REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 116 (2006)

Aproximación clásica de la ecuación de Dirac cuando $\hbar \to 0$.

JAUME HARO

RESUMEN - *En este trabajo se demostrará, desde un punto de vista matemático, que las soluciones de la ecuación de Dirac tienen un comportamiento clásico cuando la constante de Planck tiende hacia cero. El resultado principal del artículo es el siguiente: "La parte del estado cuántico con energía cinética positiva (resp. negativa), en el límite, tiene un comportamiento clásico con energía cinética positiva (resp. negativa)". Notese que se trata de un resultado matemático, ya que los estados con energía cinética negativa no tienen sentido físico.*

ABSTRACT - *In this work we prove, from a mathematical point of view, that the solutions of Dirac's equation have a classical behavior when Planck's constant converge to zero. The most important result is: "The part of quantum state with positive (resp. negative) kinetic energy, has in the limit a classical behavior with positive (resp. negative) kinetic energy". Notice, this is a pure mathematical result, because physically, the states with negative kinetic energy don't make sense.*

1. Introduction.

En este artículo se realizará el estudio clásico de la ecuación de Dirac. Al tratarse de una ecuación cuántica relativista, parece razonable obtener cuando la constante de Planck $\hbar_0$ tienda a cero, la mecánica clásica relativista. Como veremos mas adelante, esta afirmación no es del todo cierta, ya que en mecánica cuántica relativista aparecen dos clases diferentes de

(*) Indirizzo dell'A.: Departament de Matemàtica Aplicada I; E.T.S.E.I.B., Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, ES-08028, Barcellona, Spain; e-mail: Jaime.Haro@upc.es

Mathematics Subject Classification 2000; 35Q40, 35S30

estados: los de energía cinética positiva y los de energía cinética negativa. Demostraremos que en el límite existen pues dos tipos de dinámicas clásicas, la de energía cinética positiva $T^t_{c,+}$ y la de energía cinética negativa $T^t_{c,-}$. Está claro que desde un punto de vista físico la dinámica clásica de energía cinética negativa no tiene ningún tipo de sentido (nada rejuvenece con el paso del tiempo), pero desde un punto de vista puramente matemático no hay ninguna razón para desestimar este tipo de dinámicas. Así pues, si se tiene en cuenta la dinámica clásica de energía cinética, demostraremos que la dinámica cuántica tiende a la clásica cuando la constante de Planck tiende a cero.

No me gustaría extenderme demasiado en el significado de los estados cuánticos con energía cinética negativa, sólo decir, que la aparición de este tipo de estados produjo una gran crisis en la mecánica cuántica relativista. La solución la dió Dirac, y es, sin duda alguna, una de las aportaciones más brillantes a la física. Dirac conjeturó que los estados de energía cinética negativa estaban casi todos ocupados, y los no ocupados correspondían a positrones. Entonces debido al Principio de Exclusion de Pauli, ya no era necesario tener en cuenta los estados de energía cinética negativa. Ahora bien, la mecánica cuántica relativista pasaba a ser una teoría con infinitas partículas y, claro está, dejaba de tener sentido el estudio de un sistema formado por un número finito de partículas. Con esta teoría el concepto de límite clásico cambia radicalmente y, de hecho, lo que se estudia en el límite, son transiciones vacío-vacío, creación de pares, etc..., véase por ejemplo [5] y [6].

Aquí como ya se ha dicho anteriormente, nos limitaremos a aceptar los estados con energía cinética negativa tanto los clásicos como los cuánticos, con lo cual, la hipótesis de Dirac no será necesaria y, por consiguiente, podremos estudiar sistemas con un número finito de partículas.

Introduzcamos sin más demora, los espacios funcionales que se usaran en el trabajo.

Consideremos los espacios $Q = \mathcal{C}^0((0,\hbar_0];\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4))$ y $C = \mathcal{C}^0((0,\hbar_0];\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6))$, y definamos las siguientes relaciones de equivalencia

$$\psi \sim_q \bar{\psi} \text{ si } \lim_{\hbar\to 0} \|\psi_\hbar - \bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)} = 0; \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\phi \sim_c \bar{\phi} \text{ si } \lim_{\hbar\to 0} (\phi_\hbar - \bar{\phi}_\hbar) = 0.$$

A partir de estas relaciones de equivalencia se pueden definir los siguientes espacios $\tilde{C} = \frac{C}{\sim_c}$ y $\tilde{Q} = \frac{Q}{\sim_q}$, que como veremos serán de gran utilidad para definir de manera precisa los estados clásicos y cuánticos.

La distribución del trabajo es la siguiente:

En la Sección II, se repasa la dinámica clásica relativista desde el punto de vista de la ecuación de Hamilton-Jacobi y, la resolución de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden por el método de las características. Como aplicación de este método resolveremos la ecuación clásica del transporte. Finalmente definiremos los dos tipos de dinámicas clásicas $T^t_{c,\pm}$ sobre el espacio de los estados clásicos.

La sección III está dedicada al estudio de la dinámica cuántica relativista. Primero se escribe la ecuación de Dirac en una representación concreta (la que se usará en todo el trabajo); luego se describirá la dinámica sobre $\tilde{Q} = \frac{Q}{\sim_q}$. Finalmente, se introduciran las matrices clásicas asociadas a la energía cinética cuántica, cuyos valores propios inducen a definir la siguiente descomposición $\tilde{Q} = \tilde{Q}^+ \oplus \tilde{Q}^-$, dónde $\tilde{Q}^+$ (resp. $\tilde{Q}^-$) es el espacio de los estados con energía cinética positiva en el límite (resp. negativa). Debido a esta descomposición también es natural definir las proyecciones $\pi^\pm : \tilde{Q} \to \tilde{Q}^\pm$.

La Sección IV está destinada al estudio de las soluciones semi-clásicas con energía cinética positiva y negativa de la ecuación de Dirac. La fase de las soluciones semi-clásicas con energía cinética positiva (resp. negativa) verifican la ecuación relativista de Hamilton-Jacobi para estados clásicos con energía cinética positiva (resp. negativa), y la amplitud verifica una ecuación del transporte **diferente** de la ecuación clásica del transporte. Finalmente, mostraremos las propiedades básicas que nos permitiran reencontrar la mecánica clásica.

En la Sección V, se enuncia el resultado principal del trabajo. Dice lo siguiente:

Si consideramos la aplicación J definida en [4], entonces se verifica

1. $J\pi^\pm$ es una conjugación entre la dinámica cuántica T^t_q y la dinámica clásica $T^t_{c,\pm}$, es decir, en el límite, la parte del estado cuántico con energía cinética positiva (resp. negativa) es un estado clásico con energía cinética positiva (resp. negativa).

2. Las dos dinámicas se desacoplan, es decir

$$JT^t_q = T^t_{c,+}J\pi^+ + T^t_{c,-}J\pi^-.$$

La notación que usaremos en todo el trabajo es la misma que se usa en [4]. Esto es:

1) $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ espacio de funciones de cuadrado integrable definidas en $\mathbb{R}^3$, y con imagen en $\mathbb{C}^4$.

2) $\mathcal{L}^2_1(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ espacio de funciones de cuadrado integrable definidas en $\mathbb{R}^3$, con imagen en $\mathbb{C}^4$, y con norma 1.

3) $\|.\|_2$ norma en el espacio $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

4) La transformada de Fourier de un funcion es

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\frac{i}{\hbar}px} dx$$

5) Dado $m \in \mathbb{N}$ la norma en el espacio de Sobolev $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ es

$$\|f\|_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)} \equiv \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{a=1}^{4} f_a^*(x)(1 - \hbar^2 \Delta)^m f_a(x) dx} =$$

$$= \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{a=1}^{4} (1 + |p|^2)^m |\hat{f}_a|^2(p) dp}$$

6) $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$ espacio de medidas de Radon positivas definidas en $\mathbb{R}^6$.

7) $\mathcal{M}_1^+(\mathbb{R}^6)$ es el subconjunto de $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$ formado por las medidas de masa 1.

8) $\mathcal{C}^0(X; Y)$ espacio de las funciones conínuas definidas sobre X y con imagen en Y.

9) $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^3)$ espacio de las funciones sobre $\mathbb{R}^3$, de soporte compacto y con derivadas de orden k contínuas.

10) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \cap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^3)$.

11) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ espacio de Schwartz.

12) Sean:

$$u = (a_1, ..., a_3) \in \mathbb{N}^3; \quad |u| = a_1 + ... + a_3$$

$$v = (\beta_1, ..., \beta_3) \in \mathbb{N}^3; \quad |v| = \beta_1 + ... + \beta_3,$$

y $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^m$. Entonces usaremos la siguiente notación

$$\partial_1^u f(x,p) = \left(\frac{\partial^{|u|} f_1}{\partial x_1^{a_1} ... \partial x_3^{a_3}}, ..., \frac{\partial^{|u|} f_m}{\partial x_1^{a_1} ... \partial x_3^{a_3}} \right)$$

$$\partial_2^v f(x,p) = \left(\frac{\partial^{|v|} f_1}{\partial p_1^{\beta_1} ... \partial p_3^{\beta_3}}, ..., \frac{\partial^{|v|} f_m}{\partial p_1^{\beta_1} ... \partial p_3^{\beta_3}} \right).$$

13) $D_1 f(x,p)$ (resp. $D_2 f(x,p)$) matriz derivada con respecto a las variables x (resp. p).

14) Sea $g : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, denotaremos por

$H_{12} g(x,p)$ a la matriz $D_1 D_2 g(x,p)$.

$H_{11}g(x,p)$ (resp. $H_{22}g(x,p)$) a la matriz hessiana respecto a las variables x (resp. p).

15) Sea E un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $|.|$ designará una norma en E, y $a.b$ designa el producto escalar de dos elementos de E.

