REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 114 (2005)

Comparaison des foncteurs duaux des isocristaux surconvergents

DANIEL CARO (*)

ABSTRACT - Let $\mathcal{V}$ be a mixed characteristic complete discrete valuation ring, $\mathfrak{X}$ a smooth formal scheme over $\mathcal{V}$, $\mathfrak{X}_K$ its generic fiber (as rigid analytic space), $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ the morphism of specialization, X its special fiber, Z a divisor in X and E an isocrystal on $X \setminus Z$ overconvergent along Z. We write $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ for the 'weak completion' of the sheaf of differential operators on $\mathfrak{X}$ with overconvergent singularities along Z. We prove the compatible with Frobenius isomorphism $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_*(E^{\vee}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathrm{sp}_*(E))$, where $E^{\vee}$ is the dual of E and $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}$ is the $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-linear dual.

Introduction.

Afin de construire une catégorie de coefficients p-adiques stables par les six opérations de Grothendieck, Berthelot a eu l'idée d'élaborer une théorie p-adique de la théorie algébrique des "coefficients de de Rham" en caractéristique 0, i.e., celle des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques (voir [Ber02]). D'autre part, Mebkhout et Narvaez ont entrepris l'étude des coefficients p-adiques ([MNM90]), par des méthodes voisines, reposant sur une sorte de complétion faible du faisceau des opérateurs différentiels sur les schémas faiblement formels, ces objets géométriques ayant été étudiés et développés par Meredith ([Mer72]). Dans le cas général, ces deux constructions ne sont pas comparables. Néanmoins, (lorsque le diviseur de Cartier est ample) Noot-Huyghe (voir [NH03]) a prouvé un très utile théorème de comparaison (nous nous en servirons par exemple dans [Carb]). Quoique

(*) Indirizzo dell'A.: Department of Mathematical Sciences, South Road, Durham DH1 3LE, United Kingdom; E-mail: daniel.caro@durham.ac.uk

L'auteur a bénéficié du soutien de l'Université de Sydney ainsi que de celui du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

ces deux constructions soient différentes, elles apparaissent complémentaires (cela sera techniquement mis en exergue dans [Carb]).

Cet article s'insère dans l'étude de la stabilité par cinq des six opérations de Grothendieck de l'holonomie ou de la surholonomie ([Cara]) des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques; nous allons expliquer pourquoi et comment.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0, p)$, $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse, X sa fibre spéciale et Z un diviseur de X, $\mathfrak{X}_K$ sa fibre générique (en tant qu'espace analytique rigide) et $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation (qui est un morphisme de sites annelés). Berthelot a construit (voir [Ber96, 4.2.5]) le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini, à singularités surconvergentes le long de* Z, qu'il note $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ (ou $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$). Celui-ci a spécialement été conçu afin d'interpréter en terme de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques la notion d'isocristaux surconvergents. En effet, Berthelot a prouvé que le foncteur sp_* induit un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des isocristaux sur $X \setminus Z$ surconvergent le long de Z dans celle des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents ([Ber96, 4.4.5 et 4.4.12]). Dans un prochain travail ([Carb]), nous établirons que certains complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques (par exemple surholonomes) se dévissent en isocristaux surconvergents, ce qui correspondra à l'analogue p-adique de la décomposition au dessus d'une stratification d'un faisceau constructible en faisceaux lisses. En d'autres termes, l'étude des propriétés de stabilité (notamment par produit tensoriel interne ou externe) de la surholonomie (et sans-doute de l'holonomie) devrait se ramener par dévissage à celle des isocristaux surconvergents. Or, via le théorème de monodromie génériquement fini ou étale de Tsuzuki ([Tsu02]), valable pour les F-isocristaux unités, on parvient, en pratiquant de la descente propre, génériquement finie et étale, à prouver la cohérence ([Car04a]), l'holonomie ([Car04c]) ou la surholonomie ([Cara]) de ces derniers. Les deux ingrédients techniques fondamentaux sont l'existence du morphisme trace de Virrion ([Vir04]) puis l'interprétation en terme de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques du dual d'un isocristal surconvergent. En effet, le foncteur dual permet d'obtenir une flèche en sens inverse de celle que l'on obtient via le morphisme trace (on prouve ensuite que la composée des deux flèches est génériquement un isomorphisme). Le but de cet article est de démontrer cette interprétation, i.e., pour tout isocristal E sur $X \setminus Z$, surconvergent le long de Z, la formule $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z} \circ \mathrm{sp}_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E^{\vee})$, où $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}$ désigne le dual $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-linéaire et $E^{\vee}$ et le dual de E. Enfin, pour obtenir la compatibilité à Frobenius de ce dernier, nous ajouterons à $\mathrm{sp}_*(E^{\vee})$ le twist $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}})$. Cela constitue un analogue p-adique de l'isomorphisme similaire en caractéristique nulle de Berthelot. Le lecteur trouvera une preuve de cette dernière dans l'appendice «Berthelot's comparison theorem on $\mathcal{O}_X$- vs. $\mathcal{D}_X$-linear duals» du livre d'André et Baldassarri [AB01].

Cet article est composé de deux parties:

Soient S un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma (resp. un $\mathcal{V}$-schéma formel dont $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition) muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent (resp. cohérent) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a)$, X un S-schéma lisse (resp. S-schéma formel lisse). Soit en outre une $\mathcal{O}_X$-algèbre, $\mathcal{B}_X$, munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module.

Dans la première partie de ce travail, nous généralisons d'abord la notion de m-PD-stratification en "remplaçant" le faisceau $\mathcal{O}_X$ par $\mathcal{B}_X$. De telles m-PD-stratifications seront dites *relatives à* $\mathcal{B}_X$. Cette extension apparaît naturellement dans la définition, sur la catégorie des $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$-modules, des bifoncteurs $- \otimes_{\mathcal{B}_X} -$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(-,-)$. Ceux-ci seront utilisés dans la preuve du résultat principal de cet article, i.e., la formule $\mathbb{D}_Z^\dagger \circ \mathrm{sp}_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E^\vee)$. Puis, nous décrivons, au moyen des m-PD-stratifications relatives à $\mathcal{B}_X$, l'extension des coefficients de l'anneau opérateurs différentiels, les images inverses et, lorsque X est un schéma, l'élévation du niveau par Frobenius. Nous vérifions enfin la commutation à Frobenius de certains foncteurs ou bifoncteurs, notamment $- \otimes_{\mathcal{B}_X} -$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(-,-)$.

Dans la deuxième partie, nous prouvons la $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéarité et la compatibilité à Frobenius de quelques isomorphismes canoniques, la plupart faisant exclusivement intervenir les bifoncteurs $- \otimes_{\mathcal{B}_X} -$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(-,-)$ (par exemple les isomorphismes de Cartan), voire $- \otimes_{\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}} -$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}}(-,-)$. Ces isomorphismes nous permettent ensuite d'établir la relation $\mathbb{D}_Z^\dagger \circ \mathrm{sp}_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E^\vee)$. Nous utilisons cet isomorphisme dans [Carc, 3.3.3] afin de vérifier que les complexes pseudo-cohérents dont les espaces de cohomologie sont associés à des isocristaux surconvergents satisfont la formule $L = P$. Enfin, afin d'obtenir la compatibilité à Frobenius de $\mathbb{D}_Z^\dagger \circ \mathrm{sp}_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E^\vee)$, on fait intervenir le twist $\mathbb{D}_Z^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$. En effet, l'isomorphisme canonique $\mathbb{D}_Z^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$ ne paraît pas compatible à Frobenius (voir la remarque 2.3.2). On établit alors que l'on dispose de l'isomorphisme $\mathbb{D}_Z^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_*(E^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Z^\dagger(\mathrm{sp}_*(E))$ compatible à Frobenius.

Ce travail est en grande partie issu de ma thèse. Je remercie B. Le Stum pour son soutien constant durant celle-ci et P. Berthelot pour le séminaire où la formule analogue en caractéristique 0 était utilisée et pour ses précisions concernant ce passage.

Conventions.

Soient D, D' deux anneaux (objets d'un topos). Nous dirons que E est un (D, D')-bimodule (resp. bimodule à gauche, resp. bimodule à droite) si E est muni de deux structures compatibles de D-module à gauche (resp. à gauche, resp. à droite) et D'-module à droite (resp. à gauche, resp. à droite). Si $D = D'$, nous dirons simplement D-bimodules (resp. bimodules à gauche, resp. à droite). Si cela n'est pas précisé, un D-module est un D-module à gauche. Enfin, si $\mathcal{E}$ est un faisceau en groupe, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ signifie $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

1. PD-stratifications de niveau m relatives à $\mathcal{B}_X$.

La lettre $\mathcal{V}$ désignera un anneau de valuations discrètes, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$ et de corps de fractions K de caractéristique 0.

1.1 – *Définitions.*

NOTATIONS 1.1.1. On désigne par m un entier positif. Soient S un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma (resp. un $\mathcal{V}$-schéma formel dont $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition) muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent (resp. cohérent) $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, a)$, X un S-schéma lisse (resp. S-schéma formel lisse), $\mathcal{I}$ l'idéal de l'immersion diagonale de X et d_X (ou d) la dimension de Krull de X. On rappelle que comme X est S-plat, la m-PD-structure de S s'étend à X.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux faisceaux d'anneaux. Si $*$ est l'un des symboles $\emptyset$, $+$, $-$, ou b, $D^*(\mathcal{A})$ désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules à gauche vérifiant les conditions correspondantes d'annulation des faisceaux de cohomologie. Lorsque l'on souhaitera préciser entre droite et gauche, on notera alors $D^*({}^g\mathcal{A})$ ou $D^*(\mathcal{A}^d)$. Conformément aux notations et définitions de [sga71, 4.8, 5.2], on désignera par $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$ (resp. $D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{A})$, $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A})$) la sous-catégorie pleine de $D(\mathcal{A})$ dont les objets sont les complexes à cohomologie cohérente et bornée (resp. les complexes de Tor-dimensions finies, les complexes parfaits). On notera $D_{(.,\,\mathrm{parf})}({}^*\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$ (resp. $D_{(.,\,\mathrm{tdf})}({}^*\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$) la sous catégorie pleine de $D({}^*\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$ formée des complexes parfaits à droite (resp. de Tor-dimension finie à droite). De même en mettant le point à droite et en remplaçant “droite” par “gauche” etc. Enfin, nous désignerons par $D^*_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $D^*(\mathcal{A})$ formée des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont $\mathcal{A}$-quasi-cohérents.

Remarque 1.1.2. Les liens qui existent entre ces catégories sont les suivants.

D'après [sga71, I.5.8.1], pour qu'un complexe soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit pseudo-cohérent (confère [sga71, I.2.15]) et localement de Tor-dimension finie. Or, si X est quasi-compact, un complexe est localement de Tor-dimension finie si et seulement s'il est de Tor-dimension finie. De plus, lorsque $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux cohérent, un complexe de $\mathcal{A}$-modules borné inférieurement est pseudo-cohérent si et seulement s'il est à cohomologie cohérente ([sga71, I.3.5]). Si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux cohérent et si X est quasi-compact, il en dérive $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A}) \cap D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{A})$.

Enfin, lorsque le faisceau $\mathcal{A}$ est de dimension cohomologique finie, il découle de [sga71, I.5.9] l'égalité $D_{\mathrm{qc}}(\mathcal{A}) = D_{\mathrm{qc,tdf}}(\mathcal{A})$. Si le faisceau $\mathcal{A}$ est un faisceau cohérent, de dimension cohomologique finie et si X est quasi-compact, on obtient la relation $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{A})$.

1.1.3. Maintenant, rappelons la construction (que nous étendrons) des opérateurs différentiels de niveau m. D'abord, signalons que pour une étude approfondie des PD-structures partielles de niveau m sur un idéal et des enveloppes à puissances divisées partielles, on renvoie à [Ber96, 1.3 et 1.4] ou à [LSQ97, 1.3]. Notons $\mathcal{P}_{X/S,(m)}$ l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m du couple $(\mathcal{O}_{X\times_S X}, \mathcal{I})$, et $\overline{\mathcal{I}}$ son m-PD-idéal canonique. On notera $\overline{\mathcal{I}}^{\{n\}}$ la filtration m-PD-adique associée puis $\mathcal{P}^n_{X/S,(m)} := \mathcal{P}_{X/S,(m)}/\overline{\mathcal{I}}^{\{n+1\}}$ *le faisceau des parties principales de niveau m et d'ordre n*. Ce faisceau à une description locale très simple. En effet, soient $t_1, \dots, t_d$ des coordonnées locales au voisinage U_x d'un point $x \in X$, $\partial_1, \dots, \partial_d$ les dérivations correspondantes et $\tau_i := 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$. On note aussi

$$\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} = \tau_1^{\{k_1\}} \cdots \tau_d^{\{k_d\}} \text{ et } \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} = \partial_1^{\langle k_1\rangle} \cdots \partial_d^{\langle k_d\rangle}. \tag{1.1.3.1}$$

Le faisceau $\mathcal{P}^n_{X/S,(m)}$ est alors un $\mathcal{O}_X$-module libre au dessus de U_x de base les $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ pour $\sum_i k_i \leq n$. De plus, les projections gauche et droite canoniques p_0 et $p_1 : X \times X \to X$ fournissent respectivement (confère [Ber96, 2.1.4]) deux homomorphismes d^n_0 et $d^n_1 : \mathcal{O}_X \to \mathcal{P}^n_{X/S,(m)}$, dont chacun munit $\mathcal{P}^n_{X/S,(m)}$ d'une structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre. La structure induite par d^n_0 (resp. d^n_1) est appelée structure *gauche* (resp. *droite*).

On définit ensuite le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre* $\leq n$ sur X relativement à S comme étant le dual $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure gauche du faisceau des parties principales $\mathcal{P}^n_{X/S,(m)}$:

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X/S,\,n} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{X/S,(m)}, \mathcal{O}_X).$$

Pour $n' \geq n$ variable, les surjections $\mathcal{P}^{n'}_{X/S,(m)} \to \mathcal{P}^{n}_{X/S,(m)}$ permettent de définir le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau* m en posant

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X/S} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{X/S,\,n}.$$

Par la suite, sauf indication express du contraire, le schéma de base S sera fixé, et nous omettrons alors d'écrire l'indice S dans les notations.

1.1.4. Dans la section [Ber96, 2.3], Berthelot définit les m-PD-stratifications et montre (confère [Ber96, 2.3.2]) qu'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{X/S}$-module à gauche prolongeant une structure de $\mathcal{O}_X$-module est équivalente à celle d'une m-PD-stratification.

Une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative $\mathcal{B}_X$ est munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche *compatible* à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre signifie que la structure de $\mathcal{O}_X$-module sous-jacente à la structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module est celle qu'induit la structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre, et que les isomorphismes $\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_n$: $\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$ de la m-PD-stratification correspondante sont des isomorphismes de $\mathcal{P}^n_{X(m)}$-algèbres.

1.1.5. Fixons $\mathcal{B}_X$ une $\mathcal{O}_X$-algèbre commutative munie d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre. Nous allons maintenant *généraliser* la notion de m-PD-stratification en “remplaçant” le faisceau $\mathcal{O}_X$ par $\mathcal{B}_X$.

On notera par la suite $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$ le faisceau de $\mathcal{P}^n_{X(m)}$-algèbre $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$. Le morphisme canonique $\tilde{d}^n_0 : \mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$ munit le faisceau $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$ d'une structure de $\mathcal{B}_X$-algèbre, que l'on appellera structure *gauche*. De plus, le morphisme de $\mathcal{B}_X$-algèbres

$$\tilde{d}^n_1 \ : \ \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \xrightarrow{\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_n} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$$

induit une deuxième structure de $\mathcal{B}_X$-algèbre sur $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$, que l'on appellera structure *droite*. Or, comme les $\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_n$ sont des isomorphismes de $\mathcal{P}^n_{X(m)}$-algèbres, on obtient le diagramme commutatif de gauche suivant qui implique le diagramme cocartésien de droite:

(1.1.5.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_X \arrow[r] & \mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \arrow[r, "\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_n", "\sim"'] & \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)} \\
\mathcal{O}_X \arrow[u] \arrow[r, "d^n_1"] & \mathcal{P}^n_{X(m)} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{P}^n_{X(m)}, \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \arrow[r, shift left, "d^n_0"] \arrow[r, shift right, "d^n_1"'] \arrow[d] & \mathcal{P}^n_{X/S(m)} \arrow[d] \\
\mathcal{B}_X \arrow[r, shift left, "\tilde{d}^n_0"] \arrow[r, shift right, "\tilde{d}^n_1"'] & \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)}.
\end{tikzcd}$$

1.1.6. Pour tout couple d'entiers positifs, n et n', le faisceau $\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ possède trois structures de $\mathcal{O}_X$-algèbres. La structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre de $\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ provenant de la structure gauche de $\mathcal{P}^{n}_{X(m)}$ sera appelée structure *gauche*, celle provenant de la structure "produit tensoriel" sera dénommée structure du *centre* et enfin celle découlant de la structure droite de $\mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ sera dite structure *droite*. On notera alors $d_0^{n,n'}$, $d_1^{n,n'}$, $d_2^{n,n'}$ les morphismes d'anneaux $\mathcal{O}_X \to \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ correspondants.

On notera $\delta^{n,n'}_{(m)} : \mathcal{P}^{n+n'}_{X(m)} \to \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ le morphisme défini dans [Ber96, 2.1.3]. Il résulte d'un calcul en coordonnées locales que ce morphisme est $\mathcal{O}_X$-linéaire pour les structures gauches et droites respectives, i.e., $\delta^{n,n'}_{(m)} \circ d_0^{n+n'} = d_0^{n,n'}$ et $\delta^{n,n'}_{(m)} \circ d_1^{n+n'} = d_2^{n,n'}$. On écrira aussi $q_0^{n,n'}$ et $q_1^{n,n'}$: $\mathcal{P}^{n+n'}_{X(m)} \to \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ les homomorphismes naturels définis en [Ber96, 2.3.1]. Le morphisme $q_0^{n,n'}$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure gauche (resp. droite) de $\mathcal{P}^{n+n'}_{X(m)}$ et la structure gauche (resp. du centre) de $\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$. Enfin, le morphisme $q_1^{n,n'}$ est $\mathcal{O}_X$-linéaire pour la structure gauche (resp. droite) de $\mathcal{P}^{n+n'}_{X(m)}$ et la structure du centre (resp. droite) de $\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$.

1.1.7. Le faisceau $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)})$ se calcule en prenant, pour le produit tensoriel de gauche, la structure gauche de $\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ et, pour celui de droite, la structure droite de $\mathcal{P}^{n}_{X(m)}$ et la structure gauche de $\mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$.

De même, munissons $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)})$ de trois structures canoniques de $\mathcal{B}_X$-algèbres. D'abord, la structure *gauche* est induite par le morphisme canonique $\tilde{d}_0^{n,n'} : \mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$. Ensuite, la structure *droite* se construit de la manière suivante:

$$\tilde{d}_2^{n,n'} : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \xrightarrow{\delta^{n,n'*}_{(m)}(\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_{n+n'})} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}. \tag{1.1.7.1}$$

Enfin, on définit la structure du *centre* via le morphisme de $\mathcal{B}_X$-algèbres

$$\tilde{d}_1^{n,n'} : \mathcal{B}_X \to \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)} \xrightarrow{q_0^{n,n'*}(\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_{n+n'})} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}.$$

1.1.8. On a $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{P}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n}_{X(m)}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$. Or, grâce au diagramme de gauche de 1.1.5.1, le faisceau $(\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n}_{X(m)}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$ se calcule via la structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre de $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n}_{X(m)}$ induite par sa structure droite de $\mathcal{B}_X$-algèbre. Il en découle l'isomorphisme $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}$ (pour calculer le terme de droite, on utilise la structure droite de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$ et la structure gauche de $\widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}$). On munit $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}$, de manière analogue à $(\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)})$, de structures gauche, du centre et droite de $\mathcal{B}_X$-algèbres.

1.1.9. L'isomorphisme $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}$ est un morphisme de $\mathcal{B}_X$-algèbres pour les structures de gauche, du centre et de droite respectives. Par exemple, vérifions-le pour celle de droite. Dans le diagramme commutatif suivant,

(1.1.9.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{P}^{n'} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B} \arrow[r, "\varepsilon^{\mathcal{B}}_{n'}", "\sim"'] \arrow[d] & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P}^{n'} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P}^n) \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P}^{n'}) \\
\mathcal{B} \arrow[r] & \mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P}^{n'} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B} \arrow[r, "Id\otimes\varepsilon^{\mathcal{B}}_{n'}", "\sim"'] & \mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P}^{n'} \arrow[r, "\sim"'] & (\mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P}^{n'}), \arrow[u, "\varepsilon^{\mathcal{B}}_n \otimes Id", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

où l'on a omis d'inscrire les indices "X" ou "$X(m)$", celle de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}$ provient du morphisme composé du haut. Grâce à la condition de cocycle ([Ber96, 2.3.1.1]) (en remarquant que $Id \otimes \varepsilon^{\mathcal{B}}_{n'} = q_1^{n,n'*}(\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_{n+n'})$ et $\varepsilon^{\mathcal{B}}_n \otimes Id = = q_0^{n,n'*}(\varepsilon^{\mathcal{B}_X}_{n+n'})$), $\tilde{d}_2^{n,n'}$ correspond au chemin de 1.1.9.1 passant par le bas. D'où le résultat.

En outre, ces structures gauche, du centre et droite sont compatibles avec celles définies sur $\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$, i.e., on a le diagramme suivant canonique cocartésien

(1.1.9.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & \mathcal{P}^n_{X/S(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X/S(m)} \arrow[d] \\
\mathcal{B}_X \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X/S(m)},
\end{tikzcd}$$

où les triples flèches du haut (resp. du bas) désignent les morphismes $d_0^{n,n'}$, $d_1^{n,n'}$, $d_2^{n,n'}$ (resp. avec des tildes).

1.1.10. On introduit les homomorphismes de $\mathcal{B}_X$-algèbres suivants

$$\widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)} : \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \xrightarrow{\mathcal{B}_X\otimes\delta^{n,n'}_{(m)}} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} ,$$

$$\widetilde{q_0}^{n,n'} : \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)},$$

$$\widetilde{q_1}^{n,n'} : \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}.$$

On bénéficie du diagramme canonique cocartésien:

(1.1.10.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}^{n+n'}_{X/S(m)} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & \mathcal{P}^{n}_{X/S(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X/S(m)} \arrow[d] \\ \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X/S(m)} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X/S(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X/S(m)}, \end{tikzcd}$$

où les triples flèches du haut (resp. du bas) désignent les morphismes $q_0^{n,n'}$, $q_1^{n,n'}$, $\delta^{n,n'}_{(m)}$ (resp. avec des tildes). En outre, ces homomorphismes vérifient les propriétés analogues énoncées ci-dessus sans les tildes. Par exemple, le morphisme $\widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)}$ est $\mathcal{B}_X$-linéaire pour les structures droites respectives. En effet, cela résulte par construction de 1.1.7.1.

Enfin, on dispose du diagramme commutatif

(1.1.10.2)
$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'+n''}_{X(m)} \arrow[r, "\widetilde{\delta}^{n+n',n''}_{(m)}"] \arrow[d, "\widetilde{\delta}^{n,n'+n''}_{(m)}"] & \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n''}_{X(m)} \arrow[d, "\widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)} \otimes Id"] \\ \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'+n''}_{X(m)} \arrow[r, "Id\otimes\widetilde{\delta}^{n',n''}_{(m)}"] & \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n''}_{X(m)}. \end{tikzcd}$$

En effet, le diagramme analogue où l'on a remplacé "$\widetilde{\mathcal{P}}_{X(m)}$" (resp. "$\widetilde{\delta}_{(m)}$") par "$\mathcal{P}_X$" (resp. "$\delta$" : notation standard de [Ber96, 2.1.3]) est commutatif. Puis, par construction des m-PD-morphismes de la forme $\delta^{n,n'}_{(m)}$ (voir [Ber96, 2.1.3]), on en déduit la commutativité de 1.1.10.2. Pour finir, on remarque que le diagramme analogue à 1.1.10.2, avec "$\widetilde{\delta}_{(m)}$" remplacé par "$\widetilde{q}_0$" (resp. "$\widetilde{q}_1$"), n'est pas commutatif.

1.1.11. On notera $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n} := \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)}, \mathcal{B}_X)$ le dual $\mathcal{B}_X$-linéaire pour la structure gauche de $\widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)}$. Pour $n' \geq n$, les surjections $\widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \to \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)}$ (car le foncteur $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} -$ est exact à droite) fournissent des injections

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n} \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n'}.$$

On munit le faisceau $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X} := \cup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n}$ d'une structure d'anneau grâce aux accouplements

(1.1.11.1)
$$\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n} \times \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n'} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n+n'}$$

définis comme suit : si $\widetilde{P} \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n}$, $\widetilde{P}' \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n'}$, alors $\widetilde{P} \cdot \widetilde{P}'$ est l'homomorphisme composé

(1.1.11.2)
$$\widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \xrightarrow{\widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)}} \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \xrightarrow{Id\otimes\widetilde{P}'} \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \xrightarrow{\widetilde{P}} \mathcal{B}_X.$$

Cette loi de composition est bien *associative* : cela se vérifie par un calcul (en utilisant le diagramme commutatif 1.1.10.2).

1.1.12. Dans [Ber96, 2.3.5], Berthelot munit le faisceau $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ d'une structure de $\mathcal{B}_X$-algèbre en définissant le produit $P'' := P \cdot P'$ de $P \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{X(m)}, \mathcal{B}_X)$ et de $P' \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^{n'}_{X(m)}, \mathcal{B}_X)$ comme le composé

$$\mathcal{P}^{n+n'}_{X(m)} \xrightarrow{\delta^{n,n'}_{(m)}} \mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)} \xrightarrow{Id \otimes P'} \mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \xrightarrow{\varepsilon_n^{\mathcal{B}_X}} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)} \xrightarrow{Id\otimes P}$$
$$\xrightarrow{Id\otimes P} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \xrightarrow{\mu} \mathcal{B}_X,$$

où μ est la multiplication canonique de $\mathcal{B}_X$.

Des isomorphismes canoniques de $\mathcal{B}_X$-algèbres

$$\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X,n} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{X(m)}, \mathcal{B}_X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}, \mathcal{B}_X) = \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X,n}, \tag{1.1.12.1}$$

il s'en suit le suivant $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$. La proposition qui suit nous dit que ces deux structures de $\mathcal{B}_X$-algèbre sont compatibles.

