

Sur une question de Bergweiler (*).

CLAUDIO MENEGHINI (**)

ABSTRACT - We prove the density of repelling cycles in the Julia set of transcendental meromorphic functions in one complex variable, without using either Ahlfors' five islands theorem or Nevanlinna theory.

1. Introduction.

Dans [5] p. 161, Bergweiler posa la question s'il était possible de montrer la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia des fonctions méromorphes transcendentes à une variable complexe, sans utiliser le théorème des cinq îles d'Ahlfors: Bolsch (voir [4]) a montré que la réponse est oui, mais il fait appel au théorème des quatre valeurs complètement ramifiées.

On peut donc se poser la question si cette démonstration est encore possible sans invoquer la théorie de Nevanlinna

Le but de cette note-ci est de montrer que la réponse est encore oui. Tout d'abord, on utilisera, comme Bolsch, un théorème de Lehto sur la croissance de la dérivée sphérique d'une fonction méromorphe sur un disque épointé, ayant une singularité essentielle isolée au centre du disque (voir [7] th. 1). L'utilisation de ce théorème-là sera tout-à-fait différente: en effet cet énoncé sera combiné avec des techniques de renormalisation à la Zalcman (voir [8]) et d'autre type, à partir aussi d'un lemme métrique de M. Gromov (voir [6], p. 256).

Si la fonction f en considération a au moins deux poles où un pole qui n'est pas une valeur omise, alors la composition de f à la source avec une famille de contractions bien choisies nous permettra de construire une application holomorphe limite sur le plan épointé et d'appliquer aux objets ainsi obtenus un raisonnement semblable à [2] (voir aussi [3], p. 46) pour les

(*) AMS MSC: 37F25, 37F05

(**) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Parco Area delle Scienze, 53/A - 43100 Parma. e-mail: clamengh@bluemail.ch

applications rationnelles de \mathbb{P} . Cependant, on ne sera pas concerné avec une famille non normale d'applications, mais on envisagera la seule fonction f , au voisinage d'une singularité essentielle isolée.

Par contre, si f n'a que un pole qui *est* une valeur omise, alors la composition des itérées $f^{\circ n}$ à la source avec une bonne famille de contractions nous permettra de construire une application *entière* limite et d'invoquer, dans ce nouveau contexte, le raisonnement de [2], presque tel quel (voir aussi [3] p. 46).

2. Préliminaires.

Rappelons ici quelques définitions classiques: une fonction méromorphe f sur \mathbb{C} est dite *transcendante* si elle n'est pas une fraction rationnelle; (voir par exemple [5]): l'ensemble de Fatou \mathcal{F}_f de f est défini comme l'ensemble des points au voisinage desquels les itérées de f sont bien définies et forment une famille normale de fonctions holomorphes; l'ensemble de Julia \mathcal{J}_f est le complémentaire de \mathcal{F}_f .

La condition que les itérées $\{f^{\circ n}\}$ soient bien définies est généralement nécessaire: considérons par exemple une fonction avec au moins deux poles, ou bien un pole n'étant pas une valeur omise; l'orbite en arriere du point a l'infini est non vide, ce qui entraîne, grâce au théorème de Picard, qu'elle est un ensemble infini. Ainsi, l'ensemble des singularités essentielles de chaque $f^{\circ n}$ sera également infini. Notons que cela comporte, grâce au théorème de Montel, la normalité des itérées sur les ouverts où elles sont définies.

Au contraire, si f a un seul pole étant une valeur omise, alors les itérées sont toujours bien définies, mais la normalité n'est pas garantie: dans ce cas, la définition d'ensemble de Fatou et de Julia est semblable a celle du cas des fractions rationnelles (voir par exemple [5], p. 153-155).

Rappelons maintenant la notion de *distance sphérique* et la notion sous-jacente de *dérivée sphérique* d'une fonction méromorphe. La distance sphérique $\sigma(z, z')$ de deux points de la sphère de Riemann est définie comme la distance euclidéenne de leurs projections stéréographiques.