16) Sea $h : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$, denotaremos por

$$D_1.h(x,p) = D_{x_1}h_1(x,p) + ... + D_{x_3}h_3(x,p).$$

$$D_2.h(x,p) = D_{p_1}h_1(x,p) + ... + D_{p_3}h_3(x,p).$$

17) Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, denotaremos pr $D_x.h(x)$ a la divergencia de h.

18) $s_t(x,p)$ es el determinante de la matriz $H_{12}S_t(x,p)$.

2. Dinámica clásica.

Para simplificar escogeremos $m = c = e = 1$. De la relación relativista $(H_\pm(x,p) - V(x))^2 = |p - A(x)|^2 + 1$, se obtienen (desde un punto de vista matemático), los dos siguientes hamiltonianos, $H_\pm(x,p) = \pm$ $= \pm\sqrt{|p - A(x)|^2 + 1} + V(x)$, dónde hemos supuesto que $(A, V) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Si se coge el signo $+$ (resp. $-$), se obtienen estados clásicos con energía cinética positiva (resp. negativa).

Los operadores de evolución clásicos sobre el espacio de fase son

$$\begin{array}{rcl} T^t_{c,\pm} : \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x,p) & \to & T^t_{c,\pm}(x,p) = (T^t_{1,\pm}(x,p), T^t_{2,\pm}(x,p)), \end{array}$$

dónde $T^t_{c,\pm}(x,p)$ es la solución de las ecuaciones de Hamilton en el instante t con condicion inicial (x,p).

2.1. – *Algunos resultados importantes.*

Enunciemos y demos las claves de la demostración de los siguientes lemas (la version no relativista se puede encontrar en [2], [12] y [14])

LEMA 2.1.

$$|T^t_{c,\pm}(x,p)| \leq (|x|^2 + |p|^2 + k_1^2)^{\frac{1}{2}} e^{k_2|t|},$$

dónde k_1 y k_2 son dos constantes independientes de x, p y t.

Demostración. Antetodo calculemos

$$D_2H_\pm = \pm\frac{p_\pm - A}{\sqrt{|p_\pm - A|^2+1}};\quad D_1H_\pm = \pm\frac{((p_\pm - A).D_x)A}{\sqrt{|p_\pm - A|^2+1}} - D_xV.$$

Por tanto,

$$|D_2H_\pm|\leq 1;\quad |D_1H_\pm|\leq\sqrt{\sum_{j=1}^3\left(\sum_{k=1}^3 D_{x_k}A_j\right)^2}+|D_xV|\leq K.$$

Ahora consideremos las ecuaciones dinámicas:

$$\begin{cases}\dot{x}_\pm &= D_2H_\pm\\ \dot{p}_\pm &= -D_1H_\pm,\end{cases}$$

de estas ecuaciones se deduce que

$$\begin{cases}\dfrac{d|x_\pm|^2}{dt} &= 2x_\pm.D_2H_\pm\\ \dfrac{d|p_\pm|^2}{dt} &= -2p_\pm.D_1H_\pm,\end{cases}$$

con lo cual deducimos que

$$\frac{d}{dt}(|x_\pm|^2+|p_\pm|^2)\leq 2(|x_\pm||D_2H_\pm|+|p_\pm||D_1H_\pm|)\leq 2(|x_\pm|+|p_\pm|K)$$
$$\leq |x_\pm|^2+|p_\pm|^2+K^2+1.$$

Si ahora tomamos $k_2=\frac{1}{2}$ y $k_1^2=K^2+1$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}(|x_\pm|^2+|p_\pm|^2+k_1^2)\leq 2k_2(|x_\pm|^2+|p_\pm|^2+k_1^2).$$

Integrando se ve que

$$|T^t_{1,\pm}(x,p)|^2+|T^t_{2,\pm}(x,p)|^2+k_1^2\leq(|x|^2+|p|^2+k_1^2)e^{2k_2|t|},$$

por tanto

$$|T^t_{c,\pm}(x,p)|\leq(|x|^2+|p|^2+k_1^2)^{\frac{1}{2}}e^{k_2|t|}.$$ □

Lema 2.2. *Sean $u\in\mathbb{N}^3$ y $v\in\mathbb{N}^3$ con $|u|\geq 1$ ó $|v|\geq 1$, entonces*

$$|\partial_1^u\partial_2^v T^t_{c,\pm}(x,p)|\leq k_1e^{k_2|t|},$$

dónde k_1 y k_2 son dos constantes independientes de x, p y t.

La demostración de este Lema es similar a la del Lema anterior.

LEMA 2.3. *Siempre existe algun $\varepsilon > 0$ de manera que $\forall t$ con $|t| \leq \varepsilon$ y $\forall p \in \mathbb{R}^3$ la aplicación*

$$T^t_{p,1,\pm} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; x \to T^t_{1,\pm}(x,p),$$

es un difeomorfismo $\mathcal{C}^\infty$ global.

DEMOSTRACIÓN. De las ecuaciones dinámicas se deduce que

$$(a) \qquad T^t_{1,\pm}(x,p) = x + \int_0^t D_2 H(T^\tau_{c,\pm}(x,p))d\tau.$$

$$(b) \qquad T^t_{2,\pm}(x,p) = p - \int_0^t D_1 H(T^\tau_{c,\pm}(x,p))d\tau.$$

Según (a) si tomamos los puntos (x,p) y (y,p) se obtiene:

$$x - y = T^t_{1,\pm}(x,p) - T^t_{1,\pm}(y,p) - \int_0^t [D_2 H(T^\tau_{c,\pm}(x,p)) - D_2 H(T^\tau_{c,\pm}(y,p))]d\tau.$$

Ahora aplicando el Teorema del valor medio vemos que

$$x_j - y_j = T^t_{1,\pm,j}(x,p) - T^t_{1,\pm,j}(y,p) -$$

$$- \int_0^t D(D_{p_j}H)(T^\tau_{c,\pm}(\xi_j,p))D_1 T^\tau_{c,\pm}(\xi_j,p)(x-y)d\tau,$$

por tanto

$$|x_j - y_j| \leq |T^t_{1,\pm,j}(x,p) - T^t_{1,\pm,j}(y,p)| + |x-y| \int_0^t \bar{K}e^\tau d\tau,$$

donde para obtener esta desigualdad hemos usado el Lema 2.2 y que $|D(D_{p_j}H)| \leq K$.

Así pues, tenemos

$$|x-y|^2 \leq |T^t_{1,\pm}(x,p) - T^t_{1,\pm}(y,p)|^2 + 6|x-y|^2 \bar{K}^2 t^2 e^{2t},$$

con lo cual,

$$|T^t_{1,\pm}(x,p)-T^t_{1,\pm}(y,p)|^2 \geq \frac{1}{2}|x-y|^2(1-6\bar{K}^2t^2e^{2t}).$$

Por consiguiente, si escogemos t suficientemente pequeno se concluye que $T^t_{1,\pm}$ es inyectiva.

Para terminar la demostración, solo hace falta comprobar que es localmente invertible. Para verlo, derivemos la ecuación (a) con respecto de la variable x, entonces

$$\partial_{x_i}T^t_{1,\pm,j}-\delta_{ij}=\int_0^t D(D_{p_j}H)(T^\tau_{c,\pm}(x,p))\partial_{x_i}T^\tau_{c,\pm}(x,p)d\tau,$$

con lo cual deducimos

$$|\partial_{x_i}T^t_{1,\pm,j}-\delta_{ij}|\leq\int_0^t Ke^\tau d\tau\leq tKe^t.$$

Entonces, si tomamos t suficientemente pequeno, se tiene

$$|\partial_{x_i}T^t_{1,\pm,j}-\delta_{ij}|\leq 1,$$

y por tanto $T^t_{1,\pm}$ es localmente invertible. □

LEMA 2.4. *Si la distancia del punto x al soporte de las funciones A y V es mayor que $|t|$, entonces el moviento hasta el instante t es libre, es decir, se verifica que*

$$T^t_{c,\pm}(x,q)=(x+\frac{qt}{\sqrt{q^2+1}},q).$$

La demostración de este Lema es trivial.

2.2. – *Las ecuaciones de Hamilton-Jacobi relativistas.*

Vamos a considerar las siguientes ecuaciones de Hamilton-Jacobi relativistas (la versión no relativista puede encontrarse en [10] y [12])

$$\begin{cases} -\partial_t S^\pm_t(x,q) &= H_\pm(x,D_1S_t(x,q)) \\ S^\pm_0(x,q) &= xq. \end{cases}$$

Lema 2.5. *Sea $T^{-t}_{q,1,\pm}$ el inverso del difeomorfismo $T^{t}_{q,1,\pm}$ (Lema 2.3); entonces la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi es*

$$S^{\pm}_t(x,q) = S^{\pm}(T^{-t}_{q,1,\pm}(x), q, t),$$

dónde,

$$S^{\pm}(y,q,t) = \int_0^t [T^{\tau}_{2,\pm}(y,q) D_2 H_{\pm} \circ T^{\tau}_{c,\pm}(y,q) - H_{\pm} \circ T^{\tau}_{c,\pm}(y,q)] d\tau + yq.$$

Además $S^{\pm}_t(x,q)$ verifica:
$D_1 S^{\pm}_t(x,q) = T^{t}_{2,\pm}(T^{-t}_{q,1,\pm}(x), q)$.
$D_2 S^{\pm}_t(x,q) = T^{-t}_{q,1,\pm}(x)$.

La demostración de este Lema es un simple, aunque un poco tedioso, cálculo.

Lema 2.6. *Si la distancia del punto x al soporte de las funciones A y V es mayor que $|t|$, se verifica*

$$S^{\pm}_t(x,q) = \mp\sqrt{q^2+1}\,t + qx.$$

Lema 2.7. *Para el mismo ε del Lema 2.3, la ecuación de Hamilton-Jacobi tiene solución para todo $|t| \leq \varepsilon$.*

La demostración de estos dos últimos Lemas es trivial.