Proposition 1.1.13. *L'isomorphisme canonique $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$, où le terme de droite (resp. de gauche) est muni de la structure de $\mathcal{B}_X$-algèbre de* 1.1.12 *(resp.* 1.1.11*), est un isomorphisme de $\mathcal{B}_X$-algèbres.*

Preuve. Notons $\theta := \varepsilon_n^{\mathcal{B}_X} \circ (Id \otimes P') \circ \delta^{n,n'}_{(m)}$ et $\tilde{\theta}$ le morphisme $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n+n'}_{X(m)} \to \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$ déduit par extension de θ. Avec les notations de 1.1.12, notons de plus $\widetilde{P}$ (resp. $\widetilde{P}'$, $\widetilde{P}''$) l'opérateur de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}, \mathcal{B}_X)$ (resp. $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}, \mathcal{B}_X)$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)}, \mathcal{B}_X)$) associé à P (resp. P', P'') via les isomorphismes 1.1.12.1. Comme $\widetilde{P} = \mu \circ (Id \otimes P)$, l'opérateur $\widetilde{P}''$ est le composé

$$\widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \xrightarrow{\tilde{\theta}} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \xrightarrow{\widetilde{P}} \mathcal{B}_X.$$

D'après 1.1.11.2, il suffit de prouver l'égalité $\tilde{\theta} = (Id \otimes \widetilde{P}') \circ \widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)}$. Pour cela, vérifions-le localement: on suppose X muni de coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ et on note alors $\partial_1, \ldots, \partial_d$ les dérivations correspondantes et $\tau_i = 1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$. Pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, on note $|\underline{k}| = \sum k_i$. Il résulte alors de [Ber96, 2.1.3.1] la formule

$$\delta^{n,n'}_{(m)}(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}) = (\underline{\tau} \otimes 1 + 1 \otimes \underline{\tau})^{\{\underline{k}\}} = \sum_{|\underline{k}'| \leq n, |\underline{k}''| \leq n', \underline{k}' + \underline{k}'' = \underline{k}} \left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \underline{\tau}^{\{\underline{k}'\}} \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}}.$$

Comme $\varepsilon_n^{\mathcal{B}_X}$ est un morphisme de $\mathcal{P}^n_{X(m)}$-algèbres,

$$\varepsilon_n^{\mathcal{B}_X} \circ (Id \otimes P')(\underline{\tau}^{\{\underline{k}'\}} \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}}) = \varepsilon_n^{\mathcal{B}_X}(\underline{\tau}^{\{\underline{k}'\}} \otimes P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}})) =$$
$$= (1 \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}'\}}) \times \varepsilon_n^{\mathcal{B}_X}(1 \otimes P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}})).$$

On obtient ainsi:

$$\tilde{\theta}(1 \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}) = \sum_{|\underline{k}'|\leq n, |\underline{k}''|\leq n', \underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle (1 \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}'\}}) \times \varepsilon_n^{\mathcal{B}_X}(1 \otimes P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}})).$$

D'un autre côté, en posant, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $\widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}\}} := 1 \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$,

$$\widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)}(\widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}\}}) = \sum_{|\underline{k}'|\leq n, |\underline{k}''|\leq n', \underline{k}'+\underline{k}''=\underline{k}} \left\langle \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{k}' \end{matrix} \right\rangle \widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}'\}} \otimes \widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}''\}}.$$

On a la relation

$$(Id \otimes \widetilde{P}')(\widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}'\}} \otimes \widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}''\}}) = \widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}'\}} \cdot P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}}),$$

le terme $P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}})$ agissant sur $\widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}'\}}$ pour la structure droite de $\mathcal{B}_X$-module de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$. Par définition, on a alors

$$\widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}'\}} \cdot P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}}) = \widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}'\}} \times \varepsilon_n^{\mathcal{B}_X}(1 \otimes P'(\underline{\tau}^{\{\underline{k}''\}})).$$

Il en résulte par linéarité la formule $\tilde{\theta} = (Id \otimes \widetilde{P}') \circ \widetilde{\delta}^{n,n'}_{(m)}$. □

NOTATIONS 1.1.14. Si $t_1, \ldots, t_d$, sont des coordonnées locales au voisinage d'un point $x \in X$, $\partial_1, \ldots, \partial_d$ les dérivations correspondantes, par abus de notation, on notera (confère 1.1.3.1) $\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}$ (resp. $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}$) à la place de $\widetilde{\underline{\tau}}^{\{\underline{k}\}}$ (resp. $\widetilde{\underline{\partial}}^{\langle \underline{k}\rangle}$).

DÉFINITION 1.1.15. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{B}_X$-module. Une *m-PD-stratification* (ou *PD-stratification de niveau m*) $\tilde{\varepsilon}$ sur $\mathcal{E}$ *relativement à* $(S, \mathcal{B}_X)$ (ou *relativement à* $\mathcal{B}_X$ si le schéma de base ne fait aucun doute) est la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$-linéaires

$$\tilde{\varepsilon}_n \ : \ \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)},$$

où les produits tensoriels sont respectivement pris pour les structures droite et gauche de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$, ces isomorphismes étant astreints aux conditions suivantes:

i) $\tilde{\varepsilon}_0 = Id_{\mathcal{E}}$;

ii) La condition de cocycle est validée, i.e., pour tous n, n', le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \otimes \mathcal{E} \arrow[rr, "\widetilde{\delta}^{n,n'*}_{(m)}(\widetilde{\varepsilon}_{n+n'})", "\sim"'] \arrow[dr, "\widetilde{q}^{n,n'*}_{1}(\widetilde{\varepsilon}_{n+n'})", "\sim"'] & & \mathcal{E} \otimes \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \\
& \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes \mathcal{E} \otimes \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \arrow[ur, "\widetilde{q}^{n,n'*}_{0}(\widetilde{\varepsilon}_{n+n'})", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 1.1.16. *Soit $\mathcal{B}'_X$ une $\mathcal{B}_X$-algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche telle que $\mathcal{B}_X \to \mathcal{B}'_X$ soit $\mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire. Pour tout $\mathcal{B}'_X$-module $\mathcal{E}$, il y a équivalence entre les données suivantes:*

a) *Une structure de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche sur $\mathcal{E}$ prolongeant sa structure canonique de $\mathcal{B}'_X$-module;*

b) *Une m-PD-stratification $\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}} = (\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n)$ sur $\mathcal{E}$ relative à $\mathcal{B}'_X$.*

Notons alors $(\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}'_X}_n)$ la m-PD-stratification relative à $\mathcal{B}_X$ de $\mathcal{B}'_X$. Les données a) *et* b) *sont équivalentes à la suivante :*

c) *Une m-PD-stratification $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}} = (\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n)$ sur $\mathcal{E}$ relative à $\mathcal{B}_X$ dont les isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n$ sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}'_X}_n$;*

De plus, un homomorphisme $\mathcal{B}'_X$-linéaire $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ entre deux $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à gauche est $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire si et seulement s'il commute aux isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n$ (resp. $\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n$). Le morphisme sera dit horizontal.

Enfin, en coordonnées locales, pour toute section x de $\mathcal{E}$, on a la formule:

$$\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n(1 \otimes x) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} x \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}}. \tag{1.1.16.1}$$

Preuve. Notons $\widetilde{\mathcal{P}}^n := \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}'^n := \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$. On prouve l'équivalence entre *a*) et *c*), en calquant la démonstration de [Ber96, 2.3.2]. De plus, l'équivalence entre *b*) et *c*) est aisée : on définit une bijection entre les données $(\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n)$ et $(\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n)$ via le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{P}}'^n \otimes_{\mathcal{B}'_X} \mathcal{E} \arrow[r, "(\widetilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}'_X}_n)^{-1} \otimes Id", "\sim"'] \arrow[d, "\widetilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n", "\sim"'] & (\widetilde{\mathcal{P}}^n \underset{\mathcal{B}_X}{\otimes} \mathcal{B}'_X) \otimes_{\mathcal{B}'_X} \mathcal{E} \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{\mathcal{P}}^n \underset{\mathcal{B}_X}{\otimes} \mathcal{E} \arrow[d, "\widetilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n", "\sim"'] \\
\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}'_X} \widetilde{\mathcal{P}}'^n \arrow[rr, "\sim"'] & & \mathcal{E} \underset{\mathcal{B}_X}{\otimes} \widetilde{\mathcal{P}}^n .
\end{tikzcd} \tag{1.1.16.2}$$

De plus, on vérifie par fonctorialité en $\mathcal{E}$ de 1.1.16.2, qu'un morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à gauche commute aux isomorphismes de la forme $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n$ si et seulement s'il commute à ceux de la forme $\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n$. En outre, en procédant comme pour [Ber96, 2.3.2], on établit d'abord que $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire si et seulement s'il commute aux stratifications $\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{E}}_n$, puis la formule 1.1.16.1. □

Remarque 1.1.17. Avec les notations de 1.1.16 et de sa preuve, si $\mathcal{E} = \mathcal{B}'_X$, alors, via le diagramme 1.1.16.2 (en prenant aussi $\mathcal{B}_X = \mathcal{O}_X$), les isomorphismes de la m-PD-stratification relative à $\mathcal{O}_X$, notés $\varepsilon^{\mathcal{B}'_X}_n$, sont des isomorphismes de $\mathcal{P}^n_{X(m)}$-algèbres si et seulement si les $\tilde{\varepsilon}'^{\mathcal{B}'_X}_n$ sont des isomorphismes de $\widetilde{\mathcal{P}}'^n$-algèbres, si et seulement si les $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}'_X}_n$ sont des isomorphismes de $\widetilde{\mathcal{P}}^n$-algèbres. Si on définit la notion de $\mathcal{B}_X$-*algèbres compatibles à sa structure de* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-*module* en demandant que les isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}'_X}_n$ soient des isomorphismes de $\widetilde{\mathcal{P}}^n$-algèbres, cela revient à réclamer que la structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre soit compatible à sa structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module (définition [Ber96, 2.3.4]).

Proposition 1.1.18. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-modules à gauche.*

(i) *Il existe sur le produit tensoriel $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{F}$ une unique structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module à gauche fonctorielle en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ telle que, pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$, et tous $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $x \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, $y \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, on ait*

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}(x \otimes y) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle} x \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{i} \rangle} y. \tag{1.1.18.1}$$

(ii) *Il existe sur le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ une unique structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module à gauche fonctorielle en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ telle que, pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert $U \subset X$, et tous $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $x \in \Gamma(U, \mathcal{E})$, $\phi : \mathcal{E}_{|U} \to \mathcal{F}_{|U}$, on ait*

$$(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \phi)(x) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{i} \rangle} (\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle} x)). \tag{1.1.18.2}$$

(iii) *Si la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module à gauche de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$) se prolonge en une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-bimodule alors la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module à gauche de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{F}$ se prolonge en une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-bimodule. La structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module à gauche est la structure produit tensoriel. De même, le faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est muni d'une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-bimodule (resp. $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-bimodule à gauche). La structure gauche est la* *structure interne. On a des résultats analogues lorsque $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{F}$ sont des bimodules à gauche.*

Preuve. On munit le faisceau $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{F}$ de la m-PD stratification relative à $\mathcal{B}_X$: $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}} := \tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}} \otimes \tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{F}}$. En utilisant la formule 1.1.16.1, on vérifie la formule 1.1.18.1.

De même, modulo les isomorphismes canoniques (pour les deux structures de $\mathcal{B}_X$-algèbres de $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}$)

$$\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{F}),$$

on munit $\mathcal{G} := \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ d'une m-PD-structure relative à $\mathcal{B}_X$ en posant $\varepsilon_n^{\mathcal{G}} = \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}}((\varepsilon_n^{\mathcal{E}})^{-1}, \varepsilon_n^{\mathcal{F}})$. On vérifie alors la formule 1.1.18.2 au moyen de 1.1.16.1.

La fonctorialité en $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de ces structures de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules résulte par exemple des formules 1.1.18.1 et 1.1.18.2. Il découle de cette fonctorialité que la partie iii) est exacte (on peut aussi le prouver directement via les formules 1.1.18.1 et 1.1.18.2). □

Remarque 1.1.19. La remarque [Car04b, 1.2.19] se généralise: soit $f : X \to Y$ un morphisme de S-schémas lisses (resp. $\mathcal{V}$-schémas formels lisses). De manière analogue à 1.1.15, on définit sur un $f^{-1}\mathcal{B}_Y$-module $\mathcal{E}$ une m-PD-stratification comme étant la donnée d'une famille compatible d'isomorphismes $f^{-1}\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y(m)}$-linéaires

$$\varepsilon_n^{\mathcal{E}} \ : \ f^{-1}\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y(m)} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}_Y} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}_Y} f^{-1}\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y(m)}$$

vérifiant deux conditions analogues à 1.1.15. Comme pour 1.1.16, si $\mathcal{E}$ est un $f^{-1}\mathcal{B}_Y$-module, il y a alors équivalence entre la donnée d'une structure de $f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_Y^{(m)}$-module à gauche prolongeant sa structure de $f^{-1}\mathcal{B}_Y$-module et la donnée d'une m-PD-stratification. De plus, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux $f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_Y^{(m)}$-modules à gauche, on munit le produit tensoriel $\mathcal{E} \otimes_{f^{-1}\mathcal{B}_Y} \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{H}om_{f^{-1}\mathcal{B}_Y}(\mathcal{E},\mathcal{F})$) d'une structure de $f^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_Y^{(m)}$-module à gauche en prenant la stratification $\varepsilon_n^{\mathcal{E}} \otimes_{f^{-1}\tilde{\mathcal{P}}^n_{Y(m)}} \varepsilon_n^{\mathcal{F}}$ (resp. $\mathcal{H}om_{f^{-1}\tilde{\mathcal{P}}^n_{Y(m)}}((\varepsilon_n^{\mathcal{E}})^{-1}, \varepsilon_n^{\mathcal{F}})$).

Remarque 1.1.20. Les structures de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules définies dans le corollaire ci-dessus, ne dépendent pas du niveau m choisi. Précisons ce que cela signifie. Donnons-nous $m' \leq m$ un couple d'entiers positifs et notons alors $oub_{m',m}$ le foncteur oubli de la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules vers celle des $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m')}$-modules. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules, on a alors les égalités

$$oub_{m',m}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{F}) = oub_{m',m}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{B}_X} oub_{m',m}(\mathcal{F})$$
$$\text{et } oub_{m',m}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(oub_{m',m}\mathcal{E}, oub_{m',m}\mathcal{F}).$$

En effet, cela résulte des formules 1.1.18.1 et 1.1.18.2, ainsi que de la relation [Ber96, 2.2.3.1].

1.1.21. Si $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux, pour tout $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{B}$-module $\mathcal{N}$), on notera $\phi^\flat(\mathcal{M}) := \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}, \mathcal{M})$ (resp. $\phi_*(\mathcal{N})$ désigne $\mathcal{N}$ vu comme $\mathcal{A}$-module). La convention est de travailler dans les catégories dérivées mais les foncteurs de la forme $\phi^\flat$ que nous utiliseront seront exacts.

De manière analogue à [Ber00, 1.1], on définit les m-PD-*costratifications relativement à* $\mathcal{B}_X$ sur un $\mathcal{B}_X$-module $\mathcal{M}$.

DÉFINITION 1.2.22. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{B}_X$-module. Une m-PD-*costratification sur* $\mathcal{M}$ *relativement* à $(S, \mathcal{B}_X)$ (ou $\mathcal{B}_X$ si le schéma de base S ne prête pas à confusion) est la donnée d'une famille *compatible* d'isomorphismes $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X,(m)}$-linéaires

$$\tilde{\varepsilon}_n : \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{d}^n_{0*}\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}) \tilde{\to} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{d}^n_{1*}\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X,(m)}, \mathcal{M}),$$

ceux-ci vérifiant les conditions suivantes:

1) $\tilde{\varepsilon}_0 = Id_{\mathcal{M}}$;
2) Pour tous n, n', le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{d}^{n,n'}_{0*}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}), \mathcal{M}) \arrow[rr, "\tilde{\delta}^{n,n'\flat}_{(m)}(\tilde{\varepsilon}_{n+n'})", "\sim"'] \arrow[dr, "\tilde{q}^{n,n'\flat}_0(\tilde{\varepsilon}_{n+n'})", "\sim"'] & & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{d}^{n,n'}_{2*}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}), \mathcal{M}) \\
& \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{d}^{n,n'}_{1*}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)}), \mathcal{M}) \arrow[ur, "\tilde{q}^{n,n'\flat}_1(\tilde{\varepsilon}_{n+n'})", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

(1.1.22.1)

est commutatif.

PROPOSITION 1.1.23. *Soit* $\mathcal{B}'_X$ *une* $\mathcal{B}_X$*-algèbre commutative munie d'une structure compatible de* $\mathcal{D}^{(m)}_X$*-module à gauche telle que* $\mathcal{B}_X \to \mathcal{B}'_X$ *soit* $\mathcal{D}^{(m)}_X$*-linéaire. Pour tout* $\mathcal{B}'_X$*-module* $\mathcal{M}$*, il y a équivalence entre les données suivantes:*

a) *Une structure de* $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$*-module à droite sur* $\mathcal{M}$ *prolongeant sa structure de* $\mathcal{B}'_X$*-module;*

b) *Une m-PD-costratification* $(\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}})$ *relativement à* $\mathcal{B}_X$ *sur* $\mathcal{M}$ *telle que les isomorphismes* $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}}$ *soient semi-linéaires par rapport à* $(\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'_X})^{-1}$;

c) *Une m-PD-costratification* $(\tilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{M}})$ *relativement à* $\mathcal{B}'_X$ *sur* $\mathcal{M}$.

Un homomorphisme $\mathcal{B}'_X$*-linéaire entre deux* $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$*-modules à droite est* $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$*-linéaire si et seulement s'il commute aux isomorphismes* $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}}$ *(resp.* $\tilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{M}}$*).*

Preuve. Notons $\widetilde{\mathcal{P}}^n := \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(\underline{m})}$, $\widetilde{\mathcal{P}}'^n := \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)}$, $\tilde{d}'^n_{0*}$ et $\tilde{d}'^n_{1*}$ les structures gauches et droites de $\mathcal{P}'^n$.

L'équivalence entre *a*) et *c*) se prouve de manière identique à celle de [Ber00, 1.1.4]. Pour celle entre *b*) et *c*), cela dérive de la correspondance entre les deux m-PD-costratifications $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{M}}$, qui se lit via le diagramme commutatif suivant:

(1.1.23.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\tilde{d}^n_{0*}\widetilde{\mathcal{P}}^n, \mathcal{M}) \arrow[rr, "\sim"'] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}}", "\sim"'] & & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\tilde{d}'^n_{0*}\widetilde{\mathcal{P}}'^n, \mathcal{M}) \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{M}}", "\sim"'] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\tilde{d}^n_{1*}\widetilde{\mathcal{P}}^n, \mathcal{M}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\widetilde{\mathcal{P}}^n \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}', \mathcal{M}) \arrow[r, "\mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'-1}, \mathcal{M})", "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\tilde{d}'^n_{1*}\widetilde{\mathcal{P}}'^n, \mathcal{M}),
\end{tikzcd}$$

où l'on a omis d'indiquer les indices "X" ou "$X,\ (m)$".

En outre, en calquant [Ber00, 1.1.4], on obtient la deuxième partie de la proposition. □

Proposition 1.1.24. *Soient* $\mathcal{E}$ *un* $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$*-module à gauche,* $\mathcal{M}$*,* $\mathcal{N}$ *deux* $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$*-modules à droite.*

(i) *Il existe sur* $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ *(resp.* $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$*) une unique structure de* $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$*-module à droite fonctorielle en* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{E}$ *telle que, pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert* $U \subset X$*, et tous* $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$*,* $x \in \Gamma(U, \mathcal{E})$*,* $y \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ *(resp.* $\phi : \mathcal{E}_{|U} \to \mathcal{M}_{|U}$*), on ait*

(1.1.24.1)
$$(y \otimes x)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} y \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} x,$$

(1.1.24.2)
$$(\phi \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle})(x) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} x) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle}.$$

(ii) *Il existe sur* $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ *une unique structure de* $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$*-module à gauche fonctorielle en* $\mathcal{N}$ *et* $\mathcal{M}$ *telle que, pour tout système de coordonnées locales sur un ouvert* $U \subset X$*, et tous* $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$*,* $z \in \Gamma(U, \mathcal{N})$*,* $\psi : \mathcal{N}_{|U} \to \mathcal{M}_{|U}$*, on ait*

(1.1.24.3)
$$(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \psi)(z) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k} - \underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \psi(z \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle}) \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle}.$$

(iii) *En outre, si la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathcal{M}$ se prolonge en une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-bimodule (resp. bimodule à droite), alors les structures de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ et de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ se prolongent en des structures de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-bimodule (resp bimodule à droite). De plus, si la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathcal{M}$ (resp. de $\mathcal{N}$) se prolonge en une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-bimodule ou bimodule à droite, alors la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ se prolonge en une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-bimodule ou bimodule à droite (resp. $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-bimodule à gauche ou bimodule).*

De même, ces structures de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module ne dépendent pas du niveau m.

Preuve. Les formules de 1.1.24.1, 1.1.24.2 et 1.1.24.3 se prouvent de manière analogue à [Ber00, 1.1.7]. La fonctorialité en $\mathcal{E}$, $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{N}$ se vérifient d'après ces formules. Il dérive de cette fonctorialité (ou à nouveau grâce à 1.1.24.1, 1.1.24.2 et 1.1.24.3) la partie *iii*) de la proposition. □

Remarque 1.1.25. Soient $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à gauche et $\mathcal{M}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite. Pour éviter les risques de confusions, on adoptera la convention suivante: la structure produit tensoriel de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{M}$ provient de la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathcal{M}$ tandis que celle de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ se calcule via la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à droite de $\mathcal{M}$.

1.1.26. On construit alors, de manière analogue à [BGK$^+$87, I.10], un foncteur:

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(-,-) \ : \ D({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)})^\circ \times D^+({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}) \to D({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}),$$

celui-ci se calculant en prenant une résolution droite par des $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules injectifs du complexe de droite. En effet, comme l'extension $\mathcal{B}_X \to \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ est plate, un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module injectif est aussi un $\mathcal{B}_X$ -module injectif.

De même, puisqu'un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module plat est aussi un $\mathcal{B}_X$ -module plat, on construit le foncteur:

$$- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} - \ : \ D^-({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}) \times D^-({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}) \to D^-({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}),$$

qui se calcule via une résolution gauche, de l'un des deux termes, par des $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules plats.

1.2 – *Extension des coefficients de l'anneau des opérateurs différentiels.*

On garde les notations de la section 1.1 et on se donne $\mathcal{B}'_X$ une $\mathcal{B}_X$-algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à gauche telle que $\mathcal{B}_X \to \mathcal{B}'_X$ soit $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-linéaire.

1.2.1. Soit $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module à gauche. On écrira $\mathcal{E}' := \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_X'^{(m)} := \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ et $\widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)} := \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^{n'}_{X(m)}$. On dispose, grâce à 1.1.9.2 et 1.1.10.1, du diagramme commutatif d'algèbres:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_X \arrow[r, shift left, "d_0^n"] \arrow[r, shift right, "d_1^n"'] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{P}}^{n+n'}_{X(m)} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n'}_{X(m)} \arrow[d] \\
\mathcal{B}'_X \arrow[r, shift left, "\widetilde{d}_0^n"] \arrow[r, shift right, "\widetilde{d}_1^n"'] & \widetilde{\mathcal{P}}'^{n+n'}_{X(m)} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}'_X} \widetilde{\mathcal{P}}'^{n'}_{X(m)},
\end{tikzcd}
\tag{1.2.1.1}
$$

où les triples flèches du haut (resp. du bas) désignent les morphismes $\widetilde{q}_0^{n,n'}$, $\widetilde{q}_1^{n,n'}$, $\widetilde{\delta}_{(m)}^{n,n'}$ (resp. avec des primes). Le diagramme ci-dessus nous permet alors de définir une m-PD-stratification relative à $\mathcal{B}'_X$ sur $\mathcal{E}'$:

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}'_X} \mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, dotted, "\widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}'}"] & \widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)} \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}} (\widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}) \arrow[d, "\sim"', "\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S} \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S}} \widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}}"] \\
\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}'_X} \widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)} \arrow[r, "\sim"'] & (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{P}}^{n}_{X(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X(m)}} \widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)}.
\end{tikzcd}
\tag{1.2.1.2}
$$

Si $b \in \mathcal{B}'_X$, $e \in \mathcal{E}$, on obtient, via 1.1.16.1, $\widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}'}((1 \otimes 1) \otimes (b \otimes e)) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} (1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} e) \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \varepsilon_n^{\mathcal{B}'_X}((1 \otimes 1) \otimes b)$, où $(1 \otimes 1)$ désigne l'unité de $\widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X(m)}$.

1.2.2. La m-PD-stratification relativement à $\mathcal{B}_X$ de $\mathcal{E}'$ correspondant à $(\widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'_X} \otimes \widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}})_n$ est semi-linéaire par rapport aux $\widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'_X}$. Grâce à 1.1.16.2, il lui est associé une m-PD-stratification relativement à $\mathcal{B}'_X$, notée $\widetilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{E}'}$, s'inscrivant dans le diagramme commutatif suivant (où l'on a omis d'indiquer les indices "X" et "$X(m)$")

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\widetilde{\mathcal{P}}'^{n} \otimes_{\mathcal{B}'} \mathcal{E}' \arrow[r, "(\widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'})^{-1} \otimes Id)", "\sim"'] \arrow[d, dotted, "\widetilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{E}'}"] & (\widetilde{\mathcal{P}}^{n} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \mathcal{B}') \otimes_{\mathcal{B}'} \mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{\mathcal{P}}^{n} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & (\widetilde{\mathcal{P}}^{n} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \mathcal{B}') \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n} (\widetilde{\mathcal{P}}^{n} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \mathcal{E}) \arrow[d, "\sim"', "\widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'_X} \otimes \widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}}"] \\
\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}'} \widetilde{\mathcal{P}}'^{n} \arrow[rr, "\sim"'] & & \mathcal{E}' \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \widetilde{\mathcal{P}}^{n} \arrow[r, "\sim"'] & (\mathcal{B}' \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \widetilde{\mathcal{P}}^{n}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n} (\mathcal{E} \underset{\mathcal{B}}{\otimes} \widetilde{\mathcal{P}}^{n}).
\end{tikzcd}
$$

(1.2.2.1)

Si $b \in \mathcal{B}'_X$, $e \in \mathcal{E}$, on calcule $\widetilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{E}'}((1 \otimes 1) \otimes (b \otimes e)) = \sum_{|\underline{k}| \leq n} (1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} e) \otimes \underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} \varepsilon_n^{\mathcal{B}'}((1 \otimes 1) \otimes b)$. D'où l'égalité $\widetilde{\varepsilon}_n'^{\mathcal{E}'} = \widetilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}'}$ (défini en 1.2.1). Le faisceau $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}$ est ainsi muni d'une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}_X'^{(m)}$-module à gauche.

1.2.3. Le morphisme canonique $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est un homomorphisme d'anneaux (cela se voit par exemple via la formule [Ber96, 2.3.5.1]). En particulier, $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est muni d'une structure de $\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodule et donc de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodule. On remarque que cette dernière correspond à sa structure canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodule, i.e., celle dont la structure droite est la multiplication à droite et la structure gauche provient de celle du produit tensoriel. En effet, cela découle de la formule [Ber96, 2.3.5.1].

Si $\mathcal{E}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module, on vérifie par un calcul (via les formules 1.1.18.1 et [Ber96, 2.3.5]) que l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}' \to (\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}} \mathcal{E}', \tag{1.2.3.1}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche.