On voit aisément que $\sigma(z, z') = 2|z - z'| / \sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}$ si $z, z' \in \mathbb{C}$, et $\sigma(z, \infty) = 2 / \sqrt{1 + |z|^2}$.

Étant donnée une fonction méromorphe au voisinage de $z \in \mathbb{C}$, on définit sa *dérivée sphérique* en z comme

$$g^\sharp(z) := \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{\sigma(f(z), f(\zeta))}{\sigma(z, \zeta)}.$$

Cette limite existe et on a $g^\sharp = (1/g)^\sharp$, d'où l'utilité de cette notion dans le domaine des fonctions méromorphes; par exemple on sait, grâce au théorème de Marty, que la normalité d'une famille de fonctions méromorphes est équivalente au fait que la famille de leurs dérivées sphériques soit bornée.

Rappelons aussi les énoncés du théorème 1 de [7] et du lemme de Hurwitz (voir par exemple [3], p. 8):

THÉORÈME 1. *Soit $v \in \mathbb{C}$, \mathcal{W} un voisinage de v dans \mathbb{C} ; soit g une application holomorphe (à valeurs en \mathbb{P}) sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v et g^\sharp la dérivée sphérique de g . Alors $\limsup_{z \rightarrow v} |z - v| \cdot g^\sharp(z) \geq 1/2$.*

LEMME 2. *Soit Ω une région de \mathbb{C} et $\{h_n\}$ une suite d'applications holomorphes définies sur Ω et à valeurs en \mathbb{P} : si h_n converge uniformément sur tout compact de Ω vers une application holomorphe non constante $h : \Omega \rightarrow \mathbb{P}$ et celle-ci prend la valeur $a \in \mathbb{P}$, alors h_n prend aussi bien la valeur a pour tout n assez grand.*

Rappelons enfin qu'un *cycle* d'une fonction f est un point fixe de l'une de ses itérées $f^{\circ n}$, que son *multiplicateur* est la dérivée de $f^{\circ n}$ à ce point et que le cycle est *répulsif* si son multiplicateur est de module plus grand que 1.

Le lemme suivant est connu comme le *lemme de l'espace métrique* (voir [6], p. 256).

LEMME 3. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $M : X \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction localement bornée. Soit $\sigma > 0$: alors pour tout $u \in M^{-1}(0, +\infty)$ il existe $w \in X$ tel que: (i) $d(u, w) \leq [\sigma M(u)]^{-1}$; (ii) $M(w) \geq M(u)$ et (iii) $d(x, w) \leq [\sigma M(w)]^{-1} \Rightarrow M(x) \leq 2M(w)$.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que le lemme soit faux: alors il existe $u \in X$ tel que, pour tout $w \in X$, l'un au moins des énoncés (i), (ii) et (iii) est faux. En particulier, $v_0 := u$ doit violer la condition (iii). Donc on peut trouver $v_1 \in X$ tel que $M(v_1) > 2M(v_0)$ mais $d(v_1, v_0) \leq 1/\sigma M(v_0)$. Cela entraîne que (i) et (ii) sont vrais pour $w = v_1$ et, par conséquent, (iii) doit être faux pour $w = v_1$. Donc on peut trouver $v_2 \in X$ tel que $M(v_2) > 2M(v_1)$ mais $d(v_2, v_1) > [\sigma M(v_1)]^{-1}$, et donc $d(v_2, v_0) > \frac{1}{2}[\sigma M(v_0)]^{-1}$. Ceci entraîne que (i) et (ii) sont vrais pour $w = v_2$ et, par conséquent, (iii) doit être faux même pour $w = v_2$.