Lema 2.8. *Para $|t| \leq \varepsilon$, si $|r| + |s| \geq 2$, entonces existe una constante c de manera que*

$$|\partial_1^r \partial_2^s S^{\pm}_t(x,q)| \leq c.$$

En particular, $|H_{ij} S^{\pm}_t(x,q)| \leq c; \quad i,j = 1,2.$

Este Lema es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.2 y 2.5.

Lema 2.9. *Para $|t| \leq \varepsilon$ existe une constante $k > 0$ de manera que*

$$|D_1 S^{\pm}_t(x,q) - D_1 S^{\pm}_t(x,\bar{q})| \geq k|q - \bar{q}|.$$

Demostración. Segun el Teorema de la dependencia contínua de las soluciones de una e.d.o. $\dot{y} = F(y)$ respecto de las condiciones iniciales, se tiene

$$(*) \qquad k|y_1(0) - y_2(0)| \leq |y_1(t) - y_2(t)| \leq \tilde{k}|y_1(0) - y_2(0)|,$$

donde k y $\tilde{k}$ son constantes positivas.

Usando el Lema 2.5 tenemos

$$D_1 S_t^{\pm}(x,q) = T_{2,\pm}^t(T_{q,1,\pm}^{-t}(x),q); \quad D_1 S_t^{\pm}(x,\bar{q}) = T_{2,\pm}^t(T_{\bar{q},1,\pm}^{-t}(x),\bar{q}).$$

Aplicando ahora ($*$) se obtiene

$$k\sqrt{|q-\bar{q}|^2 + |T_{q,1,\pm}^{-t}(x) - T_{\bar{q},1,\pm}^{-t}(x)|^2} \leq |T_{2,\pm}^t(T_{q,1,\pm}^{-t}(x),q) - T_{2,\pm}^t(T_{\bar{q},1,\pm}^{-t}(x),\bar{q})|,$$

y por tanto se concluye que

$$|D_1 S_t^{\pm}(x,q) - D_1 S_t^{\pm}(x,\bar{q})| \geq k|q-\bar{q}|. \qquad \square$$

Lema 2.10. *Para $|t| \leq \varepsilon$, se tiene*

$$|H_{12} S_t^{\pm}(x,q)| > \delta > 0 \ \ \textit{et} \ s_t^{\pm}(x,q) > \delta > 0,$$

dónde, $s_t^{\pm}(x,q)$ es el determinante de la matriz $H_{12}S_t^{\pm}(x,q)$.

Este Lema también es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.2 y 2.5.

2.3. – *Integración de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden.*

Consideremos el siguientes problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} D_t f(t,x) + g(t,x).D_x f(t,x) &= F(t,x) f(t,x) \\ f(0,x) &= f_0(x). \end{cases}$$

Las características del problema anterior, son las soluciones de la llamada ecuación característica

$$\begin{cases} \dot{x} &= g(t,x) \\ \dot{x}(0) &= y \end{cases}$$

Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ de manera que $\forall |t| \leq \varepsilon$ exista la solución $T^t(y)$ de la ecuación característica y que T^t es un difeomorfismo global. Definamos $\bar{f}(t,y) = f(t, T^t(y))$ y calculemos

$$D_t \bar{f}(t,y) = D_t f(t, T^t(y)) + D_x f(t, T^t(y)).\dot{T}^t(y),$$

debido a la ecuación (1) se llega a

$$D_t \bar{f}(t,y) = D_t f(t, T^t(y)) + D_x f(t, T^t(y)).g(t, T^t(y)) = F(t, T^t(y)) \bar{f}(t,y).$$

Si integramos con respecto a t se obtiene

$$\bar{f}(t,y) = \bar{f}(0,y)e^{\int_0^t F(\tau,T^\tau(y))d\tau},$$

escribamos $y = T^{-t}(x)$, entoces se tiene

$$f(t,x) = f_0(T^{-t}(x))e^{\int_0^t F(\tau,T^{\tau-t}(x))d\tau},$$

que es la solución de (1).

Ejemplo. (La ecuación clásica del transporte)
Consideremos el problema

$$\begin{cases} D_t f(t,x) + g(t,x).D_x f(t,x) & = & -\frac{1}{2}D_x.g(t,x))f(t,x) \\ f(0,x) & = & f_0(x) \end{cases}$$

Si escribimos $\bar{f}(t,y) = f(t,T^t(y))$, se obtiene

$$\bar{f}(t,y) = \bar{f}(0,y)e^{-\frac{1}{2}\int_0^t D_x.g(\tau,T^\tau(y))d\tau},$$

y si aplicamos la fórmula de Liouville

$$\ln|detDT^t(y)| = \int_0^t D_x.g(\tau,T^\tau(y))d\tau,$$

se llega a que

$$\bar{f}(t,y) = \frac{\bar{f}(0,y)}{\sqrt{|detDT^t(y)|}},$$

entonces si se escribe $x = T^t(y)$, resulta que la solución de la ecuación clásica del transporte es

$$f(t,x) = f_0(T^{-t}(x))\sqrt{|detDT^{-t}(x)|}.$$

2.4. – *Dinámica sobre $\tilde{C}$.*

Sobre $\tilde{C}$ se define igual como se hizo en [4]. Es decir, se extiende $T^t_{c,\pm}$ sobre $\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^6)$ por transporte, i.e.,

$$T^t_{c,\pm} : \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^6) \to \mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^6); f \to f \circ T^{-t}_{c,\pm}.$$

Luego por dualidad se extiende $T^t_{c,\pm}$ sobre $\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)$ de la siguiente forma,

$$T^t_{c,\pm}:\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6)\to\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6);\phi\to T^t_{c,\pm}\phi,$$

dónde $T^t_{c,\pm}\phi$ verifica $T^t_{c,\pm}\phi(f)=\phi(T^{-t}_{c,\pm}f)$, $\forall f\in\mathcal{C}^0_0(\mathbb{R}^6)$.

Finalmente, se extiende $T^t_{c,\pm}$ sobre $\tilde{C}$, del siguiente modo

$$T^t_{c,\pm}:\tilde{C}\to\tilde{C};[\phi]\to T^t_{c,\pm}[\phi]=[T^t_{c,\pm}\phi],$$

dónde $T^t_{c,\pm}\phi:(0,\hbar_0]\to\mathcal{M}^+(\mathbb{R}^6);\,\hbar\to T^t_{c,\pm}\phi_\hbar$.

Para terminar la sección demos la definición del conjunto de los estados clásicos

Definición. El conjunto de los estados clásicos, denotado por EC, es el conjunto de los elementos $[\phi]\in\tilde{C}$ que tienen al menos un representante ϕ que verifica $\phi_\hbar\in\mathcal{M}^+_1(\mathbb{R}^6)$ $\forall\hbar\in(0,\hbar_0)$.

3. Dinámica cuántica.

3.1. – *La ecuación de Dirac.*

Sean σ_1, σ_2 y σ_3 las matrices de Pauli, i.e.,

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Escojamos la siguiente representación de la ecuación de Dirac

$$i\hbar\partial_t\psi=\sum_{j=1}^{3}a_j(-i\hbar\partial_{x_j}-A_j)\psi+\beta\psi+V\psi,$$

dónde

$$a_j=\begin{pmatrix}\sigma_j&0\\0&-\sigma_j\end{pmatrix}\beta=\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}$$

Sea $T^t_\hbar\psi_\hbar$ la solution con condición inicial $\psi_\hbar$ y definamos,

$$T^t_q:\tilde{Q}\to\tilde{Q};[\psi]\to T^t_q[\psi]=[T^t_q\psi],$$

dónde $T^t_q\psi:(0,\hbar_0]\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4);\hbar\to T^t_\hbar\psi_\hbar$.

Definamos finalmente el conjunto de los estado cuánticos

DEFINICIÓN. El conjunto de los estados cuánticos, denotado por EQ, es el conjunto de elementos $[\psi] \in \tilde{Q}$, que tienen al menos un representante $\psi_\hbar \in \mathcal{L}_1^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)\ \forall \hbar \in (0,\hbar_0]$, y que tienen al menos un representante $\bar{\psi}$ tal que $\forall \hbar \in (0,\hbar_0]$ se cumple $\|\bar{\psi}_\hbar\|_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)} \leq C_m$, dónde C_m es una constante independiente de $\hbar$.

Ahora nuestro objetivo es descomponer el espacio $\tilde{Q}$.

Observemos que el operador que nos da la energía cinética cuántica es

$$E_q^c = \sum_{j=1}^{3} a_j(-i\hbar\partial_{x_j} - A_j) + \beta,$$

entonces tiene sentido definir las matrices clásicas asociadas a la energía cinética. Efectivamente, sean $S_t^\pm(x,p)$ las dos soluciones de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para $|t| \leq \varepsilon$ con condición inicial xp. Definamos las matrices clásicas asociadas a la energía cinética del siguiente modo

$$E_{c,\pm}^c(x,p) = \sum_{j=1}^{3} a_j(\partial_{x_j} S_t^\pm(x,p) - A_j(x)) + \beta.$$

Calculemos sus vectores y valores propios. Con la notación siguiente

$$\lambda_t^\pm(x,p) = \pm\sqrt{(D_1 S_t^\pm(x,p) - A(x))^2 + 1},$$

$$\sigma_t^\pm(x,p) = \sqrt{\pm 2\lambda_t^+(x,p)(\pm\lambda_t^+(x,p) + \partial_{x_3} S_t^+(x,p) - A_3(x))},$$

$$\gamma_t^\pm(x,p) = \sqrt{\mp 2\lambda_t^-(x,p)(\mp\lambda_t^-(x,p) + \partial_{x_3} S_t^-(x,p) - A_3(x))},$$

se tiene

VECTORES PROPIOS DE $E_{c,+}^c$:

$$v_{p,1}^\pm(x,t) = \frac{1}{\sigma_t^\pm}\begin{pmatrix} \pm\lambda_t^+ + \partial_{x_3} S_t^+ - A_3 \\ \partial_{x_1} S_t^+ - A_1 + i(\partial_{x_2} S_t^+ - A_2) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{p,2}^\pm(x,t) = \frac{1}{\sigma_t^\pm}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \partial_{x_1} S_t^+ - A_1 - i(\partial_{x_2} S_t^+ - A_2) \\ -(\pm\lambda_t^+ + \partial_{x_3} S_t^+ - A_3) \end{pmatrix}.$$

Entonces $v^+_{p,j}(x,t)$ tienen valor propio $\lambda^+_t(x,p)$ para $j=1,2$, y $v^-_{p,j}(x,t)$ tienen valor propio $-\lambda^+_t(x,p)$ para $j=1,2$.