Si $\mathcal{E}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)})$, une résolution gauche de $\mathcal{E}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-modules à gauche plats est alors aussi une résolution gauche de $\mathcal{E}'$ par des $\mathcal{B}_X$-modules plats. Il en dérive un isomorphisme canonique dans $D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)})$

$$\mathcal{B}'_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}} \mathcal{E}'. \tag{1.2.3.2}$$

1.2.4. Passons maintenant à l'extension des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à droite. L'isomorphisme de transposition ([Ber00, 1.3.1]) fournit un isomorphisme de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodules $\gamma_{\mathcal{B}_X} : \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$, de sorte qu'on obtient une structure d'anneau sur $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$. Lorsque nous travaillerons avec des modules à droite, nous préférerons le faisceau d'anneau $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$ en raison de la formule suivante (voir [Ber00, 1.3.2]) :

$$(1 \otimes b)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \otimes 1) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} b, \tag{1.2.4.1}$$

qui est analogue à 1.1.24.1. Il résulte de 1.2.4.1 que le morphisme canonique $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \to \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X$ est un homomorphisme d'anneaux. On dispose de plus du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \arrow[r] & \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \\ \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X \arrow[r] \arrow[u, "\gamma_{\mathcal{B}_X}"] & \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X . \arrow[u, "\gamma_{\mathcal{B}'_X}"'] \end{tikzcd} \tag{1.2.4.2}$$

En effet, par $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéarité à gauche, il suffit de le vérifier pour les éléments de la forme $1 \otimes b \in \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$, où b est une section de $\mathcal{B}_X$, ce qui est immédiat (on se rappelle que $\gamma_{\mathcal{B}_X}(1 \otimes b) = b \otimes 1$).

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$-module à droite. La m-PD-costratification produit tensoriel $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}} \otimes (\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'_X})^{-1}$ de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{B}'_X$ est semi-linéaire par rapport à $(\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'_X})^{-1}$. On définit alors des isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{B}'_X}$ de $\widetilde{\mathcal{P}}'^{n}_{X,(m)}$-algèbres via le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\tilde{d}^n_{0*}\widetilde{\mathcal{P}}^n, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}') \arrow[rr, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{M}} \otimes (\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}'})^{-1}"] & & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\tilde{d}^n_{0*}\widetilde{\mathcal{P}}'^n, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}') \arrow[d, dotted, "\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'}"] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\tilde{d}^n_{1*}\widetilde{\mathcal{P}}^n, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\tilde{d}^n_{1*}\widetilde{\mathcal{P}}^n \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}', \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}') \arrow[r, "(\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{B}})^{-1}", "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\tilde{d}^n_{1*}\widetilde{\mathcal{P}}'^n, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{B}'),
\end{tikzcd}$$

où l'on a omis d'inscrire les indices "X" et "X, (m)". La structure de $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$-module à droite du produit tensoriel $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{B}'_X$ se prolonge ainsi en une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X$-module à droite.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$-module à droite, on vérifie, via les formules 1.1.24.1 et 1.2.4.1, que l'homomorphisme canonique

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{B}'_X \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X} (\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X), \tag{1.2.4.3}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X$-modules à droite.

En outre, si $\mathcal{M} \in D^-(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X{}^d)$, une résolution gauche de $\mathcal{M}$ par des $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X$-modules à droite plats est aussi une résolution gauche par des $\mathcal{B}_X$-modules plats. On obtient alors dans $D^-(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X{}^d)$:

$$\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} \mathcal{B}'_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X} (\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X). \tag{1.2.4.4}$$

La proposition qui suit indique que les extensions à droite et à gauche de l'anneau des opérateurs différentiels sont compatibles.

PROPOSITION 1.2.5. *Pour tout $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module $\mathcal{E}$, on a l'isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X$-modules à droite:*

$$\begin{aligned} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} ((\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}} \mathcal{E}) &\xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}_X} (\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X). \end{aligned} \tag{1.2.5.1}$$

PREUVE. Grâce à 2.1.22, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{B}'_X$-modules à droite:

$$\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} ((\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)})) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}} \mathcal{E}.$$

En notant δ_{ω_X} l'isomorphisme de transposition de ω_X (voir [Ber00, 1.3.3, remarque (ii)]), on obtient:

$$(1.2.5.2)\quad \delta_{\omega_X}\otimes Id : (\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X))\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim}(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X))_g\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}\mathcal{E},$$

l'indice g signifiant que l'on a pris, pour définir le produit tensoriel, la structure gauche de $\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à droite de $\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X)$; la structure droite permettant de munir le terme de droite tout entier de 1.1 d'une structure de $\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à droite.

Or, d'après [Vir00, I.2.2.i)],

$$(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X))_g\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}\mathcal{E}\xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim}(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E})\otimes_{\tilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}((\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X))_g\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_X^{-1}).$$

Enfin, l'isomorphisme de $\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X$-bimodules $\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X\xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim}(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X))_g\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_X^{-1}$ et 1.2.4.2 permettent de conclure. □

PROPOSITION 1.2.6. *Pour tout $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module $\mathcal{E}$, le diagramme canonique*

$$\begin{tikzcd}
\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}((\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m)}_X)\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}\mathcal{E}) \arrow[r, "\sim"'] & (\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{B}_X}(\mathcal{D}^{(m)}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{B}'_X) \\
\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{E}) \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"'] & (\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E})\otimes_{\mathcal{B}_X}\mathcal{B}'_X \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

PREUVE. Le calcul est aisé.

1.3 – *Foncteur image inverse.*

1.3.1. On garde les notations de 1.1 et on se donne un diagramme commutatif

$$(1.3.1.1)\qquad \begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\
(S,\mathfrak{a}_S,\mathfrak{b}_S,\alpha_S) \arrow[r] & (T,\mathfrak{a}_T,\mathfrak{b}_T,\alpha_T),
\end{tikzcd}$$

où S et T sont des $\mathbb{Z}_{(p)}$-schémas (resp. $\mathcal{V}$-schémas formels dont l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$ est un idéal de définition) munis de m-PD-idéaux quasi-cohérents (resp. cohérents), où la flèche du bas est un m-PD-morphisme et où X est un S-schéma lisse (resp. S-schéma formel lisse) et Y est un T-schéma lisse (resp. T-schéma formel lisse). Soit $\mathcal{B}_X$ (resp. $\mathcal{B}_Y$) une $\mathcal{O}_X$-algèbre (resp. $\mathcal{O}_Y$-algèbre) commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module (resp. $\mathcal{D}^{(m)}_Y$-module). Rappelons que l'action de $\mathcal{D}^{(m)}_X$ à gauche sur $f^*\mathcal{B}_Y$ est compatible à sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre (confère [Ber00, 2.1.4]). On suppose enfin que l'on dispose d'un morphisme d'algèbres $f^*\mathcal{B}_Y \to \mathcal{B}_X$ qui soit en outre $\mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire. On notera encore $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X = \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_Y = \mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}^{(m)}_Y$.

1.3.2. Voyons maintenant l'image inverse d'un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_Y$-module de manière analogue à [Ber00, 2.1.2] avec la terminologie des m-PD-stratifications relatives à $\mathcal{B}_Y$.

En notant $\widetilde{X}$ (resp. $\widetilde{Y}$) l'espace annelé $(X, \mathcal{B}_X)$ (resp. $(Y, \mathcal{B}_Y)$), le morphisme f induit alors un morphisme d'espaces annelés $\tilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$.

On note p_0 et $p_1 : \Delta^n_{X/S(m)} \to X$ les projections à gauche et à droite. Soit $\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)}$ l'espace annelé $(\Delta^n_{X/S(m)}, \mathcal{O}_{\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)}})$, avec $\mathcal{O}_{\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)}} := p_0^*(\mathcal{B}_X)$. On note $\tilde{p}_0 : \widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)} \to \widetilde{X}$ le morphisme induit par l'application continue p_0 et par le morphisme d'anneaux canonique $p_0^{-1}(\mathcal{B}_X) \to \mathcal{O}_{\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)}}$ et $\tilde{p}_1 : \widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)} \to \widetilde{X}$ dont le morphisme d'espaces topologiques est p_1 et dont le morphisme d'anneaux est $p_1^{-1}(\mathcal{B}_X) \to p_1^*(\mathcal{B}_X) \xrightarrow{\sim} p_0^*(\mathcal{B}_X) = \mathcal{O}_{\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)}}$. De même, lorsque l'on remplace respectivement S et X par T et Y.

Le morphisme canonique

$$f^*(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)}) \xrightarrow{\sim} f^*\mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{P}^n_{Y/T(m)}) \to \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X/S(m)} = \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)} \tag{1.3.2.1}$$

est semi-linéaire via $f^*\mathcal{B}_Y \to \mathcal{B}_X$ pour les structures droite et gauche. Pour tout couple d'entiers $n \geq n'$, les homomorphismes 1.3.2.1 fournissent des morphismes d'espaces annelés $\tilde{f}_n : \widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)} \to \widetilde{\Delta}^n_{Y/T(m)}$ s'inscrivant, grâce à [Ber96, 2.1.4.3], dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Delta}^{n'}_{X/S(m)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{f}_{n'}"] & \widetilde{\Delta}^{n}_{X/S(m)} \arrow[r, shift left, "\tilde{p}^n_0"] \arrow[r, shift right, "\tilde{p}^n_1"'] \arrow[d, "\tilde{f}_{n}"] & \widetilde{X} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ \widetilde{\Delta}^{n'}_{Y/T(m)} \arrow[r, hook] & \widetilde{\Delta}^{n}_{Y/T(m)} \arrow[r, shift left, "\tilde{p}^n_0"] \arrow[r, shift right, "\tilde{p}^n_1"'] & \widetilde{Y}. \end{tikzcd} \tag{1.3.2.2}$$

Soient $\mathcal{E}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_Y$-module à gauche et $(\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}}_n)$ sa m-PD-stratification. Le $\mathcal{B}_X$-module $\tilde{f}^*\mathcal{E}$ possède une structure canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-module à gauche. En effet, il résulte du diagramme commutatif 1.3.2.2 que les isomorphismes $\tilde{\varepsilon}_n^{\tilde{f}^*\mathcal{E}} := \tilde{f}_n^*(\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}})$ munissent $\tilde{f}^*\mathcal{E}$ d'une m-PD-stratification (pour les conditions de cocycle, on utilise de plus un diagramme commutatif analogue avec $\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)}(2)$). Si $\mathcal{B}_X = \mathcal{O}_X$, on note f_n à la place de $\tilde{f}_n$, et plus généralement, on enlève les tildes.

Exemple 1.3.3. Considérons le morphisme d'espaces annelés: $(X, \mathcal{B}_X) \xrightarrow{\widetilde{Id}} (X, \mathcal{O}_X)$. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module, il résulte de 1.2.1.2, que la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module sur $(\widetilde{Id})^*(\mathcal{E})$ définie par image inverse est égale à la structure de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module définie par extension.

1.3.4. Pour vérifier que l'image inverse se comporte bien par composition, donnons-nous en outre le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ (T, \mathfrak{a}_T, \mathfrak{b}_T, \alpha_T) \arrow[r] & (U, \mathfrak{a}_U, \mathfrak{b}_U, \alpha_U), \end{tikzcd} \tag{1.3.4.1}$$

où U est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma (resp. $\mathcal{V}$-schéma formel dont l'idéal engendré par $\mathfrak{m}$ est un idéal de définition) muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent (resp. cohérent), où la flèche du bas est un m-PD-morphisme et où Z est un U-schéma lisse (resp. U-schéma formel lisse). On se donne de plus une $\mathcal{O}_Z$-algèbre $\mathcal{B}_Z$ munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_Z^{(m}$-module et un morphisme d'algèbres $g^*\mathcal{B}_Z \to \mathcal{B}_Y$ qui soit en outre $\mathcal{D}_Z^{(m}$-linéaire.

Proposition 1.3.5. *Soit $\mathcal{G}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_Z^{(m)}$-module. L'isomorphisme canonique*

$$\tilde{f}^* \circ \tilde{g}^*(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{g \circ f}^*(\mathcal{G})$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-linéaire.

Preuve. En notant h le morphisme composé $g \circ f$, il s'agit de prouver que l'on a un isomorphisme canonique $\tilde{g}_n \circ \tilde{f}_n \xrightarrow{\sim} \tilde{h}_n$ (notations de 1.3.2). D'après [Ber00, 2.1.1.1], on le sait déjà sans les tildes, i.e., le morphisme composé canonique

$$f^*(g^*\mathcal{P}^n_{Z/U(m)}) \to f^*(\mathcal{P}^n_{Y/T(m)}) \to \mathcal{P}^n_{X/S(m)}$$

est isomorphe au morphisme canonique $h^*\mathcal{P}^n_{Z/U(m)} \to \mathcal{P}^n_{X/S(m)}$. Il en dérive par construction (1.3.2.1) que

$$\tilde{f}^*(\tilde{g}^*\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Z/U(m)}) \to \tilde{f}^*(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)}) \to \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)}$$

est isomorphisme au morphisme canonique $\tilde{h}^*\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Z/U(m)} \to \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)}$. D'où le résultat. □

COROLLAIRE 1.3.6. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_Y$-module. L'isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E} \to \widetilde{f}^*(\mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}),$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-linéaire.

PREUVE. Cela résulte de l'exemple 1.3.3 et de la proposition 1.3.5. □

1.3.7. Si $\mathcal{F}$ est un -module à gauche, les isomorphismes définissant la m-PD-stratification image inverse de $\mathcal{F}$ par f (i.e. $f_n^*(\varepsilon_n^{\mathcal{F}})$) sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\varepsilon_n^{f^*\mathcal{B}_Y} := f_n^*(\varepsilon_n^{\mathcal{B}_Y})$ (voir [Ber00, 2.1.4]). La structure de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche de $f^*\mathcal{F}$ se prolonge donc en une structure de $f^*\mathcal{B}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X$-module à gauche. Lorsque $\mathcal{B}_X = f^*\mathcal{B}_Y$, la proposition qui suit nous dit que les deux définitions de l'image inverse sont identiques.

PROPOSITION 1.3.8. *On suppose que $f^*\mathcal{B}_Y \to \mathcal{B}_X$ est un isomorphisme. Pour tout $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_Y$-module à gauche $\mathcal{F}$, l'isomorphisme canonique*

$$f^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{f}^*(\mathcal{F})$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-linéaire.

PREUVE. Il s'agit de prouver que l'isomorphisme $\mathcal{B}_X$-linéaire canonique $f^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{f}^*(\mathcal{F})$ est horizontal. Or, on dispose par construction (1.3.2.1) du diagramme canonique commutatif

$$\begin{tikzcd}
f^*\mathcal{P}^n_{Y/T(m)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}^n_{X/S(m)} \arrow[d] \\
\tilde{f}^*\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)}
\end{tikzcd}$$

cocartésien. Les foncteurs $\mathcal{P}^n_{X/S(m)} \otimes_{f^*\mathcal{P}^n_{Y/T(m)}} f^*(-)$ et $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)} \otimes_{\tilde{f}^*\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)}} \tilde{f}^*(-)$ sont donc isomorphes. En outre, d'après 1.1.16.2, le diagramme

(1.3.8.1)
$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)} \otimes_{\mathcal{B}_Y} \mathcal{F} \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}_n", "\sim"'] \arrow[d, "can", "\sim"'] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}_Y} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)} \arrow[d, "can", "\sim"'] \\
\mathcal{P}^n_{Y/T(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon_n", "\sim"'] & \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{P}^n_{Y/T(m)}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En appliquant le foncteur $\mathcal{P}^n_{X/S(m)} \otimes_{f^*\mathcal{P}^n_{Y/T(m)}} f^*(-)$ à 1.3.8.1, on en déduit un isomorphisme canonique $f_n^*(\varepsilon_n) \tilde{\to} \tilde{f}_n^*(\tilde{\varepsilon}_n)$. D'où le résultat. □

PROPOSITION 1.3.9. *On garde les notations de la section 1.3.1. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}_Y^{(m)}$-modules à gauche. Le morphisme canonique*

(1.3.9.1) $$\tilde{f}^*(\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_Y}(\mathcal{E},\mathcal{F})) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{f}^*\mathcal{E},\tilde{f}^*\mathcal{F})$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-linéaire.

PREUVE. On notera ici $\widetilde{\mathcal{P}}^n := \widetilde{\mathcal{P}}^n_{Y/T(m)}$. Par fonctorialité, le diagramme suivant

(1.3.9.2)
$$\begin{array}{ccc}
\tilde{f}_n^*(\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{P}}^n}(\widetilde{\mathcal{P}}^n \otimes_{\mathcal{B}_Y} \mathcal{E}, \widetilde{\mathcal{P}}^n \otimes_{\mathcal{B}_Y} \mathcal{F})) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{P}}^n}(\tilde{f}_n^*(\widetilde{\mathcal{P}}^n \otimes_{\mathcal{B}_Y} \mathcal{E}), \tilde{f}_n^*(\widetilde{\mathcal{P}}^n \otimes_{\mathcal{B}_Y} \mathcal{F})) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\tilde{f}_n^*(\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{P}}^n}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_Y} \widetilde{\mathcal{P}}^n, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}_Y} \widetilde{\mathcal{P}}^n)) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{P}}^n}(\tilde{f}_n^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}_Y} \widetilde{\mathcal{P}}^n), \tilde{f}_n^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}_Y} \widetilde{\mathcal{P}}^n)),
\end{array}$$

où les flèches horizontales sont les homomorphismes canoniques et celles verticales sont induites par les isomorphismes $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{E}}$ et $\tilde{\varepsilon}_n^{\mathcal{F}}$, est commutatif. Or, par définition, le morphisme du haut du diagramme 1.3.9.2 est le morphisme défini par la m-PD-stratification de $\tilde{f}^*(\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_Y}(\mathcal{E},\mathcal{F}))$ tandis que celui du bas provient de la m-PD-stratification de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\tilde{f}^*\mathcal{E},f^*\mathcal{F})$. Le morphisme 1.3.9.1 est donc horizontal. □

1.4 – *Élévation du niveau par Frobenius.*

1.4.1. On prend ici les notations non respectives de la section 1.3.1 et on désigne par $S_0 = V(\mathfrak{a})$ et par X_0 la réduction de X sur S_0. On suppose aussi vérifiées les conditions suivantes de [Ber00, 2.3.1] (ou [Ber00, 3.0.1.(iii)]):

i) p est nilpotent sur S (donc, grâce à [Ber96, 1.3.5.1], $|X| = |X_0|$);

ii) $p \in \mathfrak{a}$ (on dispose ainsi d'un Frobenius sur X_0).

Soit $s \geq 0$ un entier fixé, $X_0^{(s)}$ le S_0-schéma déduit de X_0 par le s-ième itéré du Frobenius absolu de S_0, X' un S-schéma lisse relevant $X_0^{(s)}$ et $F : X \to X'$ un S-morphisme relevant le morphisme de Frobenius relatif $F^s_{X_0/S_0} : X_0 \to X_0^{(s)}$.

On suppose donnée une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre $\mathcal{B}_{X'}$ munie d'une action à gauche de $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ compatible à sa structure d'algèbre. On pose $\mathcal{B}_X := F^*\mathcal{B}_{X'}$. On notera $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)} = \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)} = \mathcal{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ et $\widetilde{F}$ le morphisme d'espaces annelés $(X, \mathcal{B}_X) \to (X', \mathcal{B}_{X'})$ induit par F.

LEMME 1.4.2. *Le morphisme canonique* $\widetilde{F}_n : \widetilde{\Delta}^n_{X/S(m)} \to \widetilde{\Delta}^n_{X'/S(m)}$ *se factorise en un morphisme d'espaces annelés*

$$\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m+s)} \to \widetilde{\Delta}^n_{X'/S(m)}. \tag{1.4.2.1}$$

PREUVE. Il s'agit d'établir que le morphisme canonique $F^*\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'/S(m)} \to \to \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m)}$ se factorise par un morphisme $F^*\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'/S(m)} \to \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X/S(m+s)}$. D'après la proposition [Ber00, 2.2.2], c'est le cas sans les tildes. Grâce à 1.3.2.1, on conclut la démonstration. □

PROPOSITION 1.4.3. *Soient* $\mathcal{E}'$ *un* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$*-module à gauche et* $\mathcal{M}'$ *un* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$*-module à droite. Le faisceau* $\widetilde{F}^*\mathcal{E}'$ *(resp., avec les notations de 1.1.21,* $\widetilde{F}^\flat\mathcal{M}'$*) est muni d'une structure de* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$*-module à gauche (resp. à droite). De plus,* $\widetilde{F}^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}^*\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}'$ *et* $\widetilde{F}^\flat\mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \widetilde{F}^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$.

PREUVE. En prenant l'image inverse par les morphismes $\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m+s)} \to \to \widetilde{\Delta}^n_{X'/S(m)}$ de la m-PD-stratification relative à $\mathcal{B}_{X'}$ de $\mathcal{E}'$, on obtient une $(m+s)$-PD-stratification relative à $\mathcal{B}_X$ de $\widetilde{F}^*\mathcal{E}'$. Le cas respectif se montre de la même façon. Les deux isomorphismes se vérifient par fonctorialité. □

REMARQUES 1.4.4. (i) On garde les notations de 1.4.1. Soit $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche. D'après [Ber00, 2.2.7], $F^*(\mathcal{E}')$ est muni d'une structure de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-module prolongeant sa structure de $\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-module. On vérifie, comme pour 1.3.8, que l'isomorphisme $F^*(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}^*(\mathcal{E}')$ est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire. Par la suite, on notera donc simplement F^* à la place de $\widetilde{F}^*$.

(ii) Lorsque l'on suppose que $\mathfrak{a}$ est m-PD-nilpotent, de manière analogue à [Ber00, 2.1.6.(a), 2.2.6.(i) et 2.4.5.(ii)], on construit un foncteur $F^{s*}_{X_0/S_0}$ (resp. $F^{s\flat}_{X_0/S_0}$) de la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche (resp. à droite) dans celle des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-modules à gauche (resp. à droite): cela résulte du fait que localement le morphisme $F^s_{X_0/S_0}$ se relève en un morphisme $F : X \to X'$ et que, comme pour [Ber00, 2.1.5], l'image inverse F^* ne dépend pas du relèvement. Tous les résultats de cette section seront valides en remplaçant F_X par $F^s_{X_0/S_0}$.

DÉFINITION 1.4.5. Soit M une famille de morphismes $f : X \to Y$ s'inscrivant dans un diagramme commutatif de la forme 1.3.1.1 telle que M soit stable par changement de base. Pour tout entier m et tout morphisme f de M, supposons donnés des foncteurs $\phi^{(m)}_f : D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S}) \to D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y/T})$ (resp. $\phi^{(m)}_f : D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)\,d}_{X/S}) \to D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)\,d}_{Y/T})$). La famille $(\phi^{(m)}_f)_{f\in M}$ *commute à Frobe-*

nius si pour tout entier s, pour tout relèvement X' (resp. Y') lisse sur S (resp. T) de $X_0^{(s)}$ (resp. $Y_0^{(s)}$) et $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y'$, $F_X : X \to X'$, $F_Y : Y \to Y'$ relèvements de f_0, $f_0^{(s)}$, $F^s_{X_0/S_0}$, $F^s_{Y_0/T_0}$ tels que $f, f' \in M$ et $F_Y \circ f = f' \circ F_X$, il existe pour tout $\mathcal{E}' \in D^-({}^g\tilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'/S})$ (resp. $\mathcal{M}' \in$ $\in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'/S}{}^d)$) un isomorphisme canonique dans $D^-({}^g\tilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{Y/T})$ (resp. $D^-(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)d}_{Y/T})$):

$$(1.4.5.1)\qquad F_Y^* \circ \phi^{(m)}_{f'}(\mathcal{E}') \tilde{\to} \phi^{(m+s)}_f \circ F_X^*(\mathcal{E}')$$
$$\text{(resp. } F_Y^\flat \circ \phi^{(m)}_{f'}(\mathcal{M}')) \to \phi^{(m+s)}_f \circ F_X^\flat(\mathcal{M}').$$

Cette définition s'étend aux bifoncteurs, aux complexes de bimodules ou aux foncteurs de la forme $\phi^{(m)}_f : D^-({}^g\tilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{Y/T}) \to D^-({}^g\tilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X/S})$ etc.

Définition 1.4.6. On garde les hypothèses et notations de la définition 1.4.5. Pour tout entier m, soient $(\phi^{(m)}_f)_{f\in M}$ et $(\psi^{(m)}_f))_{f\in M}$ deux familles de foncteurs commutant à Frobenius et, pour tout $f \in M$, $\theta^{(m)}_f : \phi^{(m)}_f \to \psi^{(m)}_f$ un morphisme de foncteurs. La famille $(\theta^{(m)}_f)_{f\in M}$ est dite *compatible à Frobenius* si elle induit un diagramme commutatif

$$(1.4.6.1)\qquad \begin{tikzcd} F_Y^* \circ \phi^{(m)}_{f'} \arrow[r] \arrow[d] & \phi^{(m+s)}_f \circ F_X^* \arrow[d] \\ F_Y^* \circ \psi^{(m)}_{f'} \arrow[r] & \psi^{(m+s)}_f \circ F_X^*, \end{tikzcd}$$

(resp. en remplaçant F^* par $F^\flat$).

Rappelons le théorème de descente par Frobenius de [Ber00, 2.3.6]:

Théorème 1.4.7. *Le foncteur F^* induit une équivalence entre la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche (resp. quasi-cohérents) et celle des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-modules à gauche (resp. quasi-cohérents).*

Proposition 1.4.8. *Soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche. Le morphisme canonique*

$$(1.4.8.1)\qquad F^*(\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}')) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{F}')$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire.

Preuve. Il suffit de reprendre la démonstration de 1.3.9 en remplaçant le morphisme $\tilde{f}_n$ par le morphisme $\widetilde{\Delta}^n_{X/S(m+s)} \to \widetilde{\Delta}^n_{X'/S(m)}$. □

REMARQUES 1.4.9. Nous verrons, via 2.1.32..ii), que le morphisme 1.4.8.1 est un isomorphisme. La proposition 1.1 signifie donc que le bifoncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(-,-)$ commute à Frobenius.

PROPOSITION 1.4.10. *Soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche. L'isomorphisme canonique :*

$$F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}') \tag{1.4.10.1}$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-linéaire. Ainsi, le bifoncteur $- \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} -$ commute à Frobenius.

PREUVE. Analogue à [Ber00, 3.3.1]. □

PROPOSITION 1.4.11. *Soient $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-bimodule et $\mathcal{F}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche. On a alors un isomorphisme canonique:*

$$(F^*F^\flat\mathcal{E}') \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} (F^*\mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{F}'). \tag{1.4.11.1}$$

Le bifoncteur $- \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} -$ commute donc à Frobenius.

PREUVE. Grâce à [Ber00, 2.5.7], on a l'isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche :

$$F^\flat\mathcal{E}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{F}'.$$

En lui appliquant le foncteur F^*, on en déduit la proposition. □

PROPOSITION 1.4.12. *Soient $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche et $\mathcal{F}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-bimodule. On dispose alors de l'isomorphisme canonique de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à droite:*

$$F^\flat\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*F^\flat\mathcal{F}').$$

PREUVE. On a un isomorphisme canonique $F^\flat\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}') \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{F}')$. De plus, le théorème 1.1 nous fournit un isomorphisme $\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*F^\flat\mathcal{F}')$. En composant ces deux isomorphismes, on obtient la proposition. □

1.4.13. Soient $m' \geq m$, $\mathcal{B}_{X'}$ (resp. $\mathcal{B}'_{X'}$) une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre munie d'une action à gauche de $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$ (resp. $\mathcal{D}^{(m')}_{X'}$) compatible à sa structure d'algèbre et $\mathcal{B}_{X'} \to \mathcal{B}'_{X'}$ un homomorphisme $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-linéaire de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres. On notera $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} = \mathcal{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} = \mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m')}_{X'}$. Enfin, on pose $\mathcal{B}_X := F^*\mathcal{B}_{X'}$, $\mathcal{B}'_X := F^*\mathcal{B}'_{X'}$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X := \mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m+s)}_X$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X := \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m'+s)}_X$.