En continuant ce procédé, on peut construire, par induction, une suite $\{v_n\}$ telle que $v_0 = u$, $M(v_n) > 2M(v_{n-1}) > 2^n M(v_0)$ et $d(v_n, v_{n-1}) \leq$

$\leq 2^{1-n}[\sigma M(v_0)]^{-1}$. Cette suite-là est de Cauchy: en soit λ la valeur limite. On voit que M n'est pas bornée au voisinage de λ : c'est une contradiction. ■

Le lemme suivant renormalise (moyennant composition à la source avec des contractions bien choisies) une famille d'applications holomorphes (à valeurs dans la sphère de Riemann). La preuve ci-décrite peut se trouver en [1]; voir aussi [8].

LEMME 4. (Zalcman). *Si une famille $\mathcal{F} := \{f_a\}$ d'applications holomorphes sur \mathbb{D} , à valeurs en \mathbb{P} , n'est pas normale sur aucun voisinage de $v \in \mathbb{D}$, alors il existe des suites $v_n \rightarrow v$, $r_n \downarrow 0$, $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ et une application holomorphe non constante h sur \mathbb{C} , à valeurs en \mathbb{P} , telles que $f_n(v_n + r_n z)$ est bien défini – pour n assez grand – sur tout compact de \mathbb{C} et on y a, uniformément, $f_n(v_n + r_n z) \rightarrow h$.*

DÉMONSTRATION. Grâce à la non normalité à v , on peut trouver des suites $\xi_n \rightarrow v$ en \mathbb{D} et $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ telles que $f_n^\sharp(\xi_n) \geq n^3$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\{\xi_n\}$ soit contenu dans un sous-ensemble fermé X de \mathbb{D} .

Pour tout n , appliquons le lemme 3 à X avec la métrique euclidéenne, $M = f_n^\sharp$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 1/n$. Appelons (\circ) , $(\circ\circ)$ et $(\circ\circ\circ)$ les conséquences des énoncés (i), respectivement (ii) (iii) du lemme: on obtient $v_n \in X$ tel que: (\circ) $d(\xi_n, v_n) \leq 1/n^2$, $(\circ\circ)$ $f_n^\sharp(v_n) \geq n^3$ et $(\circ\circ\circ)$ $|x - v_n| \leq n[f_n^\sharp(v_n)]^{-1} \Rightarrow \Rightarrow f_n^\sharp(x) \leq 2f_n^\sharp(v_n)$.

Posons maintenant $r_n := [f_n^\sharp(v_n)]^{-1}$ et $h_n(w) := f_n(v_n + r_n w)$. Chaque h_n est bien défini sur $\mathbb{D}(0, n)$ car, grâce à (\circ) et $(\circ\circ)$ ci-dessus, $v_n \rightarrow v$ et $nr_n \leq 1/n^2$. La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à $(\circ\circ\circ)$ $(h_n)^\sharp \leq 2$ sur $\mathbb{D}(0, n)$: grâce au théorème d'Ascoli, on peut extraire de $\{h_n\}$ une sous-suite uniformément convergente, sur tout compact de \mathbb{C} , vers une fonction méromorphe limite h telle que $h^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(0) = 1$; cela prouve que h n'est pas constante. Finalement, par holomorphicité, $h^\sharp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(z) \leq 2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. ■

Le lemme suivant «renormalise» une application holomorphe (à valeurs dans la sphère de Riemann) au voisinage d'une singularité essentielle isolée.

LEMME 5. *Soient $v \in \mathbb{C}$, \mathcal{W} un voisinage fermé de v , g une application holomorphe, à valeurs en \mathbb{P} , sur $\mathcal{W} \setminus \{v\}$, ayant une singularité essentielle à v . Alors il existe des suites $v_n \rightarrow v$, $\{r_n\} \subset \mathbb{R}^+$, avec $r_n \rightarrow 0$, telles que*

$g(v_n + r_n z)$ est bien défini sur tout compact de \mathbb{D} et $g(v_n + r_n z)$ y converge vers une application holomorphe non constante $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}$.