VECTORES PROPIOS DE $E^c_{c,-}$:

$$u^{\pm}_{p,1}(x,t)=\frac{1}{\gamma^{\pm}_t}\begin{pmatrix}\mp\lambda^-_t+\partial_{x_3}S^-_t-A_3\\ \partial_{x_1}S^-_t-A_1+i(\partial_{x_2}S^-_t-A_2)\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$u^{\pm}_{p,2}(x,t)=\frac{1}{\gamma^{\pm}_t}\begin{pmatrix}0\\ -1\\ \partial_{x_1}S^-_t-A_1-i(\partial_{x_2}S^-_t-A_2)\\ -(\mp\lambda^-_t+\partial_{x_3}S^-_t-A_3)\end{pmatrix}.$$

Luego $u^+_{p,j}(x,t)$ tienen valor propio $-\lambda^-_t(x,p)$ para $j=1,2$, y $u^-_{p,j}(x,t)$ tienen valor propio $\lambda^-_t(x,p)$ para $j=1,2$.

Es inmediatio verificar que para $t=0$ se tiene $E^c_{c,+}=E^c_{c,-}$, $\lambda^+_0(x,p)=-\lambda^-_0(x,p)$ y $u^{\pm}_{p,j}(x,0)=v^{\pm}_{p,j}(x,0)\equiv w^{\pm}_{p,j}(x,0)$. Entonces se tiene el siguiente

LEMA 3.1. *Si se considera el producto escalar hermítico $(,)_H$ sobre $\mathbb{C}^4$, i.e., $(f,g)_H=f_1^*g_1+..+f_4^*g_4$, entonces para p y x fijados, $\{w^{\pm}_{p,j}(x,0)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^4$.*

Luego para $[\psi]\in\tilde{Q}$ siempre podremos descomponer la Transformada de Fourier de ψ del siguiente modo

$$\hat{\psi}_\hbar(p)=\sum_{j=1}^{2}(a^+_{j,\hbar}(x,p)w^+_{p,j}(x,0)+a^-_{j,\hbar}(x,p)w^-_{p,j}(x,0)),$$

por consiguiente, siempre se tiene que

$$\psi_\hbar(x)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3}a^+_{j,\hbar}(x,p)w^+_{p,j}(x,0)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$$

$$+\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^3}a^-_{j,\hbar}(x,p)w^-_{p,j}(x,0)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$$

$$\equiv\psi^+_\hbar(x)+\psi^-_\hbar(x).$$

Por lo tanto podemos escribir $\psi = \psi^+ + \psi^-$, dónde

$$\psi^\pm : (0, \hbar_0] \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4); \quad \hbar \to \psi^\pm_\hbar.$$

Definamos ahora sobre $\tilde{Q}$ la operación suma, de la siguiente manera

$$+ : \tilde{Q} \times \tilde{Q} \to \tilde{Q}; \quad ([a], [b]) \to [a] + [b] \equiv [a + b].$$

Si consideramos $[\psi] \in \tilde{Q}$ tenemos que $[\psi] = [\psi^+ + \psi^-] = [\psi^+] + [\psi^-]$, por tanto, tenemos la siguiente descomposición $\tilde{Q} = \tilde{Q}^+ \oplus \tilde{Q}^-$. Y podremos definir las proyecciones $\pi^\pm : \tilde{Q} \to \tilde{Q}^\pm$; $[\psi] \to [\psi^\pm]$.

Consideremos ahora el operador energía cinética

$$E^c_q = \sum_{j=1}^{3} a_j(- i\hbar\partial_{x_j} - A_j(x)) + \beta,$$

entonce se tiene el siguiente:

LEMA 3.2. *Sea $[\psi] \in EQ$, entonces si el límite*

$$\lim_{\hbar\to 0} \pm \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\pi^\pm\psi_\hbar, E^c_q \pi^\pm \psi_\hbar)_H dx$$

existe, siempre es positivo.

DEMOSTRACIÓN. Calculemos

$$\lim_{\hbar\to 0} \pm \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\pi^\pm\psi_\hbar, E^c_q \pi^\pm \psi_\hbar)_H dx.$$

Con la notación anterior se tiene que

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^9} \sum_{j,k=1}^{2} a^{\pm *}_{k,\hbar}(x,q) a^\pm_{j,\hbar}(x,p) \sqrt{(p-A)^2 + 1}(w^\pm_{q,k}(x,0), w^\pm_{p,j}(x,0))_H e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x} dxdpdq$$

$$+ \lim_{\hbar\to 0} \frac{\mp i\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^9} \sum_{j,k=1}^{2} a^{\pm *}_{k,\hbar}(x,q) \sum_{r=1}^{3} (w^\pm_{q,k}(x,0), a_r \partial_{x_r}(a^\pm_{j,\hbar}(x,p) w^\pm_{p,j}(x,0))_H e^{\frac{i}{\hbar}(p-q)x} dxdpdq$$

$$= (1) + (2).$$

Haciendo el cambio $p - q = \hbar u$ es sencillo comprobar que (2) queda del siguiente modo:

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{\mp i\hbar}{(2\pi)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^9} \sum_{j,k=1}^{2} a^{\pm *}_{k,\hbar}(x, p - \hbar u) \sum_{r=1}^{3} (w^\pm_{p-\hbar u,k}(x,0), a_r \partial_{x_r}(a^\pm_{j,\hbar}(x,p) w^\pm_{p,j}(x,0))_H e^{iux} dxdpdu.$$

Ahora si usamos que la relación $a^{\pm}_{k,\hbar}(x,q) = (w^{\pm}_{p,j}(x,0), \hat{\psi}_\hbar(p))_H$, si denotamos por $\hat{\psi}^a_\hbar$ y por $w^{\pm,a}_{p,j}$ a las componentes de $\hat{\psi}_\hbar$ y $w^{\pm}_{p,j}$, y si finalmente aplicamos el Lema 7.1 de [4] a (2), obtendremos

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{\mp i\hbar}{(2\pi)^3} \sum_{j,k=1}^{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{a,b,c,d=1}^{4} \int_{\mathbb{R}^9} \hat{\psi}^{a*}_\hbar(p-\hbar u)\hat{\psi}^b_\hbar(p) w^{\pm,a}_{p,k}(x,0) w^{\pm,c^*}_{p,k}(x,0)$$

$$a^{cd}_r \partial_{x_r}(w^{\pm,b^*}_{p,j}(x,0) w^{\pm,d}_{p,j}(x,0)) e^{iux} dxdpdu.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Schwarz respecto de la variable p se deduce que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^9} \hat{\psi}^{a*}_\hbar(p-\hbar u)\hat{\psi}^b_\hbar(p) w^{\pm,a}_{p,k}(x,0) w^{\pm,c^*}_{p,k}(x,0) a^{cd}_r \partial_{x_r}(w^{\pm,b^*}_{p,j}(x,0) w^{\pm,d}_{p,j}(x,0)) e^{iux} dxdpdu \right| \leq$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} w^{\pm,a}_{p,k}(x,0) w^{\pm,c^*}_{p,k}(x,0) a^{cd}_r \partial_{x_r}(w^{\pm,b^*}_{p,j}(x,0) w^{\pm,d}_{p,j}(x,0)) e^{iux} dx \right|^2 |\hat{\psi}^b_\hbar(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} du,$$

donde hemos usado que $\|\hat{\psi}^a_\hbar\|_2 \leq 1$.

Notese que $w^{\pm,a}_{p,k}(x,0) w^{\pm,c^*}_{p,k}(x,0) a^{cd}_r \partial_{x_r}(w^{\pm,b^*}_{p,j}(x,0) w^{\pm,d}_{p,j}(x,0))$ como función de la variable x pertenece al espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, y está acotada respecto la variable p. Por lo tanto,

$$g_{abcd}(u,p) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} w^{\pm,a}_{p,k}(x,0) w^{\pm,c^*}_{p,k}(x,0) a^{cd}_r \partial_{x_r}(w^{\pm,b^*}_{p,j}(x,0) w^{\pm,d}_{p,j}(x,0)) e^{iux} dx,$$

como función de la variable u pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, y está acotada respecto de p.