1.4.14. Avec les notations de 1.1, Berthelot a construit (voir [Ber00, 3.1.3]), pour tout $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche $\mathcal{E}'$, l'isomorphisme

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} F^*(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}')$$

comme étant l'unique morphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X$-linéaire rendant commutatif le diagramme suivant:

(1.4.14.1)
$$\begin{tikzcd} F^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, dotted] & F^*(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}'). \end{tikzcd}$$

Or, en s'inspirant de 1.4.11.1, on construit celui-ci d'une deuxième façon: en considérant $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'}$ comme un $(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$-bimodule, on obtient d'abord, avec [Ber00, 2.5.7], l'isomorphisme

(1.4.14.2)
$$F^*F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} F^*\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} F^*(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}')$$

fonctoriel en $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'}$ (dans la catégorie des $(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$-bimodules). Ensuite, on termine la construction via l'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$ ([Ber00, 2.5.2]).

Proposition 1.4.15. *Les deux constructions de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim} F^*(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}')$ coïncident.*

Preuve. Notons θ les isomorphismes de la forme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$ et ρ ceux de la forme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'}$ ou $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X$ etc. Par unicité de la factorisation du diagramme 1.4.14.1, il suffit d'établir la commutativité de

(1.4.15.1)
$$\begin{tikzcd} F^*\mathcal{E}' \arrow[rr, equal] & & F^*\mathcal{E}' \\ \widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\theta\otimes id", "\sim"'] \arrow[d, "\rho\otimes id"] & F^*F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "F^*F^\flat(\rho)\otimes id"] & F^*(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}') \arrow[u, "\sim"'] \arrow[d, "F^*(\rho)\otimes id"] \\ \widetilde{\mathcal{D}}^{(m'+s)}_X \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, "\theta\otimes id", "\sim"'] & F^*F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] & F^*(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}'). \end{tikzcd}$$

Par fonctorialité de 1.4.14.2, le diagramme de droite est commutatif. De plus, l'isomorphisme canonique $F^\flat\mathcal{D}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{D}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$ a été construit de telle façon que le rectangle du haut de 1.4.15.1 soit commutatif (voir la preuve de [Ber00, 2.5.5.(i)]). Prouvons à présent la commutativité de carré de gauche de 1.4.15.1. Tout d'abord, par construction de [Ber00, 2.5.2] des isomorphismes de la forme θ, on a le diagramme commutatif suivant:

(1.4.15.2)
$$\begin{tikzcd}
F^*F^\flat\mathcal{D}^{(m)}_{X'} \arrow[r, "\rho"'] \arrow[rr, bend left, "F^*F^\flat(\rho)"] & \mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X} F^*F^\flat\mathcal{D}^{(m)}_{X'} \arrow[r, "\sim"] & F^*F^\flat(\mathcal{B}_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}) \\
\mathcal{D}^{(m+s)}_X \arrow[u, "\theta", "\sim"'] \arrow[r, "\rho"'] & \mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m+s)}_X . \arrow[u, "\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\theta", "\sim"'] \arrow[ur, dotted, "\theta", "\sim"'] &
\end{tikzcd}$$

D'ailleurs, ce morphisme θ est l'unique morphisme de $\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m+s)}_X$-bimodules rendant commutatif le diagramme 1.4.15.2. Il en résulte le diagramme commutatif suivant:

(1.4.15.3)
$$\begin{tikzcd}
F^*F^\flat(\mathcal{B}_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}) \arrow[r, "F^*F^\flat(\rho)"] & F^*F^\flat(\mathcal{B}'_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}) \\
\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m+s)}_X \arrow[u, "\theta", "\sim"'] \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m+s)}_X . \arrow[u, "\theta", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

De plus, on vérifie que la construction de θ dans [Ber00, 2.5.2] est compatible aux changements de niveau, i.e., le diagramme suivant de gauche est commutatif:

(1.4.15.4)
$$\begin{tikzcd}
F^*F^\flat(\mathcal{D}^{(m)}_{X'}) \arrow[r, "F^*F^\flat(\rho)"] & F^*F^\flat(\mathcal{D}^{(m')}_{X'}) \\
\mathcal{D}^{(m+s)}_X \arrow[u, "\theta", "\sim"'] \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{D}^{(m'+s)}_X , \arrow[u, "\theta", "\sim"']
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
F^*F^\flat(\mathcal{B}_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}) \arrow[r, "F^*F^\flat(\rho)"] & F^*F^\flat(\mathcal{B}'_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m')}_{X'}) \\
\mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m+s)}_X \arrow[u, "\theta", "\sim"'] \arrow[r, "\rho"] & \mathcal{B}'_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}^{(m'+s)}_X . \arrow[u, "\theta", "\sim"']
\end{tikzcd}$$

Grâce à 1.4.15.3, il en découle la commutativité du diagramme de droite de 1.4.15.4. En appliquant à ce dernier le foncteur $-\otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X} F^*\mathcal{E}'$, il en dérive celle du carré de gauche de 1.4.15.1. $\square$

Proposition 1.4.16. *Soit $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{B}_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche. L'isomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{E}'$*

(1.4.16.1)
$$\mathcal{B}'_{X'}\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{E}'\xrightarrow{\sim}\mathcal{B}'_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}\otimes_{\mathcal{B}_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}}\mathcal{E}'$$

est compatible à Frobenius.

Preuve. Il s'agit de prouver que le carré de droite du diagramme

$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[dr] & F^*(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & F^*((\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}') \\
& \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"'] & (\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X) \otimes_{\mathcal{B}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Par $\mathcal{B}'_X$-linéarité, il suffit de vérifier que le grand diagramme est commutatif, ce qui est tautologique (1.4.14.1). □

2. Sur la dualité arithmétique $\mathcal{D}$-linéaire d'un isocristal surconvergent.

2.1 – *Préliminaires : quelques isomorphismes canoniques.*

On garde les mêmes notations et hypothèses que 1.4.1 (il n'est pas nécessaire que Frobenius se relève: 1.4.4.(ii)). Sous les conditions plus générales 1.1, tous les résultats de cette section seront valables à la condition de supprimer "compatible à Frobenius" et tout ce qui est lié à Frobenius.

On se donne $\mathcal{B}'_{X'}$ une $\mathcal{B}_{X'}$-algèbre commutative munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche telle que $\mathcal{B}_{X'} \to \mathcal{B}'_{X'}$ soit $\mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-linéaire (et donc $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire). On note comme d'habitude $\mathcal{B}'_X := F^*\mathcal{B}'_{X'}$. Enfin, on supposera que S est un schéma noethérien (hypothèse utile pour 2.1.10 et donc pour 2.1.17 etc.).

Proposition 2.1.1. *Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$ des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche et $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$ des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à droite. Les isomorphismes canoniques suivants*

$$\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} (\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} (\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}',\ (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'$$

$$(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}',\ \omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{F}'),$$

$$\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{M}', \mathcal{N}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}, \mathcal{N}') \text{ et}$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{M}') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'})$$

sont $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaires et compatibles à Frobenius.

Preuve. La compatibilité à Frobenius est élémentaire. Il reste ainsi à vérifier la $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité. L'assertion étant locale, on se ramène à supposer X

affine et muni de coordonnées locales. Les formules 1.1.18.1, 1.1.24.1, 1.1.18.2, 1.1.24.2 et 1.1.24.3 nous permettent de conclure. □

PROPOSITION 2.1.2. *Soient $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche, $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche et $\mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$ un morphisme $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire. Le morphisme canonique*

$$\rho \ : \ \mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}' \to \mathcal{F}',$$

est $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-linéaire et compatible à Frobenius.

PREUVE. Commençons par démontrer la $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-linéarité. Par $\mathcal{B}'_{X'}$-linéarité, contentons-nous de prouver la $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité. Notons $(\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{F}'}_n)$, la stratification relative à $\mathcal{B}_{X'}$ de $\mathcal{F}'$. Comme les isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{F}'}_n$ sont semi-linéaires par rapport aux isomorphismes $\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}_{X'}}_n$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{B}'_{X'}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)}} (\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{B}'_{X'}}_n \otimes \tilde{\varepsilon}^{\mathcal{E}'}_n", "\sim"'] & \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}' \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}^{\mathcal{F}'}_n", "\sim"'] \\
(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)}} (\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)}) \arrow[r] & \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{P}}^n_{X'(m)},
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes canoniques déduits par extension de ρ, est commutatif, i.e., ρ est horizontal.

Pour la compatibilité à Frobenius, il s'agit de vérifier que le diagramme canonique suivant

$$\begin{tikzcd}
F^*(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \arrow[rr, "\sim"'] \arrow[dr, "F^*\rho"'] & & \mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[dl, "\rho"] \\
& F^*\mathcal{F}' &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui est élémentaire. □

COROLLAIRE 2.1.3. Soient $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche et $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}$-module à gauche. Il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}', \mathcal{F}'). \tag{2.1.3.1}$$

PREUVE. Grâce à 2.1.2, on construit l'homomorphisme 2.1.3.1. Comme le morphisme canonique $\mathcal{E}' \to \mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'$ est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire, on construit l'homomorphisme inverse de 2.1.3.1 via celui-ci. □

PROPOSITION 2.1.4. *Soient $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche. L'isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_{X'}}(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}', \mathcal{F}')$$

est $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius.

PREUVE. La compatibilité à Frobenius signifie que le diagramme canonique ci-après

$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \arrow[rr, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{F}') \arrow[d, "\sim"'] \\
F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_{X'}}(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}', \mathcal{F}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_X}(F^*(\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'), F^*\mathcal{F}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'_X}(\mathcal{B}'_X \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{F}')
\end{tikzcd}$$

est commutatif, ce qui est local. On peut donc supposer que Frobenius se relève. La vérification de la commutativité est alors élémentaire. Enfin, la $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéarité résulte de 1.1.18.2. □

PROPOSITION 2.1.5. *Soient $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, $\mathcal{F}'$ un $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, $\mathcal{M}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite et $\mathcal{N}'$ un $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite. Les isomorphismes canoniques*

$$(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{B}'_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}'_{X'}} \mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}' \tag{2.1.5.1}$$

$$\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}'_{X'}} (\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}' \tag{2.1.5.2}$$

$$\text{et } (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{B}'_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}'_{X'}} \mathcal{F}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}'$$

sont $\mathcal{B}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-linéaires et compatibles à Frobenius. Par transport de structure, on munit ainsi $\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'$ et $\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}'$) d'une structure de $\mathcal{B}'_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche (resp. à droite).

PREUVE. La $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéarité des isomorphismes de 2.1.5 résulte des formules 1.1.18.1 et 1.1.24.1 (cela se vérifie aussi en constatant que les isomorphismes sont horizontaux). La compatibilité à Frobenius est aisée. □

PROPOSITION 2.1.6. *Soient $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{G}'$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche et $\mathcal{F}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module à droite ou à gauche. Les isomorphismes canoniques suivants*

$$\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}', \ \ \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'. \tag{2.1.6.1}$$

sont $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaires et sont compatibles à Frobenius.

PREUVE. La $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité résulte des formules 1.1.24.1 et 1.1.18.1 et la compatibilité à Frobenius est immédiate. □

PROPOSITION 2.1.7. *Soit $\mathcal{M}' \in D(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$. L'isomorphisme de transposition $\delta_{\mathcal{M}'} : \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$ qui échange les deux structures droites de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules (voir* [Ber00, 1.3.3.(ii)]) *est compatible à Frobenius, i.e., le diagramme suivant est commutatif:*

(2.1.7.1)
$$\begin{tikzcd} F^\flat\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \arrow[r, "\delta_{F^\flat\mathcal{M}'}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"] & F^\flat\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \arrow[d, "\sim"] \\ F^\flat\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \arrow[r, "F^\flat_g F^\flat_d \delta_{\mathcal{M}'}", "\sim"'] & F^\flat\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^\flat F^*\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}. \end{tikzcd}$$

PREUVE. Il suffit de reprendre la démonstration de Virrion de [Vir00, II.1.12.1] en rajoutant des tildes et en remplaçant "$\omega_{X'}$" par "$\mathcal{M}'$" et "ω_X" par "$F^\flat\mathcal{M}'$". □

PROPOSITION 2.1.8. *Soit $\mathcal{E}' \in D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$. L'isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-bimodules de transposition relatif à $\mathcal{E}$, $\gamma_{\mathcal{E}'} : \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$ (voir* [Ber00, 1.3.2.d]), *est compatible à Frobenius, i.e., le diagramme canonique*

(2.1.8.1)
$$\begin{tikzcd} F^*F^\flat(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \arrow[r, "F^*F^\flat(\delta_{\mathcal{E}'})", "\sim"'] & F^*F^\flat(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \\ \widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, "\delta_{F^*\mathcal{E}'}", "\sim"'] \arrow[u, "\sim"] & F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_X} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

De même, on dispose de l'isomorphisme de $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-bimodules à gauche compatible à Frobenius

(2.1.8.2)
$$(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}).$$

PREUVE. Tout d'abord, il (faut et il) suffit de démontrer la compatibilité à Frobenius de

$$\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} (\gamma_{\mathcal{E}'}) : (\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} (\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}.$$

Or, l'isomorphisme

$$\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \delta_{\omega_{X'}} : \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \xrightarrow{\sim} (\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'$$

est compatible à Frobenius (2.1.7.1). En outre, grâce à 2.1.1 et 2.1.6.1, l'isomorphisme canonique

$$(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$$

est compatible à Frobenius. Puisqu'en composant ces trois isomorphismes, on obtient l'isomorphisme de transposition $\delta_{\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E}'}$ (il suffit de vérifier, d'après [Ber00, 1.3.3], que, pour toute section x de $\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}'$, $\delta_{\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E}'}(x \otimes 1) = x \otimes 1$) qui est compatible à Frobenius d'après 2.1.7.1. D'où la commutativité de 2.1.8.1.

L'isomorphisme 2.1.8.2 dérive du diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'} \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}) \\
(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[u, "\sim", "\gamma_{\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\omega^{-1}_{X'}}"'] & (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega^{-1}_{X'}) \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'. \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd} \tag{2.1.8.3}$$

□

Remarques 2.1.9. Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ trois faisceaux d'anneaux, $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ et $\mathcal{F} \in D^-({}^g\mathcal{B}, \mathcal{C}^d)$. Il n'est pas clair que l'on sache dériver le foncteur $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$. Cependant, comme l'a remarqué Berthelot, avec les hypothèses pratiques ci-après, ce foncteur se calcule sans problème. Par commodité, introduisons la définition suivante. Un anneau $\mathcal{R}$ est dit *anneau de résolution* de $\mathcal{E} \in D({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ si les conditions suivantes sont réalisées:

(i) Les anneaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont munis de structures de $\mathcal{R}$-algèbres telles que $\mathcal{R}$ s'envoie dans le centre de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$;

(ii) Les structures de $\mathcal{R}$-module induites, sur les $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodules de $\mathcal{E}$, par la structure de $\mathcal{A}$-module à gauche et par celle de $\mathcal{B}$-module à droite coïncident;

(iii) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont plats sur $\mathcal{R}$.

Un *anneau de résolution de* $\mathcal{A}$ est un anneau de résolution de $\mathcal{A}$ vu comme $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-bimodule. Le complexe $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{A}$ est alors dit *résoluble*. Une famille d'anneaux est dite *deux à deux résoluble*, si, en choisissant deux éléments de cette famille, il existe un anneau de résolution qui leur sont commun. Dans la suite, nous ne considérerons que les complexes résolubles et, par abus de notations, $D({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ désignera la sous-catégorie pleine de $D({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ des complexes résolubles (de même en rajoutant des hypothèses de finitude et en changeant les lettres g et d etc.). On notera que le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ est résoluble (comme $(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}, \mathcal{D}^{(m)}_{X_i})$-bimodule) mais n'est pas (à priori) résoluble en tant que $(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$-bimodule. On définit de même les anneaux de résolution pour les complexes $D({}^g\mathcal{A}, {}^g\mathcal{B})$. Grâce à (i), $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}^0$ (où $\mathcal{B}^0$ désigne l'anneau opposé de $\mathcal{B}$) est muni d'une structure canonique d'anneau et, avec en outre *(ii)*, les données d'une structure de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodule ou de $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}^0$-module sont identiques.

Si $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ ou $\mathcal{F} \in D^-({}^g\mathcal{B}, \mathcal{C}^d)$ ont un anneau de résolution, alors on peut calculer $\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{F}$. En effet, si $\mathcal{R}$ est un anneau de résolution de $\mathcal{E}$, une résolution plate de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}^0$-modules plats est, via (iii), plate sur $\mathcal{B}$. Lorsque $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{A}, {}^g\mathcal{B})$, on procède de manière analogue mais avec $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ etc.

De même, soient $\mathcal{E} \in D({}^g\mathcal{A})$ et $\mathcal{E}' \in D^+({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$. Si $\mathcal{E}'$ possède un anneau de résolution, alors on peut calculer $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$. En effet, il suffit de résoudre $\mathcal{E}'$ par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}^0$-modules injectifs.

Pour résumer, avec notre abus de notations, on obtient les bifoncteurs

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(-,-) \ : \ D({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d) \times D^+({}^g\mathcal{A}, \mathcal{C}^d) \to D({}^g\mathcal{B}, \mathcal{C}^d), \tag{2.1.9.1}$$

$$- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} - \ : \ D^-({}^*\mathcal{B}, \mathcal{A}^d) \times D^-({}^g\mathcal{A}, {}^*\mathcal{C}) \to D({}^*\mathcal{B}, {}^*\mathcal{C}). \tag{2.1.9.2}$$

Bien-entendu, on dispose de bifoncteurs analogues en changeant les indices g et d.

PROPOSITION 2.1.10. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux faisceaux d'anneaux sur X, $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$, $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$. On a:

(i) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in D^{\mathrm{b}}({}^*\mathcal{B})$,

(ii) Si $\mathcal{F} \in D_{(.,\mathrm{parf})}({}^g\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$ (resp. $D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$), alors $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in$ $\in D_{\mathrm{parf}}({}^*\mathcal{B})$ (resp. $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in D_{\mathrm{tdf}}({}^*\mathcal{B})$).

PREUVE. Comme X est quasi-compact, cela se vérifie par localisation et dévissage. □

REMARQUES 2.1.11. Si X n'est pas quasi-compact, il faut remplacer "complexes bornés" par "complexes localement bornés" et "complexes de Tor-dimension finie" par "complexes localement de Tor-dimension finie".

PROPOSITION 2.1.12. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des faisceaux d'anneaux sur X résolubles deux à deux* (2.1.9), *$\mathcal{E} \in D({}^g\mathcal{A})$, $\mathcal{F} \in D^+({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$, et $\mathcal{G} \in$ $\in D_{(\mathrm{tdf},.)}({}^g\mathcal{B}, \mathcal{C}^d)$.*

(i) *Il existe alors un homomorphisme canonique dans $D({}^*\mathcal{C})$, fonctoriel en $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$:*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}).$$

Celui-ci est un isomorphisme quand $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$.

(ii) *L'isomorphisme de* i) *est transitif, i.e., si* $\mathcal{H} \in D_{(\mathrm{tdf},.)}({}^g\mathcal{C}, \mathcal{D}^d)$, *on dispose du diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H}) \\ & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H}. \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(iii) *Lorsque* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{C}$ *sont égaux à* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$, *le morphisme canonique*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{G} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{G})$$

est compatible à Frobenius.

PREUVE. Pour la première partie, il suffit de résoudre $\mathcal{F}$ injectivement et $\mathcal{G}$ platement. La transitivité du morphisme ainsi construit est immédiate. Il reste à vérifier la compatibilité à Frobenius. Par transitivité (voir ii)), on dispose du diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} F^\flat(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\mathcal{G} \arrow[d] \\ F^\flat\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\mathcal{G}). \end{tikzcd} \tag{2.1.12.1}$$

De plus, via l'isomorphisme $F^\flat\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} (F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\mathcal{G} \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim} F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G}$, on bénéficie par fonctorialité du diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\mathcal{G} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G}). \end{tikzcd}$$

En invoquant la transitivité de ii), on obtient celle de

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},F^\flat\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G} \arrow[d] \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^\flat\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E},F^\flat\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^\flat\mathcal{G}). \end{tikzcd} \tag{2.1.12.2}$$

Enfin, en résolvant $F^*F^\flat\mathcal{G}$ platement et $F^\flat\mathcal{F}$ injectivement, on calcule que le diagramme

$$
(2.1.12.3)\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}, F^{\flat}\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^{*}F^{\flat}\mathcal{G} & \xrightarrow[\sim]{F^{*}\otimes id} & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}}(F^{*}\mathcal{E}, F^{*}F^{\flat}\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^{*}F^{\flat}\mathcal{G} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}, F^{\flat}\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^{*}F^{\flat}\mathcal{G}) & \xrightarrow[\sim]{F^{*}} & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}}(F^{*}\mathcal{E}, F^{*}F^{\flat}\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^{*}F^{\flat}\mathcal{G}).
\end{array}
$$

est commutatif. En mettant bout à bout ces quatre diagrammes commutatifs, on obtient celui signifiant la commutativité à Frobenius du morphisme de 2.1.12.(iii). □

Sous d'autres hypothèses, on a la proposition analogue 2.1.19 que nous utiliserons pour prouver (entre autres), 2.1.26 et 2.1.36. Avant de prouver 2.1.19, nous aurons besoin de ce qui suit.

PROPOSITION 2.1.13. ISOMORPHISMES DE CARTAN. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{C}$ des faisceaux d'anneaux sur X, $\mathcal{E} \in D^{-}({}^{g}\mathcal{A}, \mathcal{A}'^{d})$ (resp. $D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^{g}\mathcal{A}, \mathcal{A}'^{d})$), $\mathcal{F} \in D^{-}({}^{g}\mathcal{A}', {}^{*}\mathcal{C})$ (resp. $D({}^{g}\mathcal{A}', {}^{*}\mathcal{C})$) et $\mathcal{G} \in D^{+}({}^{g}\mathcal{A}, {}^{*}\mathcal{C})$.*

On a les isomorphismes fonctoriels:

$$
(2.1.13.1)\qquad
\begin{aligned}
&\mathbb{R}\mathcal{H}om_{({}^{g}\mathcal{A},*\mathcal{C})}(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{({}^{g}\mathcal{A}',*\mathcal{C})}(\mathcal{F}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^{g}\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}))\\
&\mathbb{R}\mathrm{Hom}_{({}^{g}\mathcal{A},*\mathcal{C})}(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{Hom}_{({}^{g}\mathcal{A}',*\mathcal{C})}(\mathcal{F}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^{g}\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}))\\
&\mathrm{Hom}_{({}^{g}\mathcal{A},*\mathcal{C})}(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{({}^{g}\mathcal{A}',*\mathcal{C})}(\mathcal{F}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^{g}\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G})).
\end{aligned}
$$

PREUVE. Par commodité, notons par la même lettre $\mathcal{R}$, les anneaux de résolution (2.1.9). Soient $\mathcal{P}$ une résolution droite de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{A}'$-modules plats et $\mathcal{I}$ une résolution gauche de $\mathcal{G}$ par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{C}$-modules injectifs (ou par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{C}^{0}$-modules injectifs selon que $* = g$ ou $* = d$). Ces résolutions permettent de calculer les termes de gauche des isomorphismes de la proposition. En outre, il résulte de [sga72, V.1.2.1], que $\mathcal{H}om_{{}^{g}\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$ est un complexe de $\mathcal{A}'$-modules injectifs borné inférieurement. Ces deux résolutions permettent donc aussi de calculer les termes de droite des isomorphismes de la proposition. □

REMARQUES 2.1.14. Avec les notations de 2.1.13, on se donne $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un morphisme de $D^{-}({}^{g}\mathcal{A}, \mathcal{A}'^{d})$ (resp. $D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^{g}\mathcal{A}, \mathcal{A}'^{d})$), $g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morphisme de $D^{-}({}^{g}\mathcal{A}', {}^{*}\mathcal{C})$ (resp. $D({}^{g}\mathcal{A}', {}^{*}\mathcal{C})$) et $h : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ un morphisme de $D^{+}({}^{g}\mathcal{A}, {}^{*}\mathcal{C})$. En notant Ca, la bijection 2.1.13.1, les diagrammes suivants de droite sont commutatifs si et seulement si ceux situés à leur gauche le sont.

(2.1.14.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "id\otimes g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G} \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F}' \arrow[r, "\phi'"] & \mathcal{G}'
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{Ca}(\phi)"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) \arrow[d, "h"] \\
\mathcal{F}' \arrow[r, "\mathrm{Ca}(\phi')"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}'),
\end{tikzcd}$$

(2.1.14.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f\otimes g"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{G} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathcal{F}' \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{Ca}(\phi)"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) \\
\mathcal{F}' \arrow[r, "\mathrm{Ca}(\phi')"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}', \mathcal{G}). \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.1.15. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}$ des faisceaux d'anneaux sur X, $\mathcal{E} \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{A}'^d)$, $\mathcal{F} \in D^+({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$. On dispose du morphisme canonique dans $D^+({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$, dit morphisme d'évaluation et fonctoriel en $\mathcal{F}$:*

$$\mathrm{ev} \ : \ \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}.$$

Preuve. On résout $\mathcal{E}$ platement et $\mathcal{F}$ injectivement. □

Remarques 2.1.16. i) Via l'isomorphisme de Cartan 2.1.13.1, le morphisme d'évaluation de 2.1.15 correspond à l'identité de $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

ii) Le morphisme d'évaluation n'est pas fonctoriel en $\mathcal{E}$, mais, si $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme dans $D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{A}'^d)$, le diagramme suivant est commutatif

(2.1.16.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathcal{F} \\
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}) \arrow[r, "f\otimes id"] \arrow[u, "id\otimes f"] & \mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}). \arrow[u, "\mathrm{ev}"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.1.17. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des faisceaux d'anneaux sur X d'anneau de résolution $\mathcal{R}$. Soient $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$, $\mathcal{F} \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ et $\mathcal{G} \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{B}, {}^*\mathcal{C})$.*

i) *Il existe un isomorphisme canonique dans $D(*\mathcal{C})$, fonctoriel en $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$:*

(2.1.17.1)
$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}).$$

ii) *L'isomorphisme de* i) *est transitif, i.e., si* $\mathcal{G} \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{B}, {}^d\mathcal{C})$ *et si* $\mathcal{H} \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{C}, \mathcal{D}^*)$*, on dispose du diagramme commutatif*

(2.1.17.2)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H}) \\
& \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H}. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

iii) *Soient* $\mathcal{A}'$ *une* $\mathcal{R}$*-algèbre plate, telle que* $\mathcal{R}$ *soit dans le centre de* $\mathcal{A}'$*, et* $\mathcal{M}$ *un* $(\mathcal{A}', \mathcal{A})$*-bimodule tel que* $\mathcal{M}$ *soit* $\mathcal{A}$*-plat et tel que, pour tout* $\mathcal{A}$*-module plat (resp. injectif, resp. localement projectif de type fini)* $\mathcal{H}$*, le* $\mathcal{A}'$*-module* $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$ *soit plat (resp. injectif, resp. localement projectif de type fini). En notant* $\rho : \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(-, -) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}'}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} -, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} -)$*, le diagramme*

(2.1.17.3)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\rho\otimes id"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \arrow[d, "\rho"] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}'}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}'}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}),
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont celles de i), est commutatif.