DÉMONSTRATION. Soit a_n une suite de nombres réels positifs, avec $a_n \rightarrow 0$. Grâce au théorème 1, on peut trouver une suite $\{\xi_n\}$ en \mathcal{W} telle que $|\xi_n - v| = a_n$ et $g^\sharp(\xi_n) \geq [a_n]^{-1}$ pour n assez grand. Posons $X_n := \mathcal{W} \setminus \mathbb{D}(v, a_n/4)$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, appliquons le lemme 3 à X_n avec la métrique euclidéenne, $M = g^\sharp$, $u = \xi_n$ et $\sigma = 8$. Appelons (\diamond) , $(\diamond\diamond)$ et $(\diamond\diamond\diamond)$ les conséquences des énoncés (i), respectivement (ii) (iii) du lemme: cela fournit $v_n \in X_n$ tel que: (\diamond) $|\xi_n - v_n| \leq a_n/8$, $(\diamond\diamond)$ $g^\sharp(v_n) \geq [a_n]^{-1}$ et $(\diamond\diamond\diamond)$ $\{|x - v_n| \leq 1/(8g^\sharp(v_n))\} \Rightarrow g^\sharp(x) \leq 2g^\sharp(v_n)$.

Posons maintenant $r_n := [16g^\sharp(v_n)]^{-1}$ et $h_n(z) := g(v_n + r_n z)$. Grâce à (\diamond) et $(\diamond\diamond)$ ci-dessus, on a $|v_n - v| \leq |v_n - \xi_n| + |\xi_n - v| \leq \frac{9}{8}a_n$ et $|v_n - v| \geq |\xi_n - v| - |\xi_n - v_n| \geq \frac{7}{8}a_n$. Ainsi, $|v_n + r_n z - v| \leq (9/8 + |z|/16)a_n \leq 2a_n$ et $|v_n + r_n z - v| \geq (7/8 - |z|/16)a_n \geq \frac{1}{4}a_n$ ce qui entraîne que $v_n + r_n z \in X_n$ et que h_n est bien défini sur \mathbb{D} pour n assez grand. La famille $\{h_n\}$ est normale, car, grâce à $(\diamond\diamond\diamond)$ $h_n^\sharp \leq 1/8$ sur \mathbb{D} . Grâce au théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite uniformément convergente, sur tout compact de \mathbb{D} , vers une limite h telle que $h^\sharp(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(0) = 1/16$; cela prouve que h n'est pas constante; par holomorphie, $h^\sharp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n^\sharp(z) \leq 1/8$ pour tout $z \in \mathbb{D}$. ■

3. Le résultat principal.

Soient maintenant: f une fonction méromorphe non constante sur \mathbb{C} , ayant au moins deux poles, ou bien un pole qui n'est pas une valeur omise; \mathcal{F}_f et \mathcal{J}_f les ensembles de Fatou et Julia respectivement; \mathcal{C}_f^+ l'ensemble post-critique de f et \mathcal{E}_f son ensemble exceptionnel (voir encore [5], p. 156). Rappelons que \mathcal{C}_f^+ est défini comme l'orbite de l'ensemble critique de f : c'est un ensemble dénombrable. En outre, \mathcal{E}_f est l'ensemble des points $\zeta \in \mathbb{C}$ tels que $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\zeta)$ est un ensemble fini. Grâce aux théorèmes de Montel et de Picard, cet ensemble-ci peut contenir au plus deux points.

Par ailleurs, on n'a pas forcément $\mathcal{E}_f \subset \mathcal{F}_f$ pour les fonctions transcendentes.

THÉORÈME 6. *Les cycles répulsifs de f sont denses dans \mathcal{J}_f .*

DÉMONSTRATION. Rappelons que $\mathcal{J}_f = \overline{O^-(\infty)} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\infty)}$. C'est un ensemble parfait (voir [5] p. 154 et p. 161). Comme $\mathcal{C}_f^+ \cup \mathcal{E}_f$ est dénombrable, il suffit d'approcher tout point $p \in \mathcal{J}_f \setminus (\mathcal{C}_f^+ \cup \mathcal{E}_f) \cap f^{-\lambda}(\infty)$ $\lambda \in \mathbb{N}$.