Así pues, resulta que:

$$|(2)| \leq \lim_{\hbar\to 0} \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \sum_{j,k=1}^{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{a,b,c,d=1}^{4} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} g^2_{abcd}(u,p) |\hat{\psi}^b_\hbar(p)|^2 dp \right)^{\frac{1}{2}} du.$$

Por consiguiente si definimos $G_{abcd}(u) = sup_{p\in\mathbb{R}^3} g^2_{abcd}(u,p)$, se obtiene

$$|(2)| \leq \lim_{\hbar\to 0} \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \sum_{j,k=1}^{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{a,b,c,d=1}^{4} \|G_{abcd}\|_{\mathcal{L}^1} \|\hat{\psi}^b_\hbar\|_2 \leq$$

$$\leq \lim_{\hbar\to 0} \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \sum_{j,k=1}^{2} \sum_{r=1}^{3} \sum_{a,b,c,d=1}^{4} \|G_{abcd}\|_{\mathcal{L}^1} = 0.$$

Estudiemos ahora (1). Haciendo el cambio $p - q = \hbar u$ i usando el Lema 7.1 de [4], es fácil comprobar que

$$(1) \quad = \lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j,k=1}^{2} \sum_{a,b=1}^{4} \int_{\mathbb{R}^9} \hat{\psi}_\hbar^{a*}(p - \hbar u)\hat{\psi}_\hbar^b(p) w_{p,k}^{\pm,a}(x,0) w_{p,j}^{\pm,b^*}(x,0)$$

$$\sqrt{(p-A)^2+1}(w_{p,k}^{\pm}(x,0), w_{p,j}^{\pm}(x,0))_H e^{iux} dxdudp.$$

Ahora bien, volviendo a usar el Lema 7.1 de [4], se ve que este último límite también es igual a:

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{j,k=1}^{2} \sum_{a,b=1}^{4} \int_{\mathbb{R}^9} \hat{\psi}_\hbar^{a*}(p - \hbar u)\hat{\psi}_\hbar^b(p) w_{p-\hbar u,k}^{\pm,a}(x,0) w_{p,j}^{\pm,b^*}(x,0)$$

$$((p-A)^2+1)^{\frac{1}{4}}((p-\hbar u - A)^2+1)^{\frac{1}{4}}(w_{p-\hbar u,k}^{\pm}(x,0), w_{p,j}^{\pm}(x,0))_H e^{iux} dxdudp.$$

Por consiguiente, si deshacemos el cambio $p - q = \hbar u$ llegamos al siguiente resultado:

$$(1) = \lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left| \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^{2} ((p-A)^2+1)^{\frac{1}{4}} a_{j,\hbar}^{\pm}(x,p) w_{p,j}^{\pm}(x,0) e^{\frac{i}{\hbar}px} dp \right|^2 dx,$$

por lo tanto, si el límite existe ha de ser positivo. $\square$

Finalmente, notemos que los estados cuánticos que en el límite poseen energía cinética positiva (resp. negativa) son los elementos de $EQ \cap \tilde{Q}^+$ (resp. $EQ \cap \tilde{Q}^+$).

4. Operadores Fourier Integrales.

Introduzcamos la notación siguiente

$$w_{q,j}^{+}(x,t) = v_{q,j}^{+}(x,t); \quad w_{q,j}^{-}(x,t) = u_{q,j}^{-}(x,t)$$

$$\tilde{S}_{t,j}^{\pm} = \partial_{x_j} S_t^{\pm} - A_j \quad j = 1,2; \quad \tilde{S}_{t,3}^{\pm} = \lambda_t^{\pm} + \partial_{x_3} S_t^{\pm} - A_3; \quad \vec{S}_t^{\pm} = (\tilde{S}_{t,1}^{\pm}, \tilde{S}_{t,2}^{\pm}, \tilde{S}_{t,3}^{\pm})$$

$$\tau_{t,\pm} = \sqrt{2\lambda_t^{\pm}(\lambda_t^{\pm} + \partial_{x_3} S_t^{\pm} - A_3)}; \quad \dot{x}_j^{\pm} = \frac{\partial_{x_j} S_t^{\pm} - A_j}{\lambda_t^{\pm}}.$$

Sea $[\psi]\in\tilde{Q}$. En la sección anterior hemos visto que siempre tenemos la siguiente descomposición

$$\psi_\hbar(x)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} a^+_{j,\hbar}(x,p)w^+_{p,j}(x,0)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$$

$$+\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} a^-_{j,\hbar}(x,p)w^-_{p,j}(x,0)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$$

$$\equiv\psi^+_\hbar(x)+\psi^-_\hbar(x).$$

Entonces para $|t|\leq\varepsilon$ introduzcamos la función

$$a_t:\tilde{Q}\to\tilde{Q};[\psi]\to a_t[\psi]\equiv\beta^+_t[\psi]+\beta^-_t[\psi],$$

con

$$\beta^\pm_t:\tilde{Q}\to\tilde{Q};[\psi]\to\beta^\pm_t[\psi],$$

definidas del siguiente modo

$$\begin{aligned}\beta^\pm_t\psi:(0,\hbar_0]\quad&\longrightarrow\quad\mathcal{S}(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)\\ \hbar\quad&\to\quad\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_{j=1}^{2}R^\pm_{t,j,\hbar}(x,q)w^\pm_{q,j}(x,t)e^{\frac{i}{\hbar}S^\pm_t(x,q)}dq.\end{aligned}$$

Dónde hemos introducido la notación:

$S^\pm_t(x,q)$ es la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi con condición inicial xq.

$R^\pm_{t,j,\hbar}(x,q)$ verifica j-módulo 2, la ecuación

$$\partial_t R^\pm_{t,j,\hbar}+\sum_{r=1}^{3}\dot{x}^\pm_r\partial_{x_r}R^\pm_{t,j,\hbar}+\sum_{r=1}^{3}\frac{1}{2}R^\pm_{t,j,\hbar}\partial_{x_r}\dot{x}^\pm_{x_r}+\sum_{l=1}^{2}R^\pm_{t,l,\hbar}(w^\pm_{q,j}(x,t),\dot{w}^\pm_{q,l}(x,t))_H$$

$$-i\frac{(-1)^j}{\tau^2_{t,\pm}}\sum_{r=1}^{3}(\vec{S}^\pm_t\wedge\partial_{x_r}\vec{S}^\pm_t)_r R^\pm_{t,j,\hbar}+\frac{R^\pm_{t,j+1,\hbar}}{\tau^2_{t,\pm}}[(-1)^j(\vec{\nabla}\wedge\vec{S}^\pm_t)_2+i(\vec{\nabla}\wedge\vec{S}^\pm_t)_1]=0,$$

con la condición inicial $R^\pm_{0,j,\hbar}(x,q)=a^\pm_{j,\hbar}(x,q)$. Esta es la ecuación del transporte para la ecuación de Dirac.

4.1. – *Propriedades de la ecuación del transporte para la pour ecuación de Dirac.*

Lema 4.1. *Sean* $(R^\pm_{t,1,\hbar}(x,q),R^\pm_{t,2,\hbar}(x,q))$ *y* $(\bar{R}^\pm_{t,1,\hbar}(x,q),\bar{R}^\pm_{t,2,\hbar}(x,q))$ *dos* *soluciones de la ecuación del transporte para la ecuación de Dirac. Definamos la función* $\upsilon^{\pm}_{t,\hbar}(x,q) = \sum_{j=1}^{2} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(x,q)\bar{R}^{\pm *}_{t,j,\hbar}(x,q)$ *entonces* $\upsilon^{\pm}_{t,\hbar}(x,q)$ *verifica la ecuación clásica del transporte*

$$\partial_t \upsilon^{\pm}_{t,\hbar} + \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(\dot{x}^{\pm}_j \upsilon^{\pm}_{t,\hbar}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Se trata de un calculo sin ninguna dificultad si se tiene en cuenta la ecuación del transporte para la ecuación de Dirac □

COROLARIO 4.2. *Se tiene que* $\upsilon^{\pm}_{t,\hbar}(x,q) = \upsilon^{\pm}_{0,\hbar}(T^{-t}_{1,q,\pm}(x),q)s^{\pm}_t(x,q)$.

DEMOSTRACIÓN. Si se considera la ecuación clásica del transporte

$$\partial_t f + \sum_{j=1}^{3} \dot{x}^{\pm}_j \partial_{x_j} f + \frac{1}{2} f \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \dot{x}^{\pm}_j = 0,$$

y se multiplica por $2f$ se llega al siguiente resultado

$$\partial_t f^2 + \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(\dot{x}^{\pm}_j f^2) = 0.$$

Dado que la solución de la ecuación clásica del transporte es

$$f(x,t) = f(T^{-t}_{1,\pm}(x,q),0)\sqrt{|detD_1 T^{-t}_{1,\pm}(x,q)|},$$

se obtiene que

$$f^2(x,t) = f^2(T^{-t}_{1,\pm}(x,q),0)|detD_1 T^{-t}_{1,\pm}(x,q)|,$$

y con el uso del lema 2.5, se concluye que

$$f^2(x,t) = f^2(T^{-t}_{1,\pm}(x,q),0)s^{\pm}_t(x,q).$$ □

Escribamos la solución general de la ecuación del transporte para la ecuación de Dirac, del siguiente modo

$$R^{\pm}_{t,j,\hbar}(x,q) = \sum_{k=1}^{2} A^{\pm,k}_{t,j}(x,q) a^{\pm}_{k,\hbar}(T^{-t}_{1,q,\pm}(x),q), \tag{2}$$

dónde las funciones funciones incógnita $A^{\pm,k}_{t,j}$ no dependen del parámetro $\hbar$ (véase la Sección 2.3).

Corolario 4.3. *Debido al corolario 4.2, se verifica que*

$$\sum_{j=1}^{2} A^{\pm,k}_{t,j}(x,q) A^{\pm,r^*}_{t,j}(x,q) = s^{\pm}_t(x,q)\delta_{r,k}.$$

4.2. – *Propriedades del operador a_t.*

Lema 4.4. *Sea $[\psi] \in \tilde{Q}$, entonces $\forall |t| \leq \varepsilon$ se cumple $\beta^{\pm}_t[\psi] = \pi^{\pm}[a_t\psi]$.*

Demostración. Escribamos $\beta^{\pm}_t \psi_\hbar(x)$ del siguiente modo

$$\beta^{\pm}_t \psi_\hbar(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{9}{2}}} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^9} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q) w^{\pm}_{q,j}(y,t) e^{\frac{i}{\hbar}[S^{\pm}_t(y,q)-p(y-x)]} dqdpdy$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{9}{2}}} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^9} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q) w^{\pm}_{p,j}(x,0) e^{\frac{i}{\hbar}[S^{\pm}_t(y,q)-p(y-x)]} dqdpdy$$

$$+ \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{9}{2}}} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^9} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q) [w^{\pm}_{q,j}(y,t) - w^{\pm}_{p,j}(x,0)] e^{\frac{i}{\hbar}[S^{\pm}_t(y,q)-p(y-x)]} dqdpdy$$

$= (1) + (2)$.