Preuve. Construisons d'abord le morphisme 2.1.17.1. En utilisant 2.1.10.(ii), le terme de gauche de 2.1.17.1 a un sens, tandis que pour celui de droite, cela est immédiat. Construisons maintenant le morphisme 2.1.17.1. Posons, $\mathcal{F}' = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}' = \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$. D'après 2.1.10.(ii), $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{B}^d)$. On en déduit que $\mathcal{F}' \in D^{\mathrm{b}}(\mathcal{R})$. On a aussi $\mathcal{G}' \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{A}, *\mathcal{C})$. Via l'isomorphisme de Cartan 2.1.13.1 (appliqué à $\mathcal{A}' := \mathcal{R}$, $\mathcal{F} := \mathcal{F}'$ et $\mathcal{G} := \mathcal{G}'$), que l'on notera Ca, on se ramène à construire un morphisme dans $D({}^g\mathcal{A}, {}^*\mathcal{C})$ de la forme

$$\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}.$$

Comme $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{R}$-algèbre plate, $\mathcal{E} \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{R})$. La proposition 2.1.15.(ii), nous donne alors un morphisme canonique dans $D^-({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$: $\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}$. En lui appliquant le foncteur $- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$, on obtient le morphisme 2.1.17.1, que l'on notera θ (ainsi que ceux construits de manière identique). La fonctorialité de θ en $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est immédiate. Vérifions à présent celle en $\mathcal{E}$. En appliquant $\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G}$ à 2.1.16.1, on obtient le diagramme commutatif

(2.1.17.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r, "ev\otimes id"] & \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \\
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r, "f\otimes id"] \arrow[u, "id\otimes f\otimes id"] \arrow[ur, "comp"] & \mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}, \arrow[u, "ev\otimes id"']
\end{tikzcd}$$

où “comp” désigne le morphisme composé. Grâce à 2.1.14.1 (resp. 2.1.14.2), la commutativité du triangle supérieur (resp. inférieur) de 2.1.17.4 implique celle du diagramme

(2.1.17.5)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, "f\otimes id"] \arrow[ur, "\mathrm{Ca(comp)}"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}',\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}). \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

D'où la fonctorialité en $\mathcal{E}$ de θ. Pour prouver que θ est un isomorphisme, par localisation puis dévissage, on se ramène au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{A}$. Dans ce cas, $\mathrm{ev} \otimes id$ s'identifie au morphisme canonique $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$. En résolvant injectivement $\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$, on calcule alors que $\mathrm{Ca}(\mathrm{ev} \otimes id)$ s'identifie au morphisme canonique $\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G})$, qui est un isomorphisme.

Vérifions à présent 2.1.17.2. Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[rr, "\mathrm{ev}\otimes id"] \arrow[dr, "id\otimes\theta"'] & & \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \\
& \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, cela résulte de 2.1.14.1 et du fait que $\mathrm{Ca}(\mathrm{ev})$ est l'identité de $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G})$ (2.1.16) et, par construction, $\theta = \mathrm{Ca}(\mathrm{ev} \otimes id)$. On en déduit la commutativité de

(2.1.17.6)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H} \arrow[rr, "\mathrm{ev}\otimes id\otimes id"] \arrow[dr, "id\otimes\theta\otimes id"'] & & \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H} \\
& \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{C}} \mathcal{H}. \arrow[ur, "\mathrm{ev}\otimes id"'] &
\end{tikzcd}$$

Grâce à 2.1.14.1, on obtient celle de 2.1.17.2.

Il reste à prouver 2.1.17.3. Pour tout complexe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{A}$-module, pour tout $m \in \mathcal{M}$, notons $m : \mathcal{H} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}$, le morphisme $\mathcal{R}$-linéaire défini par $h \mapsto m \otimes h$. Pour conclure la démonstration, nous aurons besoin du lemme qui suit.

Lemme 2.1.18. *Soient $\theta : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ un morphisme dans $D(*\mathcal{C})$, $\mathcal{G}_1 \in D^+({}^g\mathcal{A}, *\mathcal{C})$, $f : \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_1 \to \mathcal{G}_1$ un morphisme $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-linéaire et $g : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2 \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_1$ un morphisme $(\mathcal{A}', \mathcal{C})$-linéaire. Si, pour tout*

$m \in \mathcal{M}$, le diagramme de gauche suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m\otimes\theta"] & \mathcal{G}_1 \arrow[d, "m"] & \mathcal{F}_1 \arrow[r, "\mathrm{Ca}(f)"] \arrow[d, "\theta"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}_1) \arrow[d, "\rho"] \\
\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathcal{F}_2 \arrow[r, "g"] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_1, & \mathcal{F}_2 \arrow[r, "\mathrm{Ca}(g)"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g\mathcal{A}'}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{G}_1)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, alors celui de droite l'est aussi.

Preuve. Cela se vérifie par un calcul, après avoir résolu $\mathcal{E}$ platement et $\mathcal{G}_1$ injectivement. □

En résolvant platement $\mathcal{E}$ et injectivement $\mathcal{F}$, on vérifie que, pour tout $m \in \mathcal{M}$, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "m\otimes\rho"] & \mathcal{F} \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g\mathcal{A}'}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En lui appliquant le foncteur $- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$, on obtient, pour tout $m \in \mathcal{M}$, le suivant

(2.1.18.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes id"] \arrow[d, "m\otimes\rho\otimes id"] & \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[d, "m\otimes id"] \\
\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g\mathcal{A}'}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes id"] & \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

Grâce au lemme 2.1.18, la commutativité de 2.1.18.1 implique celle de 2.1.17.3.

Proposition 2.1.19. *Soient $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$, $\mathcal{F}' \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$ et $\mathcal{G}' \in D^{\mathrm{b}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$.*

L'isomorphisme

(2.1.19.1)
$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{G}' \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{G}')$$

construit en 2.1.17.1 *est compatible à Frobenius.*

Preuve. Il suffit de reprendre la preuve de 2.1.12.iii). En effet, on dispose de la commutativité du diagramme 2.1.17.2 qui implique celle de 2.1.12.1 et 2.1.12.2. Enfin, celle de 2.1.17.3 nous permet d'obtenir celle de 2.1.12.3. □

PROPOSITION 2.1.20. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des faisceaux d'anneaux sur X d'anneau de résolution $\mathcal{R}$, $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$, $\mathcal{F} \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ et $\mathcal{G} \in D_{(\mathrm{tdf},.)}({}^g\mathcal{B}, *\mathcal{C})$.*

Alors, les deux constructions (2.1.17 *et* 2.1.12) *de* $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to$ $\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G})$ *coïncident.*

PREUVE. Notons $\theta : \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G})$, le morphisme construit dans 2.1.12 et $\phi : \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{R}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \to \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}$ celui que l'on déduit de θ via l'isomorphisme de Cartan. Soit $\mathcal{P}$ une résolution plate bornée de $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$ une résolution injective de $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}'$ une résolution plate bornée de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{I}'$ une résolution injective de $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}'$. Le morphisme θ correspond au morphisme composé $\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}' \to \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}') \to \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I}')$. Par construction de l'isomorphisme de Cartan, on calcule que ϕ correspond à $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}' \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes id} \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}'$. Ainsi, $\phi = \mathrm{ev} \otimes id$. Il en résulte que θ est le même que celui de 2.1.17. $\square$

PROPOSITION 2.1.21. *Soient $\mathcal{M}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à droite, $\mathcal{E}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module à gauche et $\mathcal{N}'$ un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-bimodule. Les isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}', \tag{2.1.21.1}$$

$$\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} (\mathcal{N}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{N}') \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}', \tag{2.1.21.2}$$

sont $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaires et compatibles à Frobenius.

PREUVE. Commençons par prouver la $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité du morphisme 2.1.21.1, que l'on notera ρ. Dans un premier temps, supposons $\mathcal{N}'$ égal à $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$. La proposition étant locale, il suffit de le vérifier sur un ouvert possédant des coordonnées locales. Par linéarité, il suffit de montrer que, pour tous $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, $m \in \Gamma(X', \mathcal{M}')$, $e \in \Gamma(X', \mathcal{E}')$, on ait $\rho([m \otimes (1 \otimes e)]\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}) = (m \otimes e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$.

Or,

$$[m \otimes (1 \otimes e)]\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = m \otimes (1 \otimes e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$$

et $(1 \otimes e)\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} e$ (1.1.24.1). D'où, $\rho([m \otimes (1 \otimes e)]\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}) =$ $= \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|} m \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{h} \rangle} \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h} \rangle} e = [m \otimes e]\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ (la dernière égalité résulte de 1.1.24.1).

Passons maintenant au cas général. Le premier cas (appliqué à $\mathcal{M}' = \mathcal{N}'$) nous donne un isomorphisme, $\mathcal{N}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim}$

$\xrightarrow{\sim} \mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire à droite. Par fonctorialité, celui-ci est aussi $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire à gauche. Il en découle les isomorphismes $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaires

$$\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \xleftarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{N}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}',$$

le dernier isomorphisme résultant aussi du premier cas.

Afin de prouver la compatibilité à Frobenius de 2.1.21.1, démontrons d'abord que le diagramme canonique suivant

$$\begin{tikzcd} F^{\flat}[\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}')] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^{\flat}(\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (F^{\flat}\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}') \arrow[d, "\sim"'] \\ F^{\flat}[(\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}'] \arrow[r, "\sim"'] & F^{\flat}(\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] & (\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^{\flat}\mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}', \end{tikzcd} \tag{2.1.21.3}$$

où les morphismes verticaux se déduisent de 2.1.21.1, est commutatif. Pour cela, soient m' une section locale de $\mathcal{M}'$, n' de $\mathcal{N}'$, e' de $\mathcal{E}'$ et θ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'})$. Le morphisme composé du haut du diagramme 2.1.21.3 envoie la section $[m' \otimes (n' \otimes e')] \otimes \theta$ sur $m' \otimes [(n' \otimes \theta) \otimes (1 \otimes e')]$; celui de droite envoie $m' \otimes [(n' \otimes \theta) \otimes (1 \otimes e')]$ sur $[m' \otimes (n' \otimes \theta)] \otimes (1 \otimes e')$; celui de gauche envoie $[m' \otimes (n' \otimes e')] \otimes \theta$ sur $[(m' \otimes n') \otimes e'] \otimes \theta$ et enfin celui du bas envoie $[(m' \otimes n') \otimes e'] \otimes \theta$ sur $[m' \otimes (n' \otimes \theta)] \otimes (1 \otimes e')$. Le diagramme 2.1.21.3 est donc commutatif.

Ensuite, via (l'inverse de) l'isomorphisme canonique ϕ: $F^{\flat}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$, on vérifie par un calcul (on écrit l'image de 1 par ϕ^{-1} etc.) la commutativité du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (F^{\flat}\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^{\flat}\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} (F^*F^{\flat}\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}') \arrow[d, "\sim"'] \\ (\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} F^{\flat}\mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}' \arrow[r, "\sim"'] & (F^{\flat}\mathcal{M}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}} F^*F^{\flat}\mathcal{N}') \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{E}'. \end{tikzcd} \tag{2.1.21.4}$$

En composant 2.1.21.3 et 2.1.21.4, on obtient le diagramme signifiant que l'isomorphisme 2.1.21.1 est compatible à Frobenius.

Quant au deuxième isomorphisme de la proposition, on procède de façon similaire. □

Corollaire 2.1.22. *Le foncteur $\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} -$ de la catégorie des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche dans celle des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à droite est canoniquement isomorphe au foncteur $(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}) \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} -$.*

Preuve. En prenant $\mathcal{M}' = \omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{B}_{X'}$ et $\mathcal{N}' = \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$, cela résulte de 2.1.21.2. □

REMARQUES 2.1.23. Les propositions 2.1.1 et 2.1.22 permettent dans les propositions de cette section, de remplacer “$\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module(s) à gauche” par “$\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module(s) à droite”, et réciproquement.

PROPOSITION 2.1.24. *Soient* $\mathcal{E}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathcal{N}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)d})$, $\mathcal{M}' \in D^-(\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)d})$. *On dispose des isomorphismes suivants*

$$\mathcal{M}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} (\mathcal{N}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} \mathcal{N}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}', \tag{2.1.24.1}$$

$$\mathcal{M}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} (\mathcal{N}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} \mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{N}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} \mathcal{E}', \tag{2.1.24.2}$$

$\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$*-linéaires et compatibles à Frobenius.*

PREUVE. Il suffit de résoudre $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{N}'$ platement puis d'utiliser 2.1.21.2 et 2.1.21.1. □

PROPOSITION 2.1.25. *Soient* $\mathcal{E}'$ *et* $\mathcal{G}'$ *deux* $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$*-modules à gauche et* $\mathcal{F}'$ *un* $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$*-bimodule. Le morphisme canonique*

$$\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \to \mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'), \tag{2.1.25.1}$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$*-linéaire et compatible à Frobenius.*

PREUVE. L'inverse de l'isomorphisme 2.1.21.1 appliqué à $\mathcal{M}' = \mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$, $\mathcal{N}' = \widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$ et $\mathcal{E}' = \mathcal{G}'$ s'écrit

$$\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}').$$

De plus, on dispose du morphisme canonique

$$\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}') \to \mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}')).$$

Enfin, en utilisant 2.1.21.1, on obtient :

$$\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}} (\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}')) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}').$$

En composant ces trois morphismes, on obtient 2.1.25.1. On termine la preuve en constatant que ceux-ci sont $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaires et compatibles à Frobenius. En effet, en procédant de manière analogue à la preuve de 2.1.12(iii) (on enlève $\mathbb{R}$ et $\mathbb{L}$), on prouve que le deuxième morphisme est compatible à Frobenius. Pour les deux autres, cela résulte de 2.1.21.1. □

PROPOSITION 2.1.26. *Soient* $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$ *(resp.* $\mathcal{E}' \in D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$*),*

$\mathcal{F}' \in D_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$ (resp. $D^+({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$) et $\mathcal{G}' \in D^{\mathrm{b}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$ (resp. $D_{\mathrm{tdf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$).

Il existe un isomorphisme (resp. morphisme) canonique fonctoriel dans $D(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$ et compatible à Frobenius

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}').$$

Dans le cas respectif, celui-ci est un isomorphisme si $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$ ou $\mathcal{G}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}_{X'})$.

Preuve. Pour le cas respectif, on résout $\mathcal{F}'$ injectivement et $\mathcal{G}'$ platement. Sinon, grâce aux propositions 2.1.19 et 2.1.24, il suffit de calquer la démonstration de la proposition 2.1 (en rajoutant des $\mathbb{R}$ et des $\mathbb{L}$). □

Proposition 2.1.27. *Soient $\mathcal{M}'$ un complexe de $D^-({}^gf^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)d}_{X'})$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}'$ deux complexes de $D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$. On a alors un isomorphisme canonique dans $D^-({}^gf^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X})$ compatible à Frobenius:*

$$(\mathcal{M}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} \mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}} (\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}').$$

Preuve. Grâce à 2.1.24.1, 2.1.8 puis 2.1.24.2, il suffit de reprendre la démonstration de [Car04b, 1.2.23]. □

Proposition 2.1.28. *Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche. Le morphisme d'évaluation*

$$\mathrm{ev} : \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{E}' \to \mathcal{F}',$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire et compatible à Frobenius.

Preuve. La compatibilité à Frobenius signifie que le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_X} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{F}') \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
F^*(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}')) \arrow[r, "F^*\mathrm{ev}"] & F^*\mathcal{F}'
\end{tikzcd} \tag{2.1.28.1}$$

est commutatif. L'assertion est locale et on peut supposer que Frobenius se relève. La commutativité de 2.1.28.1 se résout alors à la main.

Traitons à présent la $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité. La proposition étant locale, il suffit de le vérifier sur un ouvert possédant des coordonnées locales. Soient $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, ϕ une section de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}')$ et e une section de $\mathcal{E}'$. D'après la formule 1.1.18.1, $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes e)=\sum_{\underline{i}\leq \underline{k}}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right\}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}\phi)\otimes(\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle}e)$. Via 1.1.18.2, il en dérive :

$$\mathrm{ev}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes e))=\sum_{\underline{i}\leq\underline{k}}\sum_{\underline{j}\leq\underline{k}-\underline{i}}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{matrix}\right\}(-1)^{|\underline{j}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}-\underline{i}\\ \underline{j}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}-\underline{j}\rangle}\left(\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle}e)\right).$$

En posant $\underline{l}=\underline{i}+\underline{j}$, il en dérive:

$$\mathrm{ev}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes e))=\sum_{\underline{l}\leq\underline{k}}\sum_{\underline{i}\leq\underline{l}}(-1)^{|\underline{l}-\underline{i}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\underline{k}-\underline{i}\\ \underline{l}-\underline{i}\end{matrix}\right\}\left\langle\begin{matrix}\underline{l}\\ \underline{i}\end{matrix}\right\rangle\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{l}\rangle}(\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle}e)).$$

Pour $\underline{k}$ et $\underline{l}$ fixés, l'entier $\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}-\underline{i}\\ \underline{l}-\underline{i}\end{smallmatrix}\right\}\left\langle\begin{smallmatrix}\underline{l}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right\rangle$ est égal à une constante multipliée par $\left(\begin{smallmatrix}\underline{l}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right)$. D'où $\mathrm{ev}(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes e))=\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi(e))$. □

Corollaire 2.1.29. *Soient $\mathcal{E}'\in D_{\mathrm{tdf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$ et $\mathcal{F}'\in D^+({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$. Le morphisme canonique d'évaluation*

$$\mathrm{ev}\ :\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{E}'\to\mathcal{F}'$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius.

Preuve. Il suffit de prendre une résolution gauche bornée de $\mathcal{E}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche plats et une résolution droite de $\mathcal{F}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules injectifs, puis d'appliquer la proposition 2.1.28.

Proposition 2.1.30. *Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche. L'isomorphisme canonique*

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{F}',\mathcal{G}')\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')),\tag{2.1.30.1}$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius.

Preuve. Notons θ les isomorphismes de la forme 2.1.30.1. La compatibilité à Frobenius de θ signifie que le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd}
F^*[\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{F}',\mathcal{G}')] \arrow[r, "F^*\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*[\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}'))] \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*(\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{F}'),F^*\mathcal{G}') \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')) \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{F}',F^*\mathcal{G}') \arrow[r, "\theta", "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{F}',F^*\mathcal{G}'))
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Cela se vérifie par un calcul : pour tout $b_0 \in \mathcal{B}_X$, pour tout $\phi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}')$, $b_0 \otimes \phi$, s'envoie par les deux chemins possibles sur $b_1 \otimes e' \mapsto (b_2 \otimes f' \mapsto b_0 b_1 b_2 \otimes \phi(e' \otimes f'))$, où $b_1, b_2 \in \mathcal{B}_X$, $e' \in \mathcal{E}'$ et $f' \in \mathcal{F}'$.

Prouvons maintenant sa $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité. L'assertion étant locale, on se ramène au cas où X' est un ouvert affine muni de coordonnées locales. Soient $\underline{k}$ un élément de $\mathbb{N}^d$, ϕ une section $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}')$, e une section de $\mathcal{E}'$ et f de $\mathcal{F}'$. Par $\mathcal{B}_{X'}$-linéarité, il suffit alors d'établir:

$$\big[\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi)\big](e)(f) = \big[\theta(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\phi)\big](e)(f).$$

D'après 1.1.18.2,

$$\big[\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi)\big](e) = \sum_{\underline{h}\leq\underline{k}} (-1)^{|\underline{h}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle}\big(\theta(\phi)(\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}e)\big).$$

Encore d'après 1.1.18.2, on obtient alors

$$\big[\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi)\big](e)(f) = \sum_{\underline{h}\leq\underline{k}}\ \sum_{\underline{l}\leq\underline{k}-\underline{h}} (-1)^{|\underline{h}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}(-1)^{|\underline{l}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}-\underline{h}\\ \underline{l}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}-\underline{l}\rangle}\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}e\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle}f).$$

En posant $\underline{i} := \underline{h} + \underline{l}$, cela devient

$$\big[\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi)\big](e)(f) = \sum_{\underline{i}\leq\underline{k}}\ \sum_{\underline{h}\leq\underline{i}} (-1)^{|\underline{i}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\underline{k}-\underline{h}\\ \underline{i}-\underline{h}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}e\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{i}-\underline{h}\rangle}f).$$

On remarque que $\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{h}\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}-\underline{h}\\ \underline{i}-\underline{h}\end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}\\ \underline{h}\end{smallmatrix}\right\}$. On en déduit, via 1.1.18.1 (pour l'égalité de gauche) et 1.1.18.2 (pour celle du milieu), les formules

$$\big[\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi)\big](e)(f) = \sum_{\underline{i}\leq\underline{k}} (-1)^{|\underline{i}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle}(e\otimes f)) =$$
$$= (\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\phi)(e\otimes f) = \big[\theta(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\phi)\big](e)(f). \qquad \square$$

Proposition 2.1.31. *Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$ des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche. Le morphisme canonique:*

(2.1.31.1) $$\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}')$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire et compatible à Frobenius.

Preuve. Notons θ les morphismes de la forme 2.1. Pour la compatibilité à Frobenius, il s'agit d'établir la commutativité du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
F^*[\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}'] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "F^*(\theta)"] & F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{G}' \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}')\otimes_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{G}' \arrow[d, "\theta"] \\
F^*[\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}'\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}')] \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*(\mathcal{F}'\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}')) \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}'\otimes_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{G}').
\end{tikzcd}$$

Pour cela, on calcule que, pour tous $b_0\in\mathcal{B}_X$, $\phi\in\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')$, $g'\in\mathcal{G}'$, la section $b_0\otimes\phi\otimes g'$ s'envoie pour les deux chemins sur $(b_1\otimes e'\mapsto b_0b_1\otimes\phi(e')\otimes(1\otimes g'))$, avec $b_1\in\mathcal{B}_X$, $e'\in\mathcal{E}'$ et $g'\in\mathcal{G}'$.

Traitons à présent la $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité. Par $\mathcal{B}_{X'}$-linéarité, il suffit de calculer que, pour tout $\underline{k}\in\mathbb{N}^d$, pour toutes sections ϕ de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')$, e de $\mathcal{E}'$ et g de $\mathcal{G}'$,

$$\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi\otimes g)\big)(e)=\theta\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes g)\big)(e).$$

Or, via la formule 1.1.18.2, on établit l'égalité :

$$\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi\otimes g)\big)(e)=\sum_{\underline{j}\leq\underline{k}}(-1)^{|\underline{j}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{j}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{j}\rangle}\big(\theta(\phi\otimes g)(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}e)\big).$$

Comme $\theta(\phi\otimes g)(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}e)=\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}e)\otimes g$, grâce à 1.1.18.1, il en dérive la relation

$$\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}\theta(\phi\otimes g)\big)(e)=\sum_{\underline{j}\leq\underline{k}}\ \sum_{\underline{l}\leq\underline{k}-\underline{j}}(-1)^{|\underline{j}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{j}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\underline{k}-\underline{j}\\ \underline{l}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{l}\rangle}\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}e)\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{j}-\underline{l}\rangle}g.$$

Calculons à présent $\theta\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes g)\big)(e)$. D'abord $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes g)=$ $=\sum_{\underline{i}\leq\underline{k}}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle}\phi\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}g$ (1.1.18.1). Puis, via 1.1.18.2, on obtient: $\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle}\phi\big)(e)=$ $=\sum_{\underline{j}\leq\underline{i}}(-1)^{|\underline{j}|}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}\\ \underline{j}\end{smallmatrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{i}-\underline{j}\rangle}\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}e)$. Il en dérive:

$$\theta\big(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\phi\otimes g)\big)(e)=\sum_{\underline{i}\leq\underline{k}}\ \sum_{\underline{j}\leq\underline{i}}(-1)^{|\underline{j}|}\left\{\begin{matrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\underline{i}\\ \underline{j}\end{matrix}\right\}\underline{\partial}^{\langle \underline{i}-\underline{j}\rangle}\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{j}\rangle}e)\otimes\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}g.$$

En posant $\underline{l}=\underline{i}-\underline{j}$, on constate que $\underline{0}\leq\underline{l}\leq\underline{k}-\underline{j}$ équivaut à $\underline{j}\leq\underline{i}\leq\underline{k}$. De plus, on vérifie les égalités $\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{j}\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}-\underline{j}\\ \underline{l}\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{j}\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}-\underline{j}\\ \underline{i}-\underline{j}\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}\underline{k}\\ \underline{i}\end{smallmatrix}\right\}\left\{\begin{smallmatrix}\underline{i}\\ \underline{j}\end{smallmatrix}\right\}$. D'où le résultat. □

Proposition 2.1.32. *Soient $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules à gauche.*

i) *On dispose d'un isomorphisme canonique:*

(2.1.32.1) $$\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}'\otimes_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{F}',\mathcal{G}')\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')).$$

ii) *Le morphisme canonique* $F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{F}', F^*\mathcal{G}')$ *est un isomorphisme.*

iii) *Si la structure de* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$*-module de* $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$ *ou* $\mathcal{G}'$ *se prolonge en une structure de* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$*-bimodule ou bimodule à gauche, alors l'isomorphisme* 2.1.32.1 *est* $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$*-linéaire et compatible à Frobenius.*

Preuve. Notons θ l'isomorphisme canonique suivant:

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')).$$

Soit ϕ un morphisme de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}')$. Vérifions que si ϕ est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire alors $\theta(\phi)$ l'est aussi. Par $\mathcal{B}_{X'}$-linéarité, il suffit de prouver que, pour tout $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$, pour toutes sections e de $\mathcal{E}'$ et f de $\mathcal{F}'$, on a

$$\theta(\phi)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} e)(f) = \underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\theta(\phi)(e))(f).$$

D'après 1.1.18.2,

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\theta(\phi)(e))(f) = \sum_{\underline{h}\leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}(\theta(\phi)(e)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} f)).$$

Comme $\theta(\phi)(e)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} f) = \phi(e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} f)$, par $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité de ϕ, on obtient

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\theta(\phi)(e))(f) = \phi\left(\sum_{\underline{h}\leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}(e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} f) \right).$$

Or, d'après 1.1.18.1, on a $\underline{\partial}^{\langle \underline{h}\rangle}(e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} f) = \sum_{\underline{i}\leq \underline{h}} \left\{ \begin{smallmatrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{smallmatrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle} e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{h}-\underline{i}\rangle} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} f$. En réordonnant les deux sommes, et comme $\underline{\partial}^{\langle \underline{h}-\underline{i}\rangle} \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{h}\rangle} = \left\langle \begin{smallmatrix} \underline{k}-\underline{i} \\ \underline{h}-\underline{i} \end{smallmatrix} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle}$, il en dérive la formule:

$$\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\theta(\phi)(e))(f) = \phi\left(\sum_{\underline{i}\leq \underline{k}} \sum_{\underline{i}\leq \underline{h}\leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} \underline{k}-\underline{i} \\ \underline{h}-\underline{i} \end{matrix} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle \underline{i}\rangle} e \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i}\rangle} f \right).$$

Or, pour $\underline{k}$ et $\underline{i}$ fixés et en posant $\underline{l} := \underline{k} - \underline{h}$, on obtient:

$$\sum_{\underline{i}\leq \underline{h}\leq \underline{k}} (-1)^{|\underline{k}-\underline{h}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} \underline{k}-\underline{i} \\ \underline{h}-\underline{i} \end{matrix} \right\rangle = \sum_{\underline{0}\leq \underline{l}\leq \underline{k}-\underline{i}} (-1)^{|\underline{l}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{l} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{k}-\underline{l} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} \underline{k}-\underline{i} \\ \underline{k}-\underline{l}-\underline{i} \end{matrix} \right\rangle =$$

$$= c \sum_{\underline{0}\leq \underline{l}\leq \underline{k}-\underline{i}} (-1)^{|\underline{l}|} \binom{\underline{k}-\underline{i}}{\underline{l}},$$

où c est une constante. Il en dérive $\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle}(\theta(\phi)(e))(f) = \phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} e \otimes f) = \theta(\phi)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}\rangle} e)(f)$.