LEMME 7. $\bigcup_{l=0}^{\lambda} f^{-l}(\infty)$ ne peut pas s'accumuler sur p .

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\{p_v\} \subset \bigcup_{l=0}^{\lambda} f^{-l}(\infty)$ telle que $p_v \rightarrow p$; on peut en extraire une sous-suite $q_v \rightarrow p$ telle que $\{q_v\} \subset f^{-n}(\infty)$, pour un $1 \leq n \leq \lambda$. Alors:

a) si $1 \leq n \leq \lambda - 1$, $f^{\circ n}$ est holomorphe à p , $f^{\circ n}(p) \in \mathbb{C}$ mais $f(q_v) \equiv \infty$ pour tout $v \in \mathbb{N}$: c'est une contradiction;

b) si $n = \lambda$, $f^{\circ n}$ a un pôle à p , $f^{\circ n}(p) = f(q_v) \equiv \infty$ pour tout $v \in \mathbb{N}$: ceci entraîne $f^{\circ n} \equiv \infty$, une contradiction. ■ (lemme 7)

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6. Donc, grâce au lemme 7, $f^{\circ \lambda+1}$ a une singularité essentielle isolée à p .

On peut alors appliquer le lemme 5 avec $g := f^{\circ \lambda+1}$, $v = p$ et trouver des suites $p_n \rightarrow p$ et $r_n \downarrow 0$ telles que $f^{\circ \lambda+1}(p_n + r_n z)$ converge uniformément sur tout compact (pour $n \rightarrow \infty$) de \mathbb{D} vers une application holomorphe non constante $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{P}$. Grâce au théorème de Picard, on peut choisir les $\{a_n\}$ du lemme 5 de façon telle que $\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi_n)$ existe et appartient à \mathcal{J}_f . Par ailleurs, on voit aisément que, suite à ce choix, $|(\xi_n - v_n)/r_n| \leq 1/8$ pour tout n , ainsi $\ell \in h(\mathbb{D})$.

Soit donc $U \subset \mathbb{D}$ un ouvert tel que $\ell \in h(U)$: alors, puisque $h(U)$ rencontre \mathcal{J}_f , on a $\bigcup_{q \geq 1} f^{\circ q}(h(U)) \supset \mathcal{J}_f \setminus \mathcal{E}_f$; ainsi, il existe $z_0 \in U$ et $\eta \in \mathbb{N}$ tels que $p = f^{\circ \eta} \circ h(z_0)$; on peut supposer, sans nuire à la généralité, $h(U) \subset \mathbb{C}$ et $h' \neq 0$ sur U .

Or, $f^{\circ \eta} \circ f^{\circ \lambda}(p_n + r_n z) - (p_n + r_n z)$ converge, après éventuelle extraction, vers $f^{\circ \eta} \circ h - p$, donc, le lemme de Hurwitz (lemme 2) nous passe une suite de points $\{z_n\} \rightarrow z_0$ telle que $f^{\circ \eta} \circ f^{\circ \lambda}(p_n + r_n z_n) = (p_n + r_n z_n)$: ainsi les points $q_n := p_n + r_n z_n$ forment une suite $q_n \rightarrow v$ de points périodiques de f . Ces points sont réulsifs (pour n assez grand), puisque on a, d'un côté,

$$r_n \cdot (f^{\circ \eta+\lambda})'(p_n + r_n z_n) \rightarrow [(f^{\circ \eta})'(h(z_0))] \cdot h'(z_0),$$

et de l'autre côté, $r_n \rightarrow 0$, $h'(z_0) \neq 0$ et $h(z_0)$ n'est pas un point critique de $f^{\circ \eta}$: en effet, $f^{\circ \eta} \circ h(z_0) = p \notin \mathcal{C}_f^+$. Cela conclut la démonstration. ■