Entonces

$$(1) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^3} g^{\pm}_{t,j,\hbar}(p) w^{\pm}_{p,j}(x,0) e^{\frac{i}{\hbar}px} dp,$$

dónde hemos introducido la función

$$g^{\pm}_{t,j,\hbar}(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{\mathbb{R}^6} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q) e^{\frac{i}{\hbar}[S^{\pm}_t(y,q)-py]} dqdy.$$

Por lo tanto, tenemos que $(1) = \pi^{\pm}\beta^{\pm}_t \psi_\hbar(x)$.

Veamos ahora que $\lim_{\hbar\to 0} \|(2)\|_2 = 0$. Calculemos

$$\lim_{\hbar\to 0} \|(2)\|_2^2 = \lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{(2\pi\hbar)^9} \sum_{j,k=1}^{2} \int\limits_{\mathbb{R}^{21}} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q) R^{\pm *}_{t,k,\hbar}(\bar{y},\bar{q}) ([w^{\pm}_{\bar{q},k}(\bar{y},t) - w^{\pm}_{\bar{p},k}(x,0)],$$

$$[w^{\pm}_{q,j}(y,t) - w^{\pm}_{p,j}(x,0)])_H e^{\frac{i}{\hbar}[S^{\pm}_t(y,q)-p(y-x)]} e^{-\frac{i}{\hbar}[S^{\pm}_t(\bar{y},\bar{q})-\bar{p}(\bar{y}-x)]} dyd\bar{y}dqd\bar{q}dpd\bar{p}dx.$$

Si hacemos el cambio de variable $\bar{y} = y + \hbar z$, $\bar{q} = q + \hbar u$, $\bar{p} = p + \hbar v$, y usamos un argumeto igual al que se utiliza en el Apéndice A de [7], se llega al siguiente resultado

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{(2\pi)^9}\sum_{j,k=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{21}} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q)R^{\pm *}_{t,k,\hbar}(y,q+\hbar u)([w^{\pm}_{q,k}(y,t)-w^{\pm}_{p,k}(x,0)],$$

$$[w^{\pm}_{q,j}(y,t)-w^{\pm}_{p,j}(x,0)])_H e^{-iD_1S^{\pm}_t(y,q)z}e^{-iD_2S^{\pm}_t(y,q)u}e^{i(pz+yv-vx)}dydqdpdudxdvdz,$$

si ahora integramos con respecte a las variables x y v se obtiene

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{(2\pi)^6}\sum_{j,k=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{15}} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q)R^{\pm *}_{t,k,\hbar}(y,q+\hbar u)([w^{\pm}_{q,k}(y,t)-w^{\pm}_{p,k}(y,0)],$$

$$[w^{\pm}_{q,j}(y,t)-w^{\pm}_{p,j}(y,0)])_H e^{-iD_1S^{\pm}_t(y,q)z}e^{-iD_2S^{\pm}_t(y,q)u}e^{ipz}dydqdpdudz.$$

Finalmente integrando respecto de p y z, y teniendo en cuenta que $w_{D_1S^{\pm}_t(y,q),k}(y,0) = w_{q,k}(y,t)$, se llega al siguiente resultado

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{j,k=1}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^{9}} R^{\pm}_{t,j,\hbar}(y,q)R^{\pm *}_{t,k,\hbar}(y,q+\hbar u)([w^{\pm}_{q,k}(y,t)-w^{\pm}_{q,k}(y,t)],$$

$$[w^{\pm}_{q,j}(y,t)-w^{\pm}_{q,j}(y,t)])_H e^{-iD_2S^{\pm}_t(y,q)u}dydqdu = 0.$$

Así pues, acabamos de ver que $\lim_{\hbar\to 0}\|\beta^{\pm}_t\psi_\hbar - \pi^{\pm}\beta^{\pm}_t\psi_\hbar\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)} = 0$. Con un argumento similar se prueba que $\lim_{\hbar\to 0}\|\pi^{\mp}\beta^{\pm}_t\psi_\hbar\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)} = 0$. Con lo cual se deduce que

$$\lim_{\hbar\to 0}\|\beta^{\pm}_t\psi_\hbar - \pi^{\pm}a_t\psi_\hbar\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)} = 0.$$

Del mismo modo se comprueba que $\lim_{\hbar\to 0}\|\beta^{\pm}_t\psi_\hbar - \pi^{\pm}a_t\psi_\hbar\|_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)} = 0$, para todo $m\in\mathbb{N}$, lo que implica que $\beta^{\pm}_t[\psi] = \pi^{\pm}a_t[\psi]$. □

LEMA 4.5. *$\forall |t| \le \varepsilon$ se cumple $\beta^{\pm}_t[\psi] = T^t_q\pi^{\pm}[\psi]$.*

DEMOSTRACIÓN. Para poder hacer la demostración necesitamos el siguiente

TEOREMA (véase [8]). *Si $\phi_\hbar(t)$ es solución de*

$$i\hbar\partial_t\psi = H(x,-i\hbar\nabla)\psi + F(x,t;\hbar),$$

y

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{1}{\hbar}\|F(t;\hbar)\|_{\mathcal{L}^2}=0 \text{ y } \frac{1}{\hbar}\|F(t;\hbar)\|_{\mathcal{L}^2}\leq g(t),$$

con $g(t)\in\mathcal{L}^1[-\varepsilon,\varepsilon]$, *entonces para* $t\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ *se satisface*

$$\lim_{\hbar\to 0}\|T^t_\hbar\psi_\hbar(0)-\phi_\hbar(t)\|_{\mathcal{L}^2}\leq\lim_{\hbar\to 0}\|\psi_\hbar(0)-\phi_\hbar(0)\|_{\mathcal{L}^2}.$$

Sabiendo este Teorema ya podemos demostrar el lema. Escribamos

$$\chi(g)=i\partial_t g+i\sum_{r=1}^3 a_r\partial_{x_r}g$$

Vamos a buscar una solución semi-clásica de la ecuación de Dirac con el aspecto siguiente

$$\bar{\psi}^\pm_\hbar(x,t)=\beta^\pm_t\psi_\hbar+\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}\gamma^\pm_{t,\hbar}(x,q)e^{\frac{i}{\hbar}S^\pm_t(x,q)}dq.$$

Aplicandole el operador $i\hbar\partial_t-H$ se obtiene

$$(i\hbar\partial_t-H)\bar{\psi}^\pm_\hbar=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\frac{i}{\hbar}S^\pm_t}\Bigg\{\lambda^\pm_t(\sum_{j=1}^2 R^\pm_{t,j,\hbar}w^\pm_{q,j}+\hbar\gamma^\pm_{t,\hbar})$$

$$-E^{c,\pm}_c(\sum_{j=1}^2 R^\pm_{t,j,\hbar}w^\pm_{q,j}+\hbar\gamma^\pm_{t,\hbar})+\hbar\chi(\sum_{j=1}^2 R^\pm_{t,j,\hbar}w^\pm_{q,j})+\hbar^2\chi(\gamma^\pm_{t,\hbar})\Bigg\}dq.$$

Luego

$$(i\hbar\partial_t-H)\bar{\psi}^\pm_\hbar=\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\frac{i}{\hbar}S^\pm_t}\Bigg\{\chi(\sum_{j=1}^2 R^\pm_{t,j,\hbar}w^\pm_{q,j})+(\lambda^\pm_t-E^c_{c,\pm})\gamma^\pm_{t,\hbar}\Bigg\}dq$$

$$+\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\frac{i}{\hbar}S^\pm_t}\chi(\gamma^\pm_{t,\hbar})dq.$$

Si queremos que se cumplan las condiciones del teorema hay que pedir que se verifique

$$(*)\quad \chi(\sum_{j=1}^2 R^\pm_{t,j,\hbar}w^\pm_{q,j})+(\lambda^\pm_t-E^{c,\pm}_c)\gamma^\pm_{t,\hbar}=0,$$

pero como $(\lambda^\pm_t-E^{c,\pm}_c)w^\pm_{q,j}(x,t)=0\quad j=1,2$, resulta que la condición necesaria y suficiente para que $(*)$ tenga solución es que se cumpla

$$(**)\quad (w^{\pm}_{q,j},\chi(\sum_{j=1}^{2}R^{\pm}_{t,j,\hbar}w^{\pm}_{q,j}))_H=0\quad j=1,2.$$

Estudiemos ahora con más detalle $(**)$. Escribiendolas explicitamente se tiene

$$\partial_t(R^{\pm}_{t,j,\hbar})+\sum_{l=1}^{2}R^{\pm}_{t,l,\hbar}(w^{\pm}_{q,j},\dot{w}^{\pm}_{q,l})_H+\sum_{l=1}^{2}\sum_{r=1}^{3}(w^{\pm}_{q,j},a_r\partial_{x_r}(R^{\pm}_{t,l,\hbar}w^{\pm}_{q,l}))_H=0, j=1,2.$$

Ahora bien, como $(w^{\pm}_{q,j},a_r w^{\pm}_{q,s})_H=\dot{x}^{\pm}_r\delta_{s,j}$, podemos escribir j-módulo 2

$$\partial_t R^{\pm}_{t,j,\hbar}+\sum_{l=1}^{2}R^{\pm}_{t,l,\hbar}(w^{\pm}_{q,j},\dot{w}^{\pm}_{q,l})_H+\sum_{r=1}^{3}\dot{x}^{\pm}_r\partial_{x_r}R^{\pm}_{t,j,\hbar}$$
$$+\sum_{r=1}^{3}(w^{\pm}_{q,j},a_r\partial_{x_r}w^{\pm}_{q,j+1})_H R^{\pm}_{t,j+1,\hbar}+\sum_{r=1}^{3}(w^{\pm}_{q,j},a_r\partial_{x_r}w^{\pm}_{q,j})_H R^{\pm}_{t,j,\hbar}=0.$$