Réciproquement, via le calcul analogue qui suit, la $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéarité de $\psi := \theta(\phi)$ implique celle de ϕ.

$$\phi(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}(e \otimes f)) = \sum_{\underline{h} \leq \underline{k}} \sum_{\underline{i} \leq \underline{h}} (-1)^{|\underline{h}-\underline{i}|} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{h} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \underline{h} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \left\langle \begin{matrix} \underline{k} - \underline{i} \\ \underline{h} - \underline{i} \end{matrix} \right\rangle \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}(\psi(e)(\underline{\partial}^{\langle \underline{k}-\underline{i} \rangle} f)) =$$

$$= \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}(\psi(e)(f)) = \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle} \phi(e \otimes f).$$

L'isomorphisme θ induit donc celui de 2.1.32.1. Notons-le $\rho^{(m)}_{X'}$. A présent, prouvons ii). Le diagramme canonique

(2.1.32.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}', \mathcal{G}') \arrow[r, "F^*", "\sim"'] \arrow[d, "\rho^{(m)}_{X'}", "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(F^*(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{F}'), F^*\mathcal{G}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}} F^*\mathcal{F}', F^*\mathcal{G}') \arrow[d, "\rho^{(m+s)}_{X}", "\sim"'] \\
\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')) \arrow[r, "F^*", "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')) \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(F^*\mathcal{F}', F^*\mathcal{G}')),
\end{tikzcd}$$

où l'on a omis d'indiquer "$(m+s)$", "m", "X" ou "X'", est commutatif. En effet, si $\phi \in \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}')$, la section locale de

$$\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}}(F^*\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{F}', F^*\mathcal{G}'))$$

induite via le chemin du haut ou du bas est $a_1 \otimes e' \mapsto (a_2 \otimes f' \mapsto a_1 a_2 \phi(e' \otimes f'))$, avec a_1 et $a_2 \in \mathcal{B}_X$ et $f' \in \mathcal{F}'$. Comme tout $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_X$-module est de la forme $F^*\mathcal{E}'$, il découle de 2.1.32.2, que le morphisme $F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \to$ $\to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{F}', F^*\mathcal{G}')$ est donc un isomorphisme.

Maintenant, prouvons la partie iii) de la proposition. Contentons-nous de traiter le cas où $\mathcal{G}'$ est un bimodule. Soient $\phi \in \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}')$ et $P \in \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$. On calcule que $\rho^{(m)}_{X'}(\phi P) = \rho^{(m)}_{X'}(\phi)P = e \mapsto (f \mapsto \phi(e \otimes f)P)$. L'application $\rho^{(m)}_{X'}$ est donc $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire. Il reste à traiter la compatibilité à Frobenius. On notera que, puisque $\mathcal{O}_X$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{X'}$, le morphisme $F^\flat \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}') \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', F^\flat \mathcal{G}')$ est un isomorphisme. On vérifie ensuite par un calcul la commutativité du diagramme suivant

(2.1.32.3)
$$\begin{tikzcd}
F^\flat \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}') \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "F^\flat \rho^{(m)}_{X'}"] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', F^\flat \mathcal{G}') \arrow[d, "\rho^{(m)}_{X'}"] \\
F^\flat \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', \mathcal{G}')) \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', F^\flat \mathcal{G}')).
\end{tikzcd}$$

Dans le diagramme 2.1.32.2, en remplaçant $\mathcal{G}'$ par $F^\flat \mathcal{G}'$, on obtient la commutativité de

(2.1.32.4)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', F^\flat \mathcal{G}') \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\rho^{(m)}_{X'}"] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}}(F^*\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} F^*\mathcal{F}', F^*F^\flat \mathcal{G}') \arrow[d, "\rho^{(m+s)}_{X}"] \\
\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}', F^\flat \mathcal{G}')) \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{X}}(F^*\mathcal{E}', \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(F^*\mathcal{F}', F^*F^\flat \mathcal{G}')).
\end{tikzcd}$$

La compatibilité à Frobenius s'obtient en composant 2.1.32.3 et 2.1.32.4. □

Corollaire 2.1.33. *Soient $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ deux $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules. Si $\mathcal{F}'$ est $\mathcal{B}_{X'}$-plat et que $\mathcal{G}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module injectif alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module injectif.*

Preuve. Soit $\rho : \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}') \hookrightarrow \mathcal{E}'$ un morphisme injectif de $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules. Comme $\mathcal{F}'$ est $\mathcal{B}_{X'}$-plat, le morphisme $\rho' = \rho \otimes Id$: $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}' \hookrightarrow \mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}'$ est injectif. Puisque le morphisme d'évaluation ev : $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}') \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$ est $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire (2.1.28) et comme $\mathcal{G}'$ est un $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-module injectif, on obtient la factorisation f' : $\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}' \to \mathcal{G}'$, i.e., $f' \circ \rho' = \mathrm{ev}$. Grâce à 2.1.32, f' s'identifie à un morphisme $f : \mathcal{E}' \to \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')$. On termine la preuve en vérifiant que f est une section de ρ. □

Corollaire 2.1.34. *Soient $\mathcal{E}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathcal{F}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$ et $\mathcal{G}' \in D^+({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}, {}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$. On dispose de l'isomorphisme $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}', \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')).$$

Preuve. Soient $\mathcal{P}$ une résolution gauche de $\mathcal{F}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche plats et $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{G}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-bimodules injectifs (resp. à gauche si $* = g$). On calcule dans $D({}^*\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$:

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}' \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{P}, \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}}(\mathcal{E}' \otimes_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{P}, \mathcal{I}),$$
$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{P},\mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{P},\mathcal{I}).$$

Comme $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{P},\mathcal{I})$ est une résolution droite par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche injectifs (2.1.33), la proposition 2.1.32 nous permet de conclure. □

Corollaire 2.1.35 Cartan. *Soient $\mathcal{E}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$, $\mathcal{F}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$ et $\mathcal{G}' \in D^+({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)})$. L'isomorphisme canonique*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{F}', \mathcal{G}') \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{F}',\mathcal{G}')),$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius.

Preuve. On prend une résolution droite de $\mathcal{F}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules plats et une résolution gauche de $\mathcal{G}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules injectifs. Le corollaire 2.1.33 et la proposition 2.1.30 nous permettent alors de conclure. □

COROLLAIRE 2.1.36. *Soient $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}_{X'}) \cap D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$, $\mathcal{F}' \in D_{\mathrm{tdf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$ et $\mathcal{G}' \in D^{\mathrm{b}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$. On dispose de l'isomorphisme canonique dans $D^+({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$,*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'),$$

fonctoriel en $\mathcal{E}'$, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ et compatible à Frobenius.

PREUVE. Grâce à 2.1.29, le morphisme

$$\mathrm{ev} \otimes id \ : \ \mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \to \mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'$$

est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire. Il découle de 2.1.34, que le morphisme

$$\theta \ : \ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'),$$

que l'on déduit via l'isomorphisme de Cartan, est aussi $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire. Comme $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}_{X'})$, par localisation et dévissage, on vérifie que celui-ci est un isomorphisme. La fonctorialité en $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ est immédiate. Celle en $\mathcal{E}'$ dérive du diagramme 2.1.16.1.

Traitons à présent la compatibilité à Frobenius. Tout d'abord, on vérifie que le diagramme

(2.1.36.1)
$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}' \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}' \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes id"] \\
F^*[\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}')] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}' \arrow[r, "F^*(\mathrm{ev})\otimes id"] \arrow[d, "\sim"'] & F^*\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}' \arrow[d, "\sim"'] \\
F^*[\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'] \arrow[r, "F^*(\mathrm{ev}\otimes id)"] & F^*(\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}')
\end{tikzcd}$$

est commutatif. En effet, le carré du haut correspond au diagramme commutatif signifiant la compatibilité à Frobenius du morphisme d'évaluation 2.1.29 (on ajoute des $\mathbb{R}$ et $\mathbb{L}$ à 2.1.28.1), auquel on a appliqué le foncteur $- \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}'$. De plus, par fonctorialité en $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ de l'isomorphisme $F^*\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}')$, on obtient la commutativité du carré du bas. Notons $\phi' \ : \ F^*\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'] \to$ $\to F^*(\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}')$, le morphisme rendant commutatif le triangle de gauche du diagramme suivant:

(2.1.36.2)
$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'] \arrow[d, "\sim"'] \arrow[dr, dotted, "\phi'"] & F^*\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}', F^*\mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}' \arrow[l, "\sim"'] \arrow[dr, "\mathrm{ev}\otimes id"] & \\
F^*[\mathcal{E}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}', \mathcal{F}') \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}'] \arrow[r, "F^*(\mathrm{ev}\otimes id)"'] & F^*(\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}} \mathcal{G}') & F^*\mathcal{F}' \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} F^*\mathcal{G}'. \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

On remarque que la commutativité de 2.1.36.1 implique celle de 2.1.36.2 (on peut à présent oublier 2.1.36.1).

Notons θ' (resp. θ'') le morphisme rendant commutatif le triangle supérieur (resp. le diagramme en entier) de

$$
\begin{tikzcd}
 & F^*[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}')] \arrow[d, "\sim"'] \\
F^*[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}'] \arrow[ur, "F^*\theta"] \arrow[r, dotted, "\theta'"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*(\mathcal{F}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}')) \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{G}' \arrow[u, "\sim"] \arrow[r, dotted, "\theta''"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{G}') \arrow[u, "\sim"]
\end{tikzcd}
\tag{2.1.36.3}
$$

Le lemme qui suit permet d'établir la relation $\mathrm{Ca}(\phi') = \theta'$.

LEMME 2.1.37. *Soient $\mathcal{E}' \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$ (resp. $D_{\mathrm{tdf}}({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$), $\mathcal{F}'_1 \in D^-({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$ (resp. $D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$) et $\mathcal{G}'_1 \in D^+({}^g\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$. Le diagramme suivant*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{E}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{F}'_1,\mathcal{G}'_1) \arrow[r, "\mathrm{Ca}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "F^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'}}(\mathcal{F}'_1,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{G}'_1)) \arrow[d, "\sim"', "F^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{(m+s)}_{X}}(F^*(\mathcal{E}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{F}'_1),F^*\mathcal{G}'_1) \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{(m+s)}_{X}}(F^*\mathcal{F}'_1,F^*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{G}'_1)) \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{(m+s)}_{X}}(F^*\mathcal{E}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X}F^*\mathcal{F}'_1,F^*\mathcal{G}'_1) \arrow[r, "\mathrm{Ca}", "\sim"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^{(m+s)}_{X}}(F^*\mathcal{F}'_1,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{G}'_1)),
\end{tikzcd}
$$

où les flèches horizontales désignent les isomorphismes de Cartan, est commutatif.

PREUVE. On résout platement $\mathcal{E}'$ et injectivement $\mathcal{G}'_1$, puis on utilise 2.1.32.2. □

Via le lemme appliqué à $\mathcal{F}'_1 = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}'_1 = \mathcal{F}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}'$, on obtient $\mathrm{Ca}(\phi') = \theta'$. Comme $\mathrm{Ca}(\phi') = \theta'$, grâce à 2.1.14.1, on déduit du losange de 2.1.36.2 et du carré de 2.1.36.3 que $\mathrm{Ca}(\mathrm{ev}\otimes id) = \theta''$. La commutativité du diagramme 2.1.36.3 signifie alors que le morphisme θ est compatible à Frobenius. □

PROPOSITION 2.1.38. Soient $\mathcal{E}' \in D(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$, $\mathcal{F}' \in D^+(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$ et $\mathcal{G}' \in D_{\mathrm{tdf}}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$. On a un homomorphisme canonique fonctoriel $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire et compatible à Frobenius:

$$
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}' \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_{X'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}'\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_{X'}}\mathcal{G}'). \tag{2.1.38.1}
$$

Si $\mathcal{E}'$ est en outre dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}_{X'})$, ce morphisme est un isomorphisme.

PREUVE. On construit le morphisme 2.1.38.1 en résolvant $\mathcal{F}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules injectifs et $\mathcal{G}'$ par des $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-modules plats (la Tor-dimension finie de $\mathcal{G}'$ est indispensable: [Har66, II.4.1]). Grâce à 2.1.31, celui-ci est $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-linéaire et compatible à Frobenius.

Comme un $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'}$-module injectif (resp. plat) est un $\mathcal{B}_{X'}$-module injectif (resp. plat), si $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}_{X'})$, il résulte de 2.1.12.(i) (avec $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C} = \mathcal{B}_{X'}$) que 2.1.38.1 est un isomorphisme dans $D(\mathcal{B}_{X'})$ et donc dans $D(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'})$. □

2.2 – *Construction de l'isomorphisme de comparaison des foncteurs duaux.*

PROPOSITION 2.2.1. *On reprend les notations de la section 1.1. Dans le cas où X est un schéma, afin de donner un sens à la compatibilité à Frobenius, on adoptera les hypothèses supplémentaires de 1.4.1. On se donne $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X)$ tel que l'une des hypothèses suivantes soit validée:*

(a) $\mathcal{B}_X \in D_{\mathrm{parf}}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X)$ *et* $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_X) \in D^{\mathrm{b}}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X)$;
(b) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_X) \in D_{\mathrm{tdf}}(\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X)$.

Sous ces conditions, nous obtenons les trois assertions ci-après:
(i) *Il existe un morphisme canonique $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$-linéaire:*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}(\mathcal{B}_X, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})[d_X] \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}_X} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{B}_X) \to$$
$$\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X}(\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}[d_X]).$$

(ii) *Si X est un schéma, celui-ci est compatible à Frobenius.*
(iii) *Si $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}_X)$, celui-ci est un isomorphisme.*

PREUVE. On écrira $\otimes\omega^{-1}$ pour $\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_X^{-1}$, $\widetilde{\mathcal{D}}$ pour $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X$ et $\mathcal{B}$ pour $\mathcal{B}_X$. Via 2.1.38, on dispose par fonctorialité d'un morphisme dans $D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}, {}^g\widetilde{\mathcal{D}})$:

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1}). \tag{2.2.1.1}$$

En lui appliquant le foncteur $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}\big(\mathcal{B}, -\big)$, on obtient dans $D({}^g\widetilde{\mathcal{D}})$ le morphisme:

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1}) \to \tag{2.2.1.2}$$
$$\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1})).$$

On dispose de l'isomorphisme de Cartan (2.1.34):

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1})) \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widetilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{F}, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1}). \tag{2.2.1.3}$$

L'isomorphisme de transposition 2.1.8.2 de $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ fournit l'isomorphisme:

$$(2.2.1.4)\quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B},\, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F},\, \mathcal{B})) \xrightarrow{\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B}, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}, \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1}).$$

Comme l'hypothèse *a*) ou *b*) est validée, il découle de la proposition 2.1.26 (valable en remplaçant "d" par "g") la flèche:

$$(2.2.1.5)\quad \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B},\, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F},\, \mathcal{B}) \to$$
$$\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\tilde{\mathcal{D}}}(\mathcal{B},\, \widetilde{\mathcal{D}} \otimes \omega^{-1} \otimes_{\mathcal{B}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{F},\, \mathcal{B})).$$

En mettant bout à bout 2.2.1.5, 2.2.1.4, 2.2.1.2 et 2.2.1.3 et en ajoutant le décalage $[d_X]$, on obtient le morphisme de 2.2.1.(i).

Lorsque X est un schéma, tous les morphismes utilisés dans la construction sont compatibles à Frobenius. D'où (ii). Enfin, lorsque $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B})$, les morphismes 2.2.1.1 (et donc 2.2.1.2) et 2.2.1.5 deviennent des isomorphismes. □

2.2.2. Dans la suite, on adoptera les notations suivantes : soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, Z un diviseur de sa fibre spéciale d'ouvert complémentaire $\mathcal{Y}$, $\mathfrak{X}_K$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$, qui est un K-espace analytique rigide lisse, et $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \to \mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation. On note de plus $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. On se donne aussi E un isocristal sur Y surconvergent le long de Z. Si $E_{\mathfrak{X}}$ est une réalisation de E sur $\mathfrak{X}$, on note $\mathcal{E} := \mathrm{sp}_*(E_{\mathfrak{X}})$. On écrira abusivement E à la place de $E_{\mathfrak{X}}$.

On rappelle les égalités $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) = D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ et $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) = D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ (voir [NH]). On obtient $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$.

NOTATIONS 2.2.3. Pour tout $\mathcal{F} \in D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$, on pose $\mathbb{D}_Z(\mathcal{F}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1})[d_X]$ et $\mathcal{F}^\vee = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z))$.

PROPOSITION 2.2.4. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\theta \;:\; \mathbb{D}_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Z(\mathcal{E}).$$

PREUVE. Cela dérive de 2.2.1. □

LEMME 2.2.5. i) $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z) \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}})$.

ii) *On a un isomorphisme canonique:*

$$(2.2.5.1)\qquad \mathbb{D}_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}.$$

PREUVE. Prouvons i). En appliquant le foncteur $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}} -$ au lemme [Ber00, 4.3.1.(ii)], on vérifie que le morphisme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, induit par l'action canonique de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, fait du complexe de Spencer

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \overset{d}{\wedge} \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \to \cdots \to \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}, \tag{2.2.5.2}$$

une résolution $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-linéaire de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$.

Démontrons à présent ii). Notons $\omega_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} := \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$. Il ne cote rien de supposer que $\mathfrak{X}$ soit irréductible. En appliquant le foncteur $- \otimes_{\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ au lemme [Ber00, 4.4.1.(i)] (toujours valable en remplaçant "schéma" par "schéma formel"), on vérifie que le morphisme canonique $\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}} \to \omega_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, défini par la structure de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-module à droite de $\omega_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, fait du complexe de de Rham $\Omega^{\bullet}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ (on prend la structure gauche pour le calcul du produit tensoriel) une résolution $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-linéaire à droite de $\omega_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ placé en degré d_X. Via la résolution de Spencer 2.2.5.2), on obtient, pour $i \neq d_{\mathfrak{X}}$, la relation $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z), \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}) = 0$, ainsi que l'isomorphisme de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-modules à droite

$$\mathcal{E}xt^{d_{\mathfrak{X}}}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z), \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}.$$

□

REMARQUES 2.2.6. Il découle de 2.2.5.1 et 2.2.4 l'isomorphisme $\mathcal{E}^{\vee} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_Z(\mathcal{E})$.

PROPOSITION 2.2.7. *On dispose des isomorphismes canoniques compatibles à Frobenius*

$$\mathrm{sp}^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}}(\mathrm{sp}^*\mathcal{E}, j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}) \tag{2.2.7.1}$$

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)}(\mathrm{sp}_*E, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(\mathcal{H}om_{j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}}(E, j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})). \tag{2.2.7.2}$$

PREUVE. Comme $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module localement projectif de type fini (voir [Ber96, 4.4.2]), l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{sp}^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)) \to \mathcal{H}om_{j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}}(\mathrm{sp}^*\mathcal{E}, j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$$

est un isomorphisme. Construisons à présent l'isomorphisme 2.2.7.2. Pour cela, rappelons que les foncteurs sp_* et sp^* induisent des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$-modules localement libres de type fini munis d'une connexion intégrable et celle des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-modules localement projectifs de type fini munis d'une connexion intégrable (voir [Ber96, 4.4.2]). Comme $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z))$ est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^{\dagger}Z)$-module localement projectif de type fini muni d'une connexion intégrable, en appliquant le foncteur sp_* à 2.2.7.1, on en déduit l'isomorphisme 2.2.7.2. □

PROPOSITION 2.2.8. *Le faisceau* $\mathcal{E}$ *est* $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$*-cohérent et le morphisme canonique*

$$\mathcal{E} \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E} \tag{2.2.8.1}$$

est un isomorphisme.

PREUVE. Soient $\mathcal{E}_0$ un $\hat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathfrak{X}}(Z)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent et $(n_m)_{m\in N}$ une suite d'entiers vérifiant les conditions [Ber96, 4.4.5.1. et 4.4.5.2]. On pose $\mathcal{E}^{(m)} := \hat{\mathcal{B}}^{(n_m)}_{\mathfrak{X}}(Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\hat{\mathcal{B}}^{(n_0)}_{\mathfrak{X}}(Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}_0$. Comme $\mathcal{E}^{(1)}$ est un $\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module, cohérent sur $\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z)_{\mathbb{Q}}$, et topologiquement nilpotent (cela résulte de la remarque de [Ber 96, 4.4.6.]), grâce à [Ber96, 4.4.7.], il existe un $\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathring{\mathcal{E}}^{(1)}$, $\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z)$-cohérent, et un isomorphisme $\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \hat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathring{\mathcal{E}}^{(1)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{(1)}$. De manière analogue à [Ber90, 3.1.3 (i)], on prouve que $\mathring{\mathcal{E}}^{(1)}$ est $\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-cohérent. De plus, via [Ber96, 4.4.5.1], on obtient $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\hat{\mathcal{B}}^{(n_1)}_{\mathfrak{X}}(Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. Le faisceau $\mathcal{E}$ est donc $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$-cohérent. L'isomorphisme 2.2.8.1 résulte alors de [Ber90, 3.1.4.2], [Ber96, 4.3.12] et [Ber96, 4.4.12]. □

2.2.9. On construit le morphisme

$$\rho^\dagger_Z \; : \; \mathbb{D}_Z(\mathcal{E}) \to \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}_Z(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger_Z(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \to \mathbb{D}^\dagger_Z(\mathcal{E}),$$

où $\mathbb{D}^\dagger_Z$ désigne le dual $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$-linéaire. Si Z est vide, on écrira $\rho^\dagger$. Or, comme $\mathcal{E}$ est localement projectif de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)$, le morphisme $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}({}^\dagger Z)) = \mathcal{E}^\vee$ est un isomorphisme. Il découle de 2.2.7.2 que $\mathcal{E}^\vee$ est un isocristal sur Y surconvergent le long de Z. Grâce à 2.2.6, il en est de même de $\mathbb{D}_Z(\mathcal{E})$. Il dérive alors de 2.2.8.1 que $\rho^\dagger_Z$ est un isomorphisme.

2.2.10. On définit l'isomorphisme $\theta^\dagger$: $\mathbb{D}^\dagger_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger_Z(\mathcal{E})$, via le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{D}_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^\vee & \xrightarrow[\sim]{\theta} & \mathbb{D}_Z(\mathcal{E}) \\
\sim \downarrow \rho^\dagger_Z \otimes id & & \sim \downarrow \rho^\dagger_Z \\
\mathbb{D}^\dagger_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^\vee & \overset{\theta^\dagger}{\underset{\sim}{\dashrightarrow}} & \mathbb{D}^\dagger_Z(\mathcal{E}).
\end{array}$$

2.2.11. Il dérive de 2.2.5.1 et de 2.2.9, l'isomorphisme $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}) \tilde{\rightarrow} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$. L'isomorphisme $\theta^{\dagger}$ induit donc un isomorphisme $\mathcal{E}^{\vee} \tilde{\rightarrow} \mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})$. Cependant, comme il est raisonnable de penser que l'isomorphisme $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}) \tilde{\rightarrow} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ n'est pas compatible à Frobenius, il en sera de même de $\mathcal{E}^{\vee} \tilde{\rightarrow} \mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})$. Le "twist" $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}})$ paraît donc indispensable pour l'obtention de celle-ci.

THÉORÈME 2.2.12. *On a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{sp}_{*}(E^{\vee}) \tilde{\rightarrow} \mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E}), \tag{2.2.12.1}$$

où $E^{\vee} = \mathcal{H}om_{j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}}(E, j^{\dagger}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$.

PREUVE. Cela résulte aussitôt de 2.2.7, 2.2.10 et 2.2.11. □

COROLLAIRE 2.2.13. *Soit* $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}})$. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *Les espaces de cohomologie de* $\mathcal{F}$ *sont associés, via l'équivalence de catégorie* [Ber96, 4.4.5], *à des isocristaux surconvergents;*
ii) *Les espaces de cohomologie de* $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{F})$ *sont associés à des isocristaux surconvergents.*

Si $\mathcal{F}$ *vérifie l'une ces conditions équivalentes, alors, pour tous* $r, s \in \mathbb{Z}$ *tels que* $r \neq 0$, $\mathcal{H}^{r}(\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{H}^{s}(\mathcal{F})) = 0$ *et* $\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{H}^{s}(\mathcal{F})) \tilde{\rightarrow} \mathcal{H}^{s}(\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{F}))$.

PREUVE. Les foncteurs $E \mapsto \mathrm{sp}_{*}E$ et $E \mapsto E^{\vee}$ sont exacts sur la catégorie des isocristaux sur $X \setminus Z$ surconvergents le long de Z (pour le premier, cela résulte du fait que Z est un diviseur). On conclut la démonstration grâce au théorème 2.2.12.

2.3 – *Compatibilité à Frobenius.*

2.3.1. Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un relèvement de la puissance s-ième de Frobenius, $\mathfrak{X}'$ le $\mathcal{V}$-schéma formel déduit de $\mathfrak{X}$ par le changement de base relatif à σ, Z un diviseur X et Z' le diviseur de X' déduit de Z par le changement de base relatif à σ. Soient E' un isocristal sur $X' \setminus Z'$ surconvergent le long de X' et $\mathcal{E}' := \mathrm{sp}_{*}(E')$ le $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}({}^{\dagger}Z')_{\mathbb{Q}}$-module cohérent, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^{\dagger}Z')_{\mathbb{Q}}$-cohérent associé. Nous prouvons dans cette section, la compatibilité à Frobenius de l'isomorphisme $\theta^{\dagger}$ (2.2.10), i.e. que le diagramme canonique suivant:

$$
\begin{tikzcd}
F^*[\mathbb{D}^\dagger_{Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger Z')_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger Z')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee}] \arrow[r, "F^*\theta^\dagger", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*\mathbb{D}^\dagger_{Z'}(\mathcal{E}') \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{D}^\dagger_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}} (F^*\mathcal{E}')^{\vee} \arrow[r, "\theta^\dagger", "\sim"'] & \mathbb{D}^\dagger_{Z}(F^*\mathcal{E}')
\end{tikzcd}
\tag{2.3.1.1}
$$

est commutatif. Comme les arêtes de 2.3.1.1 sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger Z)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents, grâce à [Ber00, 4.3.10 et 4.3.12], il suffit de prouver la commutativité de 2.3.1.1 lorsque Z est vide.

