEBLADE, *Applications of Artin-Rees lemma to group rings.* Symposia Math. **17** (1976), pp. 471–478.
[9] B. A. F. WEHRFRITZ, *Infinite Linear Groups.* Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York (1973).

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 ottobre 2004.