Il reste à montrer le cas d'une fonction f méromorphe ayant un pôle à un point qui est une valeur omise par f : pour ce faire, nous adaptons la méthode de renormalisations des itérées dépeinte en [2]. Supposons, sans perte de généralité, que la singularité soit placée à 0. Alors les itérées $\{f^{\circ n}\}$ sont bien définies partout en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathcal{J}_f$ si et seulement si $\{f^{\circ n}\}$ n'est pas une famille normale au voisinage de p . On a encore:

THÉORÈME 8. *Les cycles répulsifs de f sont denses dans \mathcal{J}_f .*

DÉMONSTRATION. Appliquons le lemme 4 à la famille $\{f^{\circ n}\}$, avec $v = p$: cela fournit des suites $\{p_n\} \rightarrow p$ et $\{r_n\} \downarrow 0$ telles que $\{f^{\circ n}(p_n + r_n z)\}$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{C} vers une application holomorphe non constante $\tilde{h} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}$. Comme $\mathcal{C}_f^+ \cup \mathcal{E}_f$ est dénombrable, on peut supposer, sans nuire à la généralité, $p \in \mathcal{J}_f \setminus (\mathcal{C}_f^+ \cup \mathcal{E}_f)$.

Soit maintenant $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert tel que $\tilde{h}(U) \cap \mathcal{J}_f \neq \emptyset$; puisque $\bigcup_{q \geq 1} f^{\circ q}(h(U)) \supset \mathcal{J}_f \setminus \mathcal{E}_f$, il existe $z_0 \in U$ et $\eta \in \mathbb{N}$ tels que $p = f^{\circ \eta} \circ \tilde{h}(z_0)$; on peut supposer, sans nuire à la généralité, $\tilde{h}(U) \subset \mathbb{C}$ et $\tilde{h}' \neq 0$ sur U .

Or, $f^{\circ \eta} \circ f^{\circ n}(p_n + r_n z) - (p_n + r_n z)$ converge, après éventuelle extraction, vers $f^{\circ \eta} \circ \tilde{h} - p$, donc, le lemme de Hurwitz nous passe une suite de points $\{z_n\} \rightarrow z_0$ telle que $f^{\circ \eta} \circ f^{\circ n}(p_n + r_n z_n) = (p_n + r_n z_n)$: ainsi les points $q_n := p_n + r_n z_n$ forment une suite $q_n \rightarrow v$ de points périodiques de f . Ces points sont répulsifs comme au théorème 6. ■

Remerciement: l'auteur tient à remercier la referee pour beaucoup d'observations et suggestions qui ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

REFERENCES

- [1] F. BERTELOOT, *Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe*, preprint.
- [2] FRANÇOIS BERTELOOT - JULIEN DUVAL, *Une démonstration directe de la densité des cycles répulsifs dans l'ensemble de Julia*, Progress in Mathematics, vol. 188, Birkhäuser Verlag (2000), pp. 221–222.
- [3] FRANÇOIS BERTELOOT - VOLKER MAYER, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Société Mathématique de France, EDP Sciences, 2001.
- [4] A. BOLSCH, *Repulsive periodic points of meromorphic functions*, Complex Variables Theory Appl., 31 (1996), pp. 75–79.
- [5] WALTER BERGWEILER, *Iteration of meromorphic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 29 (1993), pp. 151–188.
- [6] M. GROMOV, *Foliated Plateau problem: part II: harmonic maps of foliations*, Geom. Func. Anal., 1 (1991), pp. 253–320.
- [7] OLLI LEHTO, *The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity*, Commentarii Mathematici Helvetici, 33 (1959), pp. 196–205.
- [8] L. ZALCMAN, *Normal Families: new perspectives*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 35 (1998), pp. 215–230.