Remarques 2.3.2. Soit $f : \mathcal{P} \to \operatorname{Spf} \mathcal{V} =: \mathcal{S}$ un morphisme propre et lisse, de dimension pure égale à d.

L'assertion «Les isomorphismes canoniques $f_+ \circ \mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{S}} \circ$ $\circ f_+(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$ et $\mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$ sont compatibles à Frobenius» est fausse. En effet, cette hypothèse fournit par l'absurde un isomorphisme canonique $f_+(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{S}} \circ f_+(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) = (f_+(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}))^\vee$ compatible à Frobenius. En lui appliquant H^d, on obtient $H^{2d}_{\mathrm{rig}}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}_K}) \tilde{\to} (H^0_{\mathrm{rig}}(\mathcal{O}_{\mathcal{P}_K}))^\vee$, où $\mathcal{P}_K$ est la fibre générique de $\mathcal{P}$ (au sens de la géométrie rigide) et H_{rig} est la cohomologie rigide. Comme ce dernier n'est pas compatible à Frobenius (il manque un twist de Tate), on a donc abouti à une contradiction.

Vu la construction de l'isomorphisme de dualité relative (voir [Vir04]), il est raisonnable de penser que celui-ci est compatible à Frobenius. On obtiendrait en particulier l'isomorphisme compatible à Frobenius $f_+ \circ \mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{P}} \circ f_+(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}})$. Cela entraîne que $\mathbb{D}^\dagger_{\mathcal{P}}(\mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathcal{O}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$ n'est vraisemblablement pas compatibles à Frobenius.

2.3.3. Notons $\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ ou $\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}$ le foncteur dual $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-linéaire. La première étape est de construire (voir 2.3.17.2), pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X) \cap D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, l'isomorphisme $\widehat{\theta}^{(m)} : \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^\vee \to \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E})$ compatible à Frobenius (2.3.27.1), où $\vee$ désigne le foncteur dual $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire. L'idée est de compléter l'isomorphisme construit via 2.2.1 $\theta^{(m)} : \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^\vee \to \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E})$, où, lorsque X est un schéma lisse ou un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, $\mathbb{D}^{(m)}_X$ ou $\mathbb{D}^{(m)}$ désigne le foncteur dual $\mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire. Commençons par établir que les foncteurs duaux commutent transitivement à l'extension des scalaires.

Dans toute la suite, i_0 sera un entier positif fixé, X désignera soit $\mathfrak{X}$, soit X_{i_0} (lorsque $X = \mathfrak{X}$, on pourra considérer $i_0 = \infty$) et S sera soit $\operatorname{Spf} \mathcal{V}$ ou $\operatorname{Spec} \mathcal{V}/\mathfrak{m}\mathcal{V}^{i+1}$, avec $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathcal{V}$.

Remarques 2.3.4. Rappelons que $\dim \mathrm{coh}\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}} = \dim \mathrm{coh}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} = 2d_{\mathfrak{X}} + 1$

([Ber00, 4.4.4] et [Vir00, 0.4.3] pour la première égalité). Comme les faisceaux $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ sont cohérents, on obtient $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$, $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ et $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) = D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \cap D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$.

Via [Ber90, 3.1.3], il en découle que tout objet $\mathcal{E}$ de $D(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ est aussi un objet de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ et de $D_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$. En outre, puisque l'extension $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ est plate, $\mathcal{E}$ appartient aussi à $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$.

Remarques 2.3.5. De manière analogue à 2.2.5.1, pour tout entier positif m, on construit des isomorphismes $\mathbb{D}^{(0)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, $\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et pour tout entier positif i, $\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_i}$. J'ignore si l'on dispose d'un isomorphisme $\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ ni si $\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$.

2.3.6. Soit $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(m)}_{X}$ ou $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$. Pour tout entier $i \leq i_0$ et tout $\mathcal{E} \in D^{-}({}^{g}\mathcal{D})$, on pose $\mathcal{E}_i = \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E}$. Soient $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un morphisme de $D^{-}(\mathcal{D}^{(m)}_{X})$, $g_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}'_i$ un morphisme de $D^{-}(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i})$, $a : \mathcal{E} \to \mathcal{F}_i$ et $\beta : \mathcal{E}' \to \mathcal{F}'_i$ deux morphismes de $D^{-}(\mathcal{D}^{(m)}_{X})$ tels que $\beta \circ f = g_i \circ a$. Les morphismes a et β se factorisent en des morphismes $a_i : \mathcal{E}_i \to \mathcal{F}_i$ et $\beta_i : \mathcal{E}'_i \to \mathcal{F}_i$. On obtient aussi le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[d] \arrow[dr] & & \mathcal{E}' \arrow[d] \arrow[dr, "\beta"] & \\
\mathcal{E}_i \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[r, dotted, "\alpha_i"'] & \mathcal{F}_i \arrow[rr, "g_i"'] & \mathcal{E}'_i \arrow[r, dotted, "\beta_i"] & \mathcal{F}'_i .
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.3.7. *Soient* $\mathcal{E} \in D({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{X}) \cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X)$ *et* $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{tdf}}({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{X})$.

(i) *Pour tout* $i \leq i_0$, *on a les isomorphismes canoniques* $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$*-linéaires:*

$$a \ : \ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i);$$

(ii) *Ceux-ci sont transitifs, i.e., si* $j \leq i \leq i_0$ *est un entier positif, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[r, "\alpha \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[d, "\sim"', "\alpha"] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_j}}(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j)
\end{tikzcd} \tag{2.3.7.1}$$

est commutatif.

PREUVE. Le morphisme canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i}$ induit $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}_i)$. Celui-ci se factorise par $\beta : \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}_i)$. Par localisation et dévissage, ce dernier est un isomorphisme. Enfin, en résolvant $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules plats et $\mathcal{F}_i$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$-modules injectifs, on construit l'isomorphisme (on utilise le lemme [Vir00, 1.4] déjà connu dans le cas commutatif) $\gamma : \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}_i) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\, \mathcal{F}_i)$.

Les deux chemins de 2.3.7.1 induisent deux flèches $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}) \to$ $\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_j}}(\mathcal{E}_j,\, \mathcal{F}_j)$. Il suffit de prouver que celles-ci coïncident, ce qui résulte du diagramme commutatif suivant:

(2.3.7.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[rr, "\beta \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j}"] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}_i) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[dr, "\gamma \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j}"] & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}_i) \arrow[ur] \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[dl, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_j} \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}_j) \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j) \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_j}}(\mathcal{E}_j, \mathcal{F}_j).
\end{tikzcd}$$

En effet, le morphisme composé du bas de 2.3.7.2 correspond à celui de 2.3.7.1 (car, en résolvant $\mathcal{F}_j$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X_j}$-modules injectifs et $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules plats, on calcule que la composée des morphismes canoniques $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}_j) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\, \mathcal{F}_j) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_j}}(\mathcal{E}_j,\, \mathcal{F}_j)$ est le morphisme canonique γ). De plus, les chemins $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_j} \to$ $\to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_j}}(\mathcal{E}_j,\, \mathcal{F}_j)$ de 2.3.7.1 et 2.3.7.2 sont identiques. □

PROPOSITION 2.3.8. *Soit $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux tel que, pour tout $\mathcal{A}$-bimodule $\mathcal{G}$, la structure canonique de $(\mathcal{A},\, \mathcal{B})$-bimodule de $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{B}$-bimodule.*

Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$, $\mathcal{F} \in D_{(.,\,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{A}^d)$, on dispose des isomorphismes canoniques:

$$\alpha : \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}).$$

De plus, ceux-ci sont transitifs, i.e., si $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un morphisme d'anneaux tel que, pour tout $\mathcal{B}$-bimodule $\mathcal{G}$, la structure canonique de $(\mathcal{B},\, \mathcal{C})$-bimodule de $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{C}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{C}$-bimodule, on dispose du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{C} \arrow[r, "\alpha \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{C}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{C} \arrow[d, "\sim"', "\alpha"] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{C} \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(\mathcal{C} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{C}).
\end{tikzcd}$$

Preuve. La preuve est analogue à celle de 2.3.7. □

Remarques 2.3.9. (i) On pose $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ ou $\mathcal{D}^{(m)}_X$. Soient $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{D}, \mathcal{D}^d)$ (pour fixer les idées) et $\mathcal{P}$ une résolution de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{D}^0$-modules plats. On a alors $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E} \tilde{\to} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i} \tilde{\to} \mathcal{P}/\mathfrak{m}^{i+1}\mathcal{P}$. Ainsi, la proposition 2.3.8 est valable pour les extensions $\mathcal{D}^{(m)}_X \to \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$.

(ii) Avec les notations de 2.3.8, lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{A}$, les hypothèses "*tel que, pour tout $\mathcal{A}$-bimodule $\mathcal{G}$, la structure canonique de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodule de $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{B}$-bimodule*" et "*tel que, pour tout $\mathcal{B}$-bimodule $\mathcal{G}$, la structure canonique de $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-bimodule de $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{C}$ se prolonge en une structure de $\mathcal{C}$-bimodule*" sont inutiles.

Proposition 2.3.10. *Soient $i \leq i_0$ un entier positif et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X) \cap \cap D(\mathcal{D}^{(m)}_X)$. Il existe des isomorphismes canoniques*

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^{\vee}] \tilde{\to} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}^{\vee}_i, \tag{2.3.10.1}$$

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \tilde{\to} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}^{\vee}_i, \tag{2.3.10.2}$$

où, pour le deuxième, on suppose $X = \mathfrak{X}$. De plus, ceux-ci sont transitifs.

Preuve. Traitons le premier cas. D'après 2.3.7 et 2.3.8, les isomorphismes $\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_X) \tilde{\to} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i})$ et $\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^{\vee} \tilde{\to} \mathcal{E}^{\vee}_i$ sont transitifs. On obtient alors

$$\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^{\vee}] \tilde{\to} (\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_X)) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} (\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^{\vee}) \tilde{\to}$$
$$\tilde{\to} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}^{\vee}_i.$$

Comme l'isomorphisme $\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [- \otimes_{\mathcal{O}_X} -] \tilde{\to} (\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} -) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} (\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} -)$ est aussi transitif, on obtient la transitivité par fonctorialité.

Le deuxième cas se prouve de manière identique.

Lemme 2.3.11. *Soient $i \leq i_0$ un entier positif, $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X) \cap D(\mathcal{D}^{(m)}_X)$, $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}^{(m)}_X)$ et $\mathcal{G} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{D}^{(m)}_X)$. Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{G}_i \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})] \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{G}_i),
\end{tikzcd} \tag{2.3.11.1}$$

dont les flèches verticales découlent de 2.1.38, *est commutatif.*

PREUVE. Tout d'abord, grâce aux hypothèses faites, le diagramme 2.3.11.1 a un sens. Ensuite, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}_i)\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{F}_i)\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}}\mathcal{G}_i \arrow[d, "\sim"'] \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}_i\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{F}_i\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}}\mathcal{G}_i). \end{tikzcd} \tag{2.3.11.2}$$

Par fonctorialité, celui de gauche est commutatif. Pour vérifier celui de droite, soient $\mathcal{I}_i$ une résolution de $\mathcal{F}_i$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$-modules injectifs (et donc par des $\mathcal{O}_{X_i}$-modules injectifs), $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) une résolution de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{G}$) par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules plats et $\mathcal{I}'_i$ une résolution de $\mathcal{I}_i\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}'$ ($\xrightarrow{\sim}\mathcal{I}_i\otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}\mathcal{P}'_i$) par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$-modules injectifs. Rappelons que celles-ci permettent de calculer les foncteurs dérivés du diagramme de droite de 2.3.11.2 (on utilise le lemme de [Vir00, 1.4] déjà connu dans le cas commutatif). On calcule ensuite que le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P},\mathcal{I}_i)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P},\mathcal{I}_i\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P},\mathcal{I}'_i) \arrow[d] \\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{P}_i,\mathcal{I}_i)\otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}\mathcal{P}'_i \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{P}_i,\mathcal{I}_i\otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}\mathcal{P}'_i) \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{P}_i,\mathcal{I}'_i) \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'où celle du diagramme de droite de 2.3.11.2. On conclut grâce à 2.3.6. □

LEMME 2.3.12. *Soient $i\leq i_0$ un entier positif, $\mathcal{E}\in D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)\cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{F}\in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$. Le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X_i}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{F}_i) \arrow[d, "\sim"'] \\ \mathcal{O}_{X_i}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}[\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_X}(\mathcal{O}_X,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}))] \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}}(\mathcal{O}_{X_i},\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{F}_i)) \end{tikzcd} \tag{2.3.12.1}$$

où les isomorphismes verticaux se déduisent de 2.1.34, est commutatif.

PREUVE. Par fonctorialité, le diagramme de gauche de

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}_i) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{F}_i) \arrow[d, "\sim"'] \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_X}(\mathcal{O}_X,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})) \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_X}(\mathcal{O}_X,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}_i)) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}}(\mathcal{O}_{X_i},\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{E}_i,\mathcal{F}_i)) \end{tikzcd} \tag{2.3.12.2}$$

est commutatif. Prouvons à présent celle de droite. Soient $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) une résolution de $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{E}$) par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules plats, $\mathcal{I}_i$ une résolution de $\mathcal{F}_i$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$-modules injectifs. On remarque que $\mathcal{P}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}'$ est alors une résolution de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules plats. De plus, comme $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}',\mathcal{I}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{P}'_i,\mathcal{I}_i)$, d'après 2.1.33, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}',\mathcal{I}_i)$ est un $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-module injectif. Ces résolutions permettent ainsi de calculer les termes du diagramme de droite de 2.3.12.2 (pour la flèche du haut, on utilise le lemme de [Vir00, I.1.4]). Sa commutativité résulte alors de celle du carré:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{P}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}',\mathcal{I}_i) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{P}_i\otimes_{\mathcal{O}_{X_i}}\mathcal{P}'_i,\mathcal{I}_i) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{P},\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}',\mathcal{I}_i)) \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{P}_i,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{P}'_i,\mathcal{I}_i)).
\end{tikzcd}$$

Enfin, via 2.3.6, la commutativité de 2.3.12.1 découle de celle de 2.3.12.2.

□

LEMME 2.3.13. *Pour tout entier positif $i \le i_0$, pour tout $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$, on dispose du diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X^{(m)}} [\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}] \arrow[r, "\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}\otimes\gamma_{\mathcal{E}}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X^{(m)}} [\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}] \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{E}_i}", "\sim"'] & \mathcal{E}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)},
\end{tikzcd}$$

où γ désigne l'isomorphisme de transposition ([Ber00, 1.3.1]).

PREUVE. Soit $\mathcal{P}$ une résolution de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche plats. Par $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-linéarité, il suffit de vérifier que, quelque soit le chemin choisi, pour tout $x \in \mathcal{P}$, $1 \otimes [1 \otimes x]$ s'envoie sur $(1 \otimes x) \otimes 1$, ce qui est immédiat. □

LEMME 2.3.14. *Soient $i \le i_0$ un entier positif et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$. Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} [\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})] \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i),
\end{tikzcd} \tag{2.3.14.1}$$

où les isomorphismes horizontaux découlent de 2.3.8 *et ceux verticaux de* 2.1.26, *est commutatif.*

Preuve. Puisque $\mathcal{O}_X \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ et $\mathcal{O}_{X_i} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)})$ (voir 2.3.4), les flèches verticales sont donc bien des isomorphismes. De plus, on vérifie par fonctorialité la commutativité du diagramme de gauche ci-après.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i).
\end{tikzcd}
\tag{2.3.14.2}
$$

Soient $\mathcal{I}_i$ une résolution de $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ par des $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{S_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-modules à gauche injectifs, $\mathcal{P}$ une résolution de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules plats et $\mathcal{I}'_i$ une résolution de $\mathcal{I}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}$ $(\tilde{\to} \mathcal{I}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{P}_i)$ par des $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{S_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-modules injectifs. La commutativité du diagramme de droite de 2.3.14.2 dérive de celle de

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_i) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_i \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}'_i) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{I}_i) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{P}_i \arrow[r] & \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{I}_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{P}_i) \arrow[r] & \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}}(\mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{I}'_i).
\end{tikzcd}
\tag{2.3.14.3}
$$

Or, si $\phi \in \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}_X^{(m)}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}_i)$ et $x \in \mathcal{P}$, on calcule que $\phi \otimes x$ s'envoie, via les deux chemins possibles du diagramme de gauche de 2.3.14.3, sur $P_i \otimes a \mapsto P_i[\phi(a) \otimes (1 \otimes x)] = (P_i \phi(a)) \otimes (1 \otimes x)$, avec $P_i \in \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ et $a \in \mathcal{O}_X$. Comme le diagramme de droite de 2.3.14.3 est commutatif par fonctorialité, il en résulte celle de 2.3.14.3.

Enfin, avec la remarque 2.3.6, on déduit de la commutativité de 2.3.14.2 celle de 2.3.14.1. $\square$

2.3.15 Pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X) \cap D({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$, on note $\theta^{(m)} \colon \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^{\vee} \tilde{\to} \tilde{\to} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E})$ et $\theta_i^{(m)}$ les isomorphismes $\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} \tilde{\to} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i)$ que l'on déduit de 2.2.1.

Proposition 2.3.16. *Soient $i \leq i_0$ un entier positif et $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_X) \cap \cap D({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$. Le diagramme suivant*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X^{(m)}} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes \theta^{(m)}"] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} \arrow[d, "\sim"', "\theta_i^{(m)}"] \\
\mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_X^{(m)}} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E})] \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i),
\end{tikzcd}
$$

où les isomorphismes verticaux proviennent de 2.3.8 *(voir aussi la remarque* 2.3.9.(i)*) et de* 2.3.10, *est commutatif.*

PREUVE. Par construction de $\theta^{(m)}$ et $\theta_i^{(m)}$ (2.2.1), cela découle des lemmes 2.3.11, 2.3.12.1, 2.3.13 et 2.3.14.1. $\square$

2.3.17 Pour tout entier positif $i \leq i_0$, pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \cap D({}^g\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$, on définit le morphisme $\theta_i'^{(m)}$ via le diagramme

(2.3.17.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[r, dotted, "\theta_i'^{(m)}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E})] \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} \arrow[r, "\theta_i^{(m)}", "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i),
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes verticaux sont construits grâce à 2.3.8 (voir aussi la remarque 2.3.9.(i)) et à 2.3.10. Pour tout $j \leq i \leq i_0$, considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[rr, "\theta_j'^{(m)}"] \arrow[dd] & & \mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}\mathcal{E}] \arrow[dd] \\
\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[ur] \arrow[rr, "\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \theta_i'^{(m)}"] \arrow[dd] & & \mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}\mathcal{E}] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_j}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_j}} \mathcal{E}_j^{\vee} \arrow[rr, "\theta_j^{(m)}"] & & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_j) \\
\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee}] \arrow[ur] \arrow[rr, "\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} \theta_i^{(m)}"] & & \mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{X_i}} [\mathbb{D}^{(m)}\mathcal{E}_i]. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les carrés de devant et de derrière sont commutatifs par construction de $\theta_i'^{(m)}$ (2.3.17.1). De plus, grâce à 2.3.16 (resp. 2.3.8 et 2.3.9.(i), resp. 2.3.10.2), il en est de même de celui du bas (resp. de droite, resp. de gauche). Puisque les flèches sont des isomorphismes, il en dérive que le carré du haut est commutatif. Autrement dit, la famille d'isomorphismes $(\theta_i'^{(m)})_{i \in \mathbb{N}}$ est compatible. Grâce à [Ber02, 3.2.3], il en résulte la construction d'un isomorphisme $\widehat{\theta}^{(m)} : \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee} \to \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E})$ induisant le diagramme suivant

(2.3.17.2)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\sim"', "\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\theta}^{(m)}"] & \mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\theta_j'^{(m)}"] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} \arrow[d, "\sim"', "\theta_i^{(m)}"] \\
\mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}\mathcal{E}] \arrow[r, equal] & \mathcal{O}_{X_j} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}\mathcal{E}] \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i).
\end{tikzcd}$$

2.3.18. Pour tout $\mathcal{E} \in D(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}) \cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, on note $\rho_{\mathcal{E}}^{(m)}$ ou $\rho^{(m)}$ le morphisme

(2.3.18.1) $$\rho_{\mathcal{E}}^{(m)} : \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}) \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}),$$

le dernier isomorphisme résultant de [Ber 90, 3.1.3].

LEMME 2.3.19. Soient $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un morphisme de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)})$, g :

$\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ un morphisme de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$, $\alpha : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\beta : \mathcal{E}' \to \mathcal{F}$ deux morphismes de $D(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$.

Le diagramme de gauche suivant

(2.3.19.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{E}' \arrow[d, "\beta"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "g"] & \mathcal{F}', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E} \arrow[r, "id\otimes f"] \arrow[d, "id\otimes\alpha"] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}' \arrow[d, "id\otimes\beta"] \\ \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F} \arrow[r, "id\otimes g"] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{F}' \end{tikzcd}$$

est commutatif si et seulement si, pour tout entier positif i, celui de droite l'est.

Preuve. Les morphismes α et β se factorisent par $\alpha' : \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ et $\beta' : \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}' \to \mathcal{F}'$. En considérant le diagramme

(2.3.19.2)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[rr, "f"] \arrow[d] \arrow[ddr, "\alpha"] & & \mathcal{E}' \arrow[d] \arrow[ddr, "\beta"] & \\ \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E} \arrow[rr] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}' \arrow[dr, "\beta'"'] & \\ & \mathcal{F} \arrow[rr, "g"'] & & \mathcal{F}', \end{tikzcd}$$

on vérifie que celui de gauche de 2.3.19.1 est commutatif si et seulement si le carré horizontal de 2.3.19.2 l'est. On conclut via [Ber02, 3.2.3]. □

Proposition 2.3.20. *Pour tout $\mathcal{E} \in D(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee} \arrow[r, "\theta^{(m)}", "\sim"'] \arrow[d, "\rho^{(m)}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \otimes id"] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\rho^{(m)}_{\mathcal{E}}"] \\ \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee} \arrow[r, "\widehat{\theta}^{(m)}", "\sim"'] & \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}) \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve. Grâce à 2.3.19, il suffit de prouver, pour tout entier positif i, que le carré central du diagramme

(2.3.20.1)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "\theta^{(m)}", "\sim"'] \arrow[d, "id\otimes\rho^{(m)}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\otimes id"] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E})] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "id\otimes\rho^{(m)}_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i) \arrow[d, equal] \\ \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[l, "\sim"'] \arrow[r, "id\otimes\widehat{\theta}^{(m)}", "\sim"'] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E})] \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i) \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'après 2.3.16, le composé des morphismes du haut de 2.3.20.1 est égal à $\theta_i^{(m)}$. Par construction (2.3.17.2), il en est de même de celui du bas. Comme les flèches horizontales de 2.3.20.1 sont des isomorphismes, pour obtenir la commutativité du carré du centre, il suffit de prouver celle des carrés latéraux. Le carré de droite de 2.3.20.1 correspond au contour du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{D}(\mathcal{E})] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}(\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathcal{D}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{D}(\mathcal{E})] \arrow[r] & \mathcal{D}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{D}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}(\mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(\mathcal{D}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \arrow[d] & & \mathbb{D}(\mathcal{D}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \arrow[ll] \arrow[r] & \mathbb{D}(\mathcal{D}_{X_i} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}) \arrow[rrr, equal] & & & \mathbb{D}(\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}),
\end{tikzcd} \tag{2.3.20.2}$$

où l'on a omis d'inscrire les indices (m). Or, on calcule que le carré en haut à droite (on résout platement $\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E})$) et le grand rectangle du bas (en oubliant $\mathbb{D}^{(m)}$, on résout platement $\mathcal{E}$) sont commutatifs. De plus, le rectangle de la ligne du milieu l'est grâce à la transitivité de 2.3.8 (avec aussi la remarque 2.3.9.(i)). La commutativité des autres carrés est fonctorielle. D'où celle du diagramme de droite de 2.3.20.1.

Enfin, la commutativité du carré gauche de 2.3.20.1 résulte de celle du diagramme ci-après:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "id \otimes \rho^{(m)} \otimes id"] & {[\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})] \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} [\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}]} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "(id \otimes \rho^{(m)}) \otimes id"] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}] \arrow[r, "\sim"'] & {[\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})] \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} [\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{E}^{\vee}]} \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{X_i}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{E}_i^{\vee},
\end{tikzcd}$$

dont celle du carré de droite se prouve par fonctorialité grâce à celle du carré de droite de 2.3.20.1. $\square$

2.3.21. Le foncteur $\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}$ commute à Frobenius. En effet, si on note $\widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}$ le foncteur $\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}$ auquel on applique $\otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{\mathfrak{X}}$, pour tout $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})$, on dispose des isomorphismes

$$\begin{aligned} F^{\flat} \widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}') &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}', F^{\flat} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{\sim} \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}(F^{*}\mathcal{E}', F^{*} F^{\flat} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbb{D}}^{(m+s)}(F^{*}\mathcal{E}'). \end{aligned} \tag{2.3.21.1}$$

Afin de prouver 2.3.25, que nous utiliserons lors de la démonstration du théorème 2.1 de commutation à Frobenius de $\hat{\theta}^{(m)}$, nous aurons besoin des trois lemmes ci-après.