Y haciendo uso de las identidades

$$(w^{\pm}_{q,j},a_r\partial_{x_r}w^{\pm}_{q,j})_H=\frac{1}{2}\partial_{x_r}\dot{x}^{\pm}_r-i\frac{(-1)^j}{\tau^2_{t,\pm}}\sum_{r=1}^{3}(\vec{S}^{\pm}_t\wedge\partial_{x_r}\vec{S}^{\pm}_t)_r$$

$$\sum_{r=1}^{3}(w^{\pm}_{q,j},a_r\partial_{x_r}w^{\pm}_{q,j+1})_H=\frac{1}{\tau^2_{t,\pm}}[(-1)^j(\vec{\nabla}\wedge\vec{S}^{\pm}_t)_2+i(\vec{\nabla}\wedge\vec{S}^{\pm}_t)_1],$$

llegamos a *la ecuación del transporte para la ecuación de Dirac*, y por hipótesis $R^{\pm}_{t,j,\hbar}$ es solución. En consecuencia, vemos que

$$(i\hbar\partial_t-H)\bar{\psi}^{\pm}_{\hbar}=\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\frac{i}{\hbar}S^{\pm}_t(x,q)}\chi(\gamma^{\pm}_{t,\hbar})dq.$$

Ahora bien, es fácil cercionarse (véase [4]) de que

$$\lim_{\hbar\to 0}\hbar\left\|\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}e^{\frac{i}{\hbar}S^{\pm}_t(x,q)}\chi(\gamma^{\pm}_{t,\hbar})dq\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)}=0.$$

Con lo cual, debido al teorema, se tiene

$$\lim_{\hbar\to 0}\|\bar{\psi}^{\pm}_{\hbar}(t)-T^t_{\hbar}\psi^{\pm}_{\hbar}\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)}=0.$$

Análogamente se demuestra que $\lim_{\hbar\to 0}\|\bar{\psi}^{\pm}_{\hbar}(t)-T^t_{\hbar}\psi^{\pm}_{\hbar}\|_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)}=0$, para todo $m\in\mathbb{N}$, es decir, $[\bar{\psi}^{\pm}(t)]=T^t_q\pi^{\pm}[\psi]$. Y como

$$\lim_{\hbar\to 0}\left\|\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}S^{\pm}_t(x,q)}\gamma^{\pm}_{t,\hbar}(x,q)dq\right\|_{\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^4)}=0,$$

se concluye que $[\bar{\psi}^{\pm}(t)]=\beta^{\pm}_t[\psi]$. $\square$

Observación. Para energias cinéticas positivas (signo +),

$$\chi(\sum_{j=1}^{2}R^{+}_{t,j,\hbar}w^{+}_{q,j})$$

tiene energia cinética negativa. Por lo tanto, como

$$(i\hbar\partial_t-H)\beta^{+}_t\psi_{\hbar}=\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3} e^{\frac{i}{\hbar}S^{+}_t}\chi(\sum_{j=1}^{2}R^{+}_{t,j,\hbar}w^{+}_{q,j})dq,$$

se ve que el error que cometemos al aproximar la solución de la ecuación de Dirac con condición inicial $\psi^{+}_{\hbar}$ por $\beta^{+}_t\psi_{\hbar}$, tiene energia cinética negativa y es de orden $\hbar$. Por consiguiente para que este error sea de orden $\hbar^2$ y así obtener una solución semi-clásica, hay que sumar a $\beta^{+}_t\psi_{\hbar}$ el término

$$\frac{\hbar}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}\gamma^{+}_{t,\hbar}(x,q)e^{\frac{i}{\hbar}S^{+}_t(x,q)}dq,$$

que obviamente contiene ondas con energia cinética negativa. Estas ondas de energia cinética negativa dan lugar al movimiento tembloroso del electron (en alemán “Zitterbewegung”, para más detalles véase [13]), que desaparece al hacer tender $\hbar$ hacia cero. La misma conclusión vale para energias cinéticas negativas.

Corolario 4.6. *$\forall|t|\leq\varepsilon$ se verifica $\beta^{\pm}_t[\psi]=\pi^{\pm}[T^t_q\psi]$.*

Demostración. Segun el Lema 4.5 tenemos

$$\beta^{+}_t[\psi]+\beta^{-}_t[\psi]=T^t_q\pi^{+}[\psi]+T^t_q\pi^{-}[\psi]=T^t_q[\psi],$$

así pues $a_t[\psi]=T^t_q[\psi]$. Ahora haciendo uso del lema 4.4, se obtiene el resultado. $\square$

Corolario 4.7. *$\forall|t|\leq\varepsilon$ se cumple $a_t[\psi]=T^t_q[\psi]$ y $T^t_q\pi^{\pm}[\psi]=\pi^{\pm}[T^t_q\psi]$.*

Demostración. La primera parte del lema ya ha sido probada en el Corolario 4.6. Demostremos la segunda parte. Del Lema 4.5 se concluye que $\beta_t^{\pm}[\psi] = T_q^t \pi^{\pm}[\psi]$, y del Corolario 4.6, se decuce que $\beta_t^{\pm}[\psi] = \pi^{\pm} T_q^t[\psi]$. □

Lema 4.8. *Sea* $[\psi] \in \tilde{Q}^{\pm}$ *entonces* $\forall t \in [0, \varepsilon]$ *se satisface* $\beta_t^{\pm} T_q^{t_0}[\psi] = \beta_{t-\varepsilon}^{\pm} T_q^{t_0+\varepsilon}[\psi]$.

Demostración. Tomemos $t \in [0, \varepsilon]$. Por una parte tenemos que

$$\beta_t^{\pm} T_q^{t_0}[\psi] = \beta_t^{\pm}[T_q^{t_0}\psi] = (\text{Corolario 4.6}) = \pi^{\pm}[T_q^t T_q^{t_0}\psi] = \pi^{\pm}[T_q^{t+t_0}\psi].$$

Y por otra parte

$$\beta_{t-\varepsilon}^{\pm} T_q^{t_0+\varepsilon}[\psi] = \beta_{t-\varepsilon}^{\pm}[T_q^{t_0+\varepsilon}\psi] = (\text{Corolario 4.6}) = \pi^{\pm}[T_q^{t-\varepsilon} T_q^{t_0+\varepsilon}\psi] = \pi^{\pm}[T_q^{t+t_0}\psi].$$

□

Debido al Lema 4.8 $\forall t$ podemos definir

$$\sigma_t : \tilde{Q}^{\pm} \to \tilde{Q}^{\pm}; [\psi] \to \sigma_t[\psi],$$

dónde si $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, entonces $\sigma_t \psi = a_{t-t_0} T_q^{t_0}\psi$. Y se cumple el siguiente

Lema 4.9. *Si* $[\psi] \in \tilde{Q}^{\pm}$ *entonces* $\sigma_t[\psi] = T_q^t[\psi] \quad \forall t$ finito .

Demostración. Sea t_0 de manera que $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, entonces

$$\sigma_t[\psi] = a_{t-t_0}[T_q^{t_0}\psi] = (\text{Corolario 4.7}) = T_q^{t-t_0}[T_q^{t_0}\psi] = [T_q^t\psi \qquad \square$$

5. El límite clásico de la ecuación de Dirac.

Teorema 5.1. *Supongamos que*
$(A, V) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.
$[\psi] \in \tilde{Q}$, con $\|\psi_\hbar\|_2 = 1 \ \forall \hbar \in (0, \hbar_0]$.
Entonces:
$J\pi^{\pm}$ *es una conjugación entre* T_q^t *ey* $T_{c,\pm}^t$ *para todo tiempo finito, i.e.,*

$$J\pi^{\pm} T_q^t[\psi] = T_{c,\pm}^t J\pi^{\pm}[\psi] \quad \forall t \textit{ finito}.$$

La dos dinámicas clásicas están desacopladas., i.e.,

$$JT_q^t[\psi] = T_{c,+}^t J\pi^{+}[\psi] + T_{c,-}^t J\pi^{-}[\psi] \quad \forall t \textit{ finito}.$$

Este resultado puede escribirse de la siguiente forma, si la medida $\mu_0^\pm \equiv \lim_{\hbar\to 0} J_\hbar \pi^\pm \psi_\hbar$ existe, entonces la medida de probabilidad clásica sobre el espacio de fases $\mu_t \equiv \lim_{\hbar\to 0} J_\hbar T_\hbar^t \psi_\hbar$ existe para todo t finito y se descompone en dos partes $T_{c,+}^t \mu_0^+$ y $T_{c,-}^t \mu_0^-$, i.e.,

$$\mu_t = T_{c,+}^t \mu_0^+ + T_{c,-}^t \mu_0^- \quad \forall t \text{ finito.}$$

Es decir, la medida μ_0^+ (resp. μ_0^-) que se obtiene de la parte del estado cuántico con energía cinética positiva (resp. negativa) tiene una evolución clásica con energía cinética positiva (resp. negativa).

Demostración del Teorema 5.1. Empecemos calculando $JT_q^t[\psi]$ para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Usado el Corolario 4.6 se tiene que

$$JT_q^t[\psi] = J\pi^+[T_q^t\psi] + J\pi^-[T_q^t\psi] = J\beta_t^+[\psi] + J\beta_t^-[\psi].$$

Entonces como $\beta_0^\pm[\psi] = \pi^\pm[\psi]$ (Lema 4.5); para demostrar el Teorema para $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, hay que probar que $J\beta_t^\pm[\psi] = T_{c,\pm}^t J\beta_0^\pm[\psi]$, i.e., $J\beta_t^\pm\psi \sim_c$ $\sim_c T_{c,\pm}^t J\beta_0^\pm\psi$. Lo que es equivalente a probar que $J^2\beta_t^\pm\psi \sim T_{c,\pm}^t J^2\beta_0^\pm\psi$. Dónde, J^2 está definida en [4], y $a \sim b$ significa que $\lim_{\hbar\to 0}(a_\hbar - b_\hbar) = 0$ en sentido distribucional.