LEMME 2.3.22. *Soient i un entier positif et $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^{g}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})$. Le dia-*

gramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}_g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}_g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}\otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}}F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i} \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}_g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}_g\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}}(\mathcal{E}'_i,\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i})\otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}}F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i} \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}_g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i}}(\mathcal{E}'_i,F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}_g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i}}(\mathcal{E}'_i,F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i}),
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales se déduisent de l'isomorphisme $F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}\xrightarrow{\sim}F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{X'_i}$, *est localement commutatif.*

PREUVE. Lorsque $\mathcal{E}'$ admet une résolution gauche par des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}$-modules à gauche localement projectifs de type fini, la commutativité est immédiate. L'hypothèse que $\mathcal{E}'$ soit un complexe parfait nous permet de conclure. $\square$

LEMME 2.3.23. *Soient i un entier positif,* $\mathcal{E}'\in D_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})$ *et* $\mathcal{F}'\in D^{\mathrm{b}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'},\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)d}_{\mathfrak{X}})$ *("d" pour fixer les idées). Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "F^*\otimes id", "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}}(\mathcal{E}'_i,\mathcal{F}'_i) \arrow[d, "F^*", "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}')\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}}(F^*\mathcal{E}'_i,F^*\mathcal{F}'_i)
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

PREUVE. Il suffit de prouver la commutativité du diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}') \arrow[r] \arrow[d, "F^*", "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',\mathcal{F}'_i) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "F^*", "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}}(\mathcal{E}'_i,\mathcal{F}'_i) \arrow[d, "F^*", "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}') \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}',F^*\mathcal{F}'_i) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}}(F^*\mathcal{E}'_i,F^*\mathcal{F}'_i).
\end{tikzcd}$$

Celle du carré de gauche se prouve par fonctorialité, tandis que pour vérifier celle de droite, on résout $\mathcal{F}'_i$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}\otimes_{\mathcal{O}_{S_i}}\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i}$-modules injectifs et $\mathcal{E}'$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}$-modules plats (le foncteur F^*, en élevant le niveau, préserve la platitude et l'injectivité). $\square$

LEMME 2.3.24. *Soit i un entier positif. Le diagramme canonique* *suivant*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[r, "\alpha\otimes id", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & {[F^* F^\flat \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}]} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \arrow[r, "\alpha", "\sim"'] & F^* F^\flat \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i},
\end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme a du bas (resp. du haut) est [Ber00, 2.5.2.1] *(resp.* [Ber00, 4.1.2.1]*), est commutatif.*

PREUVE. La preuve est une tautologie. □

PROPOSITION 2.3.25. *Soient i un entier positif et $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'})$. Le diagramme canonique suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}} [F^*\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}')] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*[\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}')] \arrow[r, "\sim"'] & F^*\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}'_i) \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}} [\widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)} F^*(\mathcal{E}')] \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m+s)}(\mathcal{D}^{(m+s)}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}} F^*(\mathcal{E}')) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m+s)} F^*(\mathcal{E}'_i),
\end{tikzcd}$$

où les isomorphismes verticaux résultent de ceux de 2.3.21.1, *est localement commutatif.*

PREUVE. Cela découle de 2.3.22, 2.3.23 et 2.3.24. □

PROPOSITION 2.3.26. Pour tout entier positif i, pour tout $\mathcal{E}' \in D(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}) \cap$ $\cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F^*[\mathcal{O}_{X'_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'_i}}(\mathcal{E}'_i, \mathcal{O}_{X'_i}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(F^*\mathcal{E}'_i, \mathcal{O}_{X_i}) \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}', \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{E}', \mathcal{O}_{X_i})
\end{tikzcd}$$

est cohomologiquement commutatif.

PREUVE. La proposition est locale et il suffit de prouver que les espaces de cohomologie des deux morphismes sont égaux en tant que morphisme $\mathcal{O}_{X_i}$-linéaire. Par localisation, on se ramène au cas où $\mathcal{E}'$ se résout par des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$-modules localement projectifs de type fini. Ce dernier cas se vérifie élémentairement. □

THÉORÈME 2.3.27. *Pour tout $\mathcal{E}' \in D(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}) \cap D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})$, le diagramme qui suit*

(2.3.27.1)
$$\begin{tikzcd}
F^*(\mathcal{E}'^{\vee} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})) \arrow[r, "F^*\widehat{\theta}^{(m)}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & F^*\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}') \arrow[d, "\sim"'] \\
(F^*\mathcal{E}')^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "\widehat{\theta}^{(m+s)}", "\sim"'] & \widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(F^*\mathcal{E}')
\end{tikzcd}$$

est cohomologiquement commutatif.

PREUVE. D'après [Ber02, 3.2.3], il suffit de démontrer que, pour tout entier positif i, le carré de devant du cube

(2.3.27.2)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& F^*(\mathcal{E}_i'^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i'}} \mathbb{D}^{(m)}\mathcal{O}_{X_i'}) \arrow[rr, "F^*\theta_i^{(m)}"] \arrow[dd] & & F^*\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i') \arrow[dd] \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} [F^*(\mathcal{E}'^{\vee} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}))] \arrow[ur] \arrow[rr, "id\otimes F^*\widehat{\theta}^{(m)}"] \arrow[dd] & & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} [F^*\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}')] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& (F^*\mathcal{E}_i')^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathbb{D}^{(m+s)}\mathcal{O}_{X_i} \arrow[rr, "\theta_i^{(m+s)}"] & & \mathbb{D}^{(m+s)}(F^*\mathcal{E}_i') \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} [(F^*\mathcal{E}')^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})] \arrow[ur] \arrow[rr, "id\otimes\widehat{\theta}^{(m+s)}"] & & \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(F^*\mathcal{E}') \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

est cohomologiquement commutatif. Or, d'après 2.3.25, c'est le cas pour le carré de droite. De plus, il résulte de 2.3.25 et de 2.3.26 qu'il en est de même pour celui de gauche. Pour le carré du bas, cela découle, modulo $F^*\mathcal{E}_i' \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{E}'$, des définitions (2.3.17.2). Le carré du haut correspond au grand rectangle de

(2.3.27.3)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [F^*(\mathcal{E}'^{\vee} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}))] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "id\otimes F^*(\widehat{\theta}^{(m)})", "\sim"'] & F^*[\mathcal{O}_{X_i'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} (\mathcal{E}'^{\vee} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}))] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "F^*(id\otimes\widehat{\theta}^{(m)})", "\sim"'] & F^*(\mathcal{E}_i'^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i'}} \mathbb{D}^{(m)}\mathcal{O}_{X_i'}) \arrow[d, "F^*\theta_i^{(m)}", "\sim"'] \\
\mathcal{O}_{X_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} [F^*\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}')] \arrow[r, "\sim"'] & F^*[\mathcal{O}_{X_i'} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{E}')] \arrow[r, "\sim"'] & F^*\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{E}_i').
\end{tikzcd}$$

La commutativité du carré de gauche de 2.3.27.3 est fonctorielle et celle du carré de droite découle de 2.3.17.2. Enfin, celle du carré du fond de 2.3.27.2 est due au fait que $\theta_i^{(m)}$ est compatible à Frobenius (2.2.1.(ii)). Les flèches de 2.3.27.2 étant des isomorphismes, puisque l'on vérifie que cinq de ses faces sont cohomologiquement commutatives, celui de devant l'est aussi. $\square$

2.3.28. Soient $\mathcal{E}'$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-cohérent (i.e., il correspond à un isocristal convergent sur X') et, pour tout entier positif m, $\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}$-module $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$-cohérent tel qu'il existe un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$-linéaire $\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$.

On désigne par $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}}$ ou $\mathbb{D}$, le foncteur dual $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire, et par $\mathbb{D}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ ou $\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$, le dual $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire. On remarque qu'il découle de 2.3.5 que, pour tout entier positif m, on dispose des isomorphismes $\mathbb{D}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, ce dernier n'étant probablement pas compatible à Frobenius.

On construit l'isomorphisme $\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}$, via le diagramme commutatif:

(2.3.28.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee} \arrow[r, dotted, "\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}", "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') \\
(\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathring{\mathcal{E}}'^{(m)\vee}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \arrow[u, "\sim"'] \arrow[r, "\widehat{\theta}^{(m)} \otimes \mathbb{Q}", "\sim"'] & (\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}. \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

On constate que grâce à 2.3.30, celui-ci est indépendant du choix de $\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}$.

2.3.29. Pour tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent $\mathcal{E}$ (de même en remplaçant $\mathfrak{X}$ par un autre $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, comme par exemple $\mathfrak{X}'$), on note $\rho^{(m)}_{\mathbb{Q}}$, l'isomorphisme composé :

$$\rho^{(m)}_{\mathbb{Q}} \;:\; \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}).$$

De plus, on désigne par θ, l'isomorphisme $\mathbb{D}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{\vee} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{E})$ construit via 2.2.1.

THÉORÈME 2.3.30. *Avec les notations de* 2.3.28, *le diagramme suivant*

(2.3.30.1)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee} \arrow[r, "\theta", "\sim"'] \arrow[d, "\rho^{(m)}_{\mathbb{Q}} \otimes id", "\sim"'] & \mathbb{D}(\mathcal{E}') \arrow[d, "\rho^{(m)}_{\mathbb{Q}}", "\sim"'] \\
\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee} \arrow[r, "\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}", "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')
\end{tikzcd}$$

est commutatif

PREUVE. Considérons le cube

(2.3.30.2)
$$\begin{tikzcd}
& (\mathbb{D}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}'^{(m)\vee}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[rr, "\theta^{(m)} \otimes \mathbb{Q}"] \arrow[dl] \arrow[dd, "\rho^{(m)} \otimes id \otimes \mathbb{Q}"] & & \mathbb{D}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[dl] \arrow[dd, "\rho^{(m)} \otimes \mathbb{Q}"] \\
\mathbb{D}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\rho^{(m)}_{\mathbb{Q}} \otimes id"] & & \mathbb{D}(\mathcal{E}') \arrow[dd, "\rho^{(m)}_{\mathbb{Q}}"] & \\
& (\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathring{\mathcal{E}}'^{(m)\vee}) \otimes \mathbb{Q} \arrow[rr, "\widehat{\theta}^{(m)} \otimes \mathbb{Q}"] \arrow[dl] & & (\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})) \otimes \mathbb{Q} \arrow[dl] \\
\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee} \arrow[rr, "\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}"] & & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}'), &
\end{tikzcd}$$

où les quatre isomorphismes de l'arrière vers l'avant se construisent via 2.3.8 et la remarque 2.3.9(i) (dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules, le foncteur $- \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ s'identifie à $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}} -$ et de même en remplaçant $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ par $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$). Le carré du bas est commutatif par définition (2.3.28.1). De plus, celui de droite correspond au diagramme ci-dessous

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{D}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}} \widehat{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\widehat{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}} \arrow[d] \\
\mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{D}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \arrow[d] & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}} \widehat{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \arrow[d] \arrow[dr] & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}} \widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}) \arrow[d] \\
\mathbb{D}(\mathcal{E}') \arrow[r] & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}') \arrow[r] & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \arrow[r] & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}'),
\end{tikzcd}
\tag{2.3.30.3}
$$

où l'anneau $\mathcal{D}$ désigne $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$. Par transitivité de 2.3.8, on prouve que le rectangle du milieu est commutatif. Il en résulte que 2.3.30.3 est commutatif. Le diagramme de droite de 2.3.30.2 l'est donc aussi. On vérifie ensuite que la commutativité du carré de droite de 2.3.30.2 implique celle du carré de gauche. Pour celui de derrière, cela résulte de 2.3.20. En outre, de manière analogue à 2.3.16 (i.e., on vérifie que les quatre morphismes que l'on utilise dans la construction de $\theta^{(m)}$ et θ commutent aux foncteurs $-\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$), on prouve que le carré du haut est commutatif. Comme les flèches de 2.3.30.2 sont des isomorphismes, il en dérive celle de celui de devant. $\square$

2.3.31. Le foncteur $\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ commute à Frobenius. En effet, si on note $\widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ le foncteur $\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ auquel on applique $\otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{\mathfrak{X}}$, pour tout $\mathcal{E}' \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}})$, on dispose des isomorphismes

$$
\begin{aligned}
F^{\flat} \widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}', F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \\
&\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(F^{*}\mathcal{E}', F^{*}F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbb{D}}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^{*}\mathcal{E}').
\end{aligned}
\tag{2.3.31.1}
$$

THÉORÈME 2.3.32. *Avec les notations de* 2.3.28, *le diagramme canonique suivant*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (F^{*}\mathcal{E}')^{\vee} \arrow[r, "\theta^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}", "\sim"'] & \mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^{*}\mathcal{E}') \\
F^{*}[\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} (\mathcal{E}')^{\vee}] \arrow[r, "F^{*}\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}", "\sim"'] \arrow[u, "\sim"'] & F^{*}[\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')], \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}
\tag{2.3.32.1}
$$

où les isomorphismes verticaux se déduisent de 2.3.31.1, *est commutatif.*

PREUVE. Considérons le cube suivant:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
& (\widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} (F^{*}\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})^{\vee})_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "\widehat{\theta}^{(m+s)} \otimes \mathbb{Q}"] \arrow[dd] & & \widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(F^{*}\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}} \arrow[dd] \\
F^{*}[(\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} (\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})^{\vee})_{\mathbb{Q}}] \arrow[ur] \arrow[rr, "F^{*}(\widehat{\theta}^{(m)} \otimes \mathbb{Q})"] \arrow[dd] & & F^{*}[\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}}] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& \mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (F^{*}\mathcal{E}')^{\vee} \arrow[rr, "\theta^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}"] & & \mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^{*}\mathcal{E}') \\
F^{*}[\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} (\mathcal{E}')^{\vee}] \arrow[ur] \arrow[rr, "F^{*}\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}"] & & F^{*}[\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')]. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{2.3.32.2}
$$

La commutativité des carrés de devant et de derrière découle de la construction de $\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ (et $\theta^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}$) donnée via 2.3.28.1. On note $\mathcal{D}' := \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}'}$ et $\mathcal{D} := \widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X}}$. On mettera un tilde au-dessus de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{D}'$ pour signifier que l'on tensorise ces derniers par $\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}}$ ou $\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X}'}$. La commutativité du carré de droite de 2.3.32.2 se traduit par la commutativité du diagramme ci-après

(2.3.32.3)
$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}} \mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}') \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} F^*\mathcal{D}' \otimes_{\mathcal{D}'} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}') \arrow[d, "\sim"'] \\
F^*\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}') \arrow[d, "\sim"'] \arrow[ddl, "\sim"'] \\
F^*\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}', \widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_g F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}') \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}', F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}) \arrow[d, "\sim"'] \arrow[ddl, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}', F^*_g F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}', \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}) & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}}((F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}}, \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}). \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

On remarque que la commutativité du trapèze (en haut) de 2.3.32.3 résulte de celle du diagramme

(2.3.32.4)
$$\begin{tikzcd}
F^*\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] \\
F^*\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}', \widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}', F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}).
\end{tikzcd}$$

et de la transitivité 2.1.12. Pour prouver celle de 2.3.32.4, on utilise une résolution de $\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}$ par des $\mathcal{D}'$-modules plats, une résolution notée $\mathcal{I}'$ de $\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}$ par des $\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}$-modules à gauche injectifs et une résolution de $F^*_d\mathcal{I}'$ par des $\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}_{\mathbb{Q}}$-modules à gauche injectifs.

Le losange de 2.3.32.3 correspond au contour de

(2.3.32.5)
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}', F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"', "F^*"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "F^*"] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "id\otimes F^*"] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}', F^*_g F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[d, "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_g F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, F^*_g F^*_d\widetilde{\mathcal{D}}') \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}', \widetilde{\mathcal{D}}_{\mathbb{Q}}) & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}'_{\mathbb{Q}}) \arrow[l, "\sim"'] & \mathcal{D}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)}, \widetilde{\mathcal{D}}), \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

dont la commutativité est aisée à vérifier. Enfin, comme le triangle (en bas) de 2.3.32.3 est aussi commutatif, on conclut que le carré de droite de 2.3.32.2 est commutatif.

On procède de même pour prouver celle du carré de gauche de 2.3.32.2.

Enfin, le carré du haut de 2.3.32.2 correspond au grand rectangle suivant:

$$
\begin{tikzcd}
F^*[(\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})^\vee)_{\mathbb{Q}}] \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "F^*(\widehat{\theta}^{(m)}\otimes\mathbb{Q})"] & {[F^*(\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})^\vee)]_{\mathbb{Q}}} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "(F^*\widehat{\theta}^{(m)})\otimes\mathbb{Q}"] & (\widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})^\vee)_{\mathbb{Q}} \arrow[d, "\sim"', "\widehat{\theta}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}\otimes\mathbb{Q}"] \\
F^*[\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}}] \arrow[r, "\sim"'] & {[F^*\widehat{\mathbb{D}}^{(m)}(\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})]_{\mathbb{Q}}} \arrow[r, "\sim"'] & \widehat{\mathbb{D}}^{(m+s)}(F^*\mathring{\mathcal{E}}'^{(m)})_{\mathbb{Q}}.
\end{tikzcd}
\tag{2.3.32.6}
$$

Le carré de gauche de 2.3.32.6 est commutatif par fonctorialité. Comme les termes de 2.3.32.6 sont isomorphes à un complexe concentré en une place, il résulte de 2.3.27.1 que le carré de droite de 2.3.32.6 est commutatif.

On a donc prouvé que cinq des carrés de 2.3.32.2 sont commutatifs. Il en est donc de même de celui du bas. $\square$

2.3.33. Pour tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent $\mathcal{E}$, notons $\sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}}$ l'isomorphisme

$$
\sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{E}). \tag{2.3.33.1}
$$

PROPOSITION 2.3.34. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent. Le carré*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}^\vee \arrow[r, "\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}}", "\sim"'] \arrow[d, "\sim"', "\sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}}\otimes id"] & \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) \arrow[d, "\sim"', "\sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}}"] \\
\mathbb{D}^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}^\vee \arrow[r, "\theta^\dagger", "\sim"'] & \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{E}),
\end{tikzcd}
$$

où $\theta^\dagger$ a été défini en 2.2.10, *est commutatif.*

PREUVE. Grâce aux diagrammes commutatifs 2.2.10 et 2.3.30.1, il s'agit de prouver l'égalité $\sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}} \circ \rho^{(m)}_{\mathbb{Q}} = \rho^\dagger$, où $\rho^\dagger$ a été construit 2.2.9. Cela revient à dire que le contour du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{E}) \\
\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}) \arrow[u] \arrow[ur] & \\
\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[u] \arrow[ur] & & \\
\mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[u] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
\tag{2.3.34.1}
$$

est commutatif. Or, celle des carrés se vérifie par fonctorialité et celle des deux triangles de droite et de gauche est immédiate. Enfin, celle du triangle du milieu découle de la transitivité de 2.3.8 (voir aussi la remarque 2.3.9.(ii)).

2.3.35 Avec les notations de 2.3.28, on dispose d'un morphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^{*}\mathcal{E}' \to F^{*}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}')$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F^{*}\mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^{*}\mathcal{E}' \arrow[r, dotted] & F^{*}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'). \end{tikzcd}$$

Par complétion, tensorisation par $\mathbb{Q}$ et passage à la limite, il découle de [Ber00, 3.1.3] que ce morphisme est un isomorphisme.

Nous aurons besoin du lemme suivant afin de prouver la proposition ci-après.

LEMME 2.3.36. *Pour tout* $\mathcal{E}' \in D_{\mathrm{parf}}({}^{g}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}})$, *le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} F^{*}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^{*}\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^{*}\mathcal{E}') \arrow[d, "\sim"'] \\ F^{*}\mathbb{D}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{\dagger}F^{*}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & \mathbb{D}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^{*}\mathcal{E}'), \end{tikzcd}$$

où les isomorphismes horizontaux se construisent via 2.3.31.1 *et* 2.3.35, *est commutatif.*

PREUVE. Un tilde au-dessus de $\mathbb{D}$ signifiera que l'on tensorise le foncteur correspondant par $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}$ (ou $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \omega_{\mathfrak{X}'}$). On se ramène à prouver la commutativité du diagramme:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} F^{\flat}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \arrow[r, "\sim"'] \arrow[d, "\sim"'] & \widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}') \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{\mathbb{D}}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^{*}\mathcal{E}') \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \arrow[d, "\sim"'] \\ F^{\flat}\widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}(F^{*}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E}') \arrow[r, "\sim"'] & \widetilde{\mathbb{D}}^{\dagger}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^{*}\mathcal{E}'). \end{tikzcd} \tag{2.3.36.1}$$

On désigne par τ, l'isomorphisme composé:

$$\tau \ : \ F^{\flat}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^{*}F^{\flat}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \overset{id\otimes a^{\dagger}}{\longrightarrow} F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},$$

où la flèche de gauche est l'inverse de l'isomorphisme qui se déduit de [Ber00, 4.1.2.2] et où $a^{\dagger}$ est l'inverse de l'isomorphisme canonique $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} F^{*}F^{\flat}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$ ([Ber00, 4.2.2.1]). La structure de $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-bimodule de $F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ se prolonge ainsi en une structure de $(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$-bimodule. De manière analogue à 1.4.15, on vérifie que τ correspond à l'inverse de l'isomorphisme que l'on déduit de 2.3.35.

On écrira $\mathcal{D}^\dagger$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}$, resp. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$) à la place de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$ ou $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}$, resp. $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$). On pose $\mathcal{E}'^\dagger := \mathcal{D}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{E}'$ et $(F^*\mathcal{E}')^\dagger = \mathcal{D}^\dagger \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{E}'$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}} F^\flat\mathcal{D}^\dagger} \arrow[r, "id\otimes\tau"] \arrow[d] & \widetilde{\mathbb{D}}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}} F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger \arrow[r] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'})\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger \arrow[d] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',\mathcal{D}^\dagger)\otimes_{\mathcal{D}^\dagger}F^\flat\mathcal{D}^\dagger \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[d] \\
\widetilde{\mathbb{D}}^\dagger(\mathcal{E}'^\dagger)\otimes_{\mathcal{D}^\dagger}F^\flat\mathcal{D}^\dagger \arrow[r] \arrow[dd, equal] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(\mathcal{E}'^\dagger,F^\flat\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "F^*"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(\mathcal{E}'^\dagger,F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[d, "F^*"] \\
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(F^*\mathcal{E}'^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(F^*\mathcal{E}'^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[d] \\
\boxed{\widetilde{\mathbb{D}}^\dagger(\mathcal{E}'^\dagger)\otimes_{\mathcal{D}^\dagger}F^\flat\mathcal{D}^\dagger} \arrow[r, dotted] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}((F^*\mathcal{E}')^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\tau", "\sim"'] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}((F^*\mathcal{E}')^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger),
\end{tikzcd} \tag{2.3.36.2}$$

où la flèche en bas à gauche est définie de façon à rendre commutatif le rectangle en bas à gauche. En lui ajoutant le suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'})\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger \arrow[r, "F^*"] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}',F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'})\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger \arrow[r, "\alpha^{(m)}"] \arrow[d] & \boxed{\widetilde{\mathbb{D}}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^*\mathcal{E}')\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger} \arrow[d] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}}(\mathcal{E}',F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "F^*"] \arrow[d] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}',F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\alpha^{(m)}"] \arrow[ddd] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}(F^*\mathcal{E}',\mathcal{D}^\dagger) \arrow[ddd] \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(\mathcal{E}'^\dagger,F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[d, "F^*"] & & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(F^*\mathcal{E}'^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[d] & & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}((F^*\mathcal{E}')^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, equal] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}((F^*\mathcal{E}')^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\alpha^{(m)}"] & \boxed{\widetilde{\mathbb{D}}^\dagger((F^*\mathcal{E}')^\dagger)},
\end{tikzcd} \tag{2.3.36.3}$$

où $a^{(m)}$ est l'inverse de l'isomorphisme canonique $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}$ ([Ber00, 4.1.2.1]), on obtient le carré 2.3.36.1. En effet, en ce qui concerne les flèches du haut, de droite et de gauche, c'est immédiat. Pour établir qu'il en est de même de celle du bas, il s'agit de vérifier que la flèche composée du haut du diagramme commutatif ci-après

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(F^*\mathcal{E}'^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\tau"] & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}(F^*\mathcal{E}'^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\alpha^{(m)}"] \arrow[d] & \widetilde{\mathbb{D}}^\dagger(F^*\mathcal{E}'^\dagger) \arrow[d] \\
 & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger}((F^*\mathcal{E}')^\dagger,F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\alpha^{(m)}"] & \widetilde{\mathbb{D}}^\dagger((F^*\mathcal{E}')^\dagger).
\end{tikzcd} \tag{2.3.36.4}$$

est le morphisme canonique induit par $a^\dagger$. Ce dernier fait résulte de la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
F^*F^\flat\mathcal{D}^\dagger \arrow[r] \arrow[dr, "F^*\tau"'] \arrow[rr, bend left, equal] & F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} F^*F^\flat\mathcal{D}^\dagger) \arrow[r, "\alpha^{(m)}\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\alpha^\dagger"] & \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} F^*F^\flat\mathcal{D}^\dagger \arrow[d, "id\otimes\alpha^\dagger"] \\
 & F^*F^\flat\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger \arrow[r, "\alpha^{(m)}\otimes id"] & \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{D}^\dagger.
\end{tikzcd} \tag{2.3.36.5}$$

Il résulte de la commutativité du rectangle du haut de 1.4.15.1 (on complète, on tensorise par $\mathbb{Q}$ et on l'applique à $\mathcal{E}' = F^{\flat}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}$), celle du diagramme du haut de 2.3.36.5. Celle du carré de 2.3.36.5 est fonctorielle et celle du triangle est tautologique.

Il reste à présent à prouver que les diagrammes 2.3.36.2 et 2.3.36.3 sont commutatifs. Celle du rectangle supérieur de 2.3.36.2 découle, via la remarque 2.3.9.(ii), de la transitivité de 2.3.8. On valide celle du carré de gauche de la deuxième ligne de 2.3.36.2 en procédant de manière analogue à 2.3.32.4. Pour vérifier la commutativité du rectangle en bas à gauche de 2.3.36.3, il suffit de résoudre $F^{\flat}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{\dagger}$ par des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules injectifs et $\mathcal{E}'$ par des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}$-modules plats. Celle du carré en haut à droite de 2.3.36.3 se calcule en résolvant $\mathcal{E}'$ par des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}$-modules plats et $F^{\flat}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}$ par des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$-modules injectifs. La commutativité des autres carrés ou rectangles est fonctorielle. □

PROPOSITION 2.3.37. *Avec les notations de* 2.3.28, *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
F^*[\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')] & \longrightarrow & \mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^*\mathcal{E}') \\
\downarrow{\scriptstyle \sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}}} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}} \\
F^*[\mathbb{D}^{\dagger}(\mathcal{E}')] & \longrightarrow & \mathbb{D}^{\dagger}(F^*\mathcal{E}')
\end{array}$$

est commutativ.

PREUVE. Par construction de l'isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}^{(m+s)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'\mathbb{Q}} \otimes_{\hat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} \mathcal{E})$ (2.3.35), le premier et le dernier isomorphisme de 2.3.33.1 sont compatibles à Frobenius. Pour celui du milieu, cela correspond à 2.3.36. □

THÉORÈME 2.3.38. *Avec les notations* 2.3.1, *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
F^*[\mathbb{D}^{\dagger}_{Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^{\dagger}Z')_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^{\dagger}Z')_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}'^{\vee}] & \xrightarrow{F^*\theta^{\dagger}} & F^*\mathbb{D}^{\dagger}_{Z'}(\mathcal{E}') \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}} (F^*\mathcal{E}')^{\vee} & \xrightarrow{\theta^{\dagger}} & \mathbb{D}^{\dagger}_{Z}(F^*\mathcal{E}').
\end{array} \qquad (2.3.38.1)$$

est commutatif.

PREUVE. Comme cela est expliqué en 2.3.1, il suffit de prouver le théorème pour Z vide. Considérons le cube ci-après.

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (F^*\mathcal{E}')^\vee) \arrow[rr, "\theta^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}"] \arrow[dd] & & \mathbb{D}^{(m+s)}_{\mathbb{Q}}(F^*\mathcal{E}') \arrow[dd] \\
F^*[(\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} (\mathcal{E}')^\vee)] \arrow[ur] \arrow[rr, "F^*(\theta^{(m)}_{\mathbb{Q}})"] \arrow[dd] & & F^*[\mathbb{D}^{(m)}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E}')] \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& \mathbb{D}^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (F^*\mathcal{E}')^\vee \arrow[rr, "\theta^\dagger"] & & \mathbb{D}^\dagger(F^*\mathcal{E}') \\
F^*[\mathbb{D}^\dagger(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}} (\mathcal{E}')^\vee] \arrow[ur] \arrow[rr, "F^*\theta^\dagger"] & & F^*[\mathbb{D}^\dagger(\mathcal{E}')], \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{2.3.38.2}$$

où les flèches verticales sont induites par les morphismes de la forme $\sigma^