Esta última relación será la que demostraremos. Tomemos $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^6)$ y calculemos

$$\lim_{\hbar\to 0}(J_\hbar^2\beta_t^\pm\psi_\hbar(\phi) - T_{c,\pm}^t J_\hbar^2\beta_0^\pm\psi_\hbar(\phi)), \tag{3}$$

debido a las propiedades de la 1-Transformada de Fourier, (3) se convierte en (véase el Lema 4.6 de [4])

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int_{\mathbb{R}^{15}}\sum_{k,j=1}^{2} e^{\frac{i}{\hbar}[S_t^\pm(z-\hbar X,q)-S_t^\pm(z,\bar q)]}R_{t,j,\hbar}^\pm(z-\hbar X,q){R_{t,k,\hbar}^\pm}^*(z,\bar q)\right.$$
$$\left.(w_{\bar q,k}^\pm(z,t), w_{q,j}^\pm(z-\hbar X,t))_H e^{-iPz}T.F.(\phi)(-P,-X)dqd\bar q dzdPdX - T_{c,\pm}^t J_\hbar^2\beta_0^\pm\psi_\hbar(\phi)\right].$$

Haciendo el cambio de variable $\bar q = q - \hbar u$, y usando el Apéndice A de [7], se llega a

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^6}\int_{\mathbb{R}^{15}}\sum_{k,j=1}^{2} e^{-i[D_1S_t^\pm(z,q)X - D_2S_t^\pm(z,q)u]}R_{t,j,\hbar}^\pm(z,q){R_{t,k,\hbar}^\pm}^*(z,q-\hbar u)\right.$$
$$\left.(w_{q,k}^\pm(z,t), w_{q,j}^\pm(z,t))_H e^{-iPz}T.F.(\phi)(-P,-X)dqdudzdPdX - T_{c,\pm}^t J_\hbar^2\beta_0^\pm\psi_\hbar(\phi)\right],$$

y debido a la ortonormalidad de la base, se obtine

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^6}\int\limits_{\mathbb{R}^{15}}\sum_{j=1}^{2} e^{-i[D_1S_t^{\pm}(z,q)X-D_2S_t^{\pm}(z,q)u]}R^{\pm}_{t,j,\hbar}(z,q){R^{\pm}_{t,j,\hbar}}^{*}(z,q-\hbar u)\right.$$

$$\left. e^{-iPz}T.F.(\phi)(-P,-X)dqdudzdPdX - T^{t}_{c,\pm}J^2_{\hbar}\beta^{\pm}_0\psi_{\hbar}(\phi)\right].$$

Integrando con respecto a X y P, se deduce que

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^{9}}\sum_{j=1}^{2} e^{iD_2S_t^{\pm}(z,q)u}R^{\pm}_{t,j,\hbar}(z,q){R^{\pm}_{t,j,\hbar}}^{*}(z,q-\hbar u)\phi(z,D_1S_t^{\pm}(z,q))dqdudz\right.$$

$$\left. -T^{t}_{c,\pm}J^2_{\hbar}\beta^{\pm}_0\psi_{\hbar}(\phi)\right].$$

Haciendo uso de la fórmula (2), se llega a la siguiente expresión

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^{9}}\sum_{j,r,s=1}^{2} e^{iD_2S_t^{\pm}(z,q)u}A^{\pm,r}_{t,j}(z,q)a^{\pm}_{r,\hbar}(T^{-t}_{1,q,\pm}(z),q)\right.$$

$$\left. A^{\pm,s*}_{t,j}(z,q)a^{\pm *}_{s,\hbar}(T^{-t}_{1,q,\pm}(z),q-\hbar u)\phi(z,D_1S_t^{\pm}(z,q))dqdudz - T^{t}_{c,\pm}J^2_{\hbar}\beta^{\pm}_0\psi_{\hbar}(\phi)\right],$$

y aplicando el Corolario 4.3 se obtiene

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^{9}}\sum_{r=1}^{2} e^{iD_2S_t^{\pm}(z,q)u}s^{\pm}_{t}(z,q)a^{\pm}_{r,\hbar}(T^{-t}_{1,q,\pm}(z),q)\right.$$

$$\left. a^{\pm *}_{r,\hbar}(T^{-t}_{1,q,\pm}(z),q-\hbar u)\phi(z,D_1S_t^{\pm}(z,q))dqdudz - T^{t}_{c,\pm}J^2_{\hbar}\beta^{\pm}_0\psi_{\hbar}(\phi)\right].$$

Si ahora se hace el cambio de variable $x=T^{-t}_{1,q,\pm}(z)$, y se aplica el Lema 2.5 se deduce que

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{\mathbb{R}^{9}}\sum_{r=1}^{2} e^{ixu}a^{\pm}_{r,\hbar}(x,q)a^{\pm *}_{r,\hbar}(x,q-\hbar u)\phi\circ T^{t}_{c,\pm}(x,q)dqdudx\right.$$

$$\left. -T^{t}_{c,\pm}J^2_{\hbar}\beta^{\pm}_0\psi_{\hbar}(\phi)\right].$$

Finalmente volviendo a la variable $\bar{q} = q - \hbar u$, integrando respecto $\bar{q}$, y haciendo uso del Lema 3.1, se ve, razonando como en [4], que

$$\lim_{\hbar\to 0}\left[\frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^6} e^{\frac{i}{\hbar}qx}(\psi^{\pm}_{\hbar}(x),\hat{\psi}^{\pm}_{\hbar}(q))_H\phi\circ T^t_{c,\pm}(x,q)dqdx - T^t_{c,\pm}J^2_{\hbar}\beta^{\pm}_0\psi_{\hbar}(\phi)\right] = 0.$$

Por tanto, acabamos de probar que para $|t|\leq\varepsilon$, se cumple

$$(*)\quad JT^t_q[\psi] = T^t_{c,+}J\pi^+[\psi] + T^t_{c,-}J\pi^-[\psi].$$

Para prolongar el resultado lo que haremos sera tomar $T^{\pm\varepsilon}_q[\psi]$ en $(\,*\,)$ en lugar de $[\psi]$, con lo cual, para $|t|\leq\varepsilon$ se obtiene

$$JT^{t\pm\varepsilon}_q[\psi] = JT^t_q T^{\pm\varepsilon}_q[\psi] = ((\,*\,)\text{ para }|t|\leq\varepsilon) = T^t_{c,+}J\pi^+[T^{\pm\varepsilon}_q\psi] + T^t_{c,-}J\pi^-[T^{\pm\varepsilon}_q\psi],$$

y como consecuencia del Corolario 4.7 se obtiene

$$\begin{aligned} JT^{t\pm\varepsilon}_q[\psi] &= T^t_{c,+}JT^{\pm\varepsilon}_q\pi^+[\psi] + T^t_{c,-}JT^{\pm\varepsilon}_q\pi^-[\psi] = ((\,*\,)\text{ para }|t|=\varepsilon)\\ &= T^{t\pm\varepsilon}_{c,+}J\pi^+[\psi] + T^{t\pm\varepsilon}_{c,-}J\pi^-[\psi]. \end{aligned}$$

Es decir, $\forall|t|\leq 2\varepsilon$ se satisface $(*)$. Continuando se llega al resultado deseado para todo tiempo finito. □

Agradecimientos. Este artículo está particalmente financiado por DGESIC (Spain), project PB98-0932-C02-01.

REFERENCIAS

[1] J. Chazarain - A. Piriou, *Introduction à la théorie des equations aux derivées partielles linéaires*; Gauthier-Villars, Paris (1981).

[2] J. Chazarain, *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique*; Comm. Partial Diff. Equat., **5**, no. 6 (1980), pp. 595–644.

[3] J. J. Duistermat, *Oscillatory Integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities*; Comm. Pure and Appl. Math., Vol. **27** (1974), pp. 207–281.

[4] J. Haro, *Estudio del Comportamiento de la Dinámica Cuántica cuando $\hbar\to 0$*; Rend. Sem. Mat. Univ. Pad., Vol. **111** (2004), pp. 25–54.

[5] J. Haro, *The Semiclassical Theory of Quantized Fields in Classical Electromagnetic Backgrounds*; Rev. Mex. Fis., **50** (2004), pp. 244–254.

[6] J. Haro, *Pair Production in an Uniform Electric Field*; Int. Jour. Theor. Phys. **42**, no. 3(2003), pp. 531–547.

[7] J. Haro, *El límit clàssic de la mecànica quàntica*; Tesi Doctoral, U.A.B. (1997).

[8] J. Harthong, *Études sur la mécanique quantique*; Asterisque, **111** (1984).
[9] B. Helffer, *Théorie spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques*; Asterisque **112** (1984).
[10] B. Helffer - D. Robert, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*; Ann. Inst.Fourier, **31** (1981), pp. 169-223.
[11] L. Hörmander, *Fourier Integral Operators I*; Acta Math., **127** (1971), pp. 79-183.
[12] V. P. Maslov - M. V. Fedoriuk, *Semi-classical aproximation in quantum mechanics*; D. Riedel Publishing Compay, Dordrecht, Holland (1981).
[13] A. Messiah, *Mécanique Quantique (tome II)*, Dunod Paris (1960).
[14] D. Robert, *Autour de l'approximation Semi-classique*; Progress in Mathematics, **68**, Birkhäuser (1987).

Manoscritto pervenuto in redazione il 12 luglio 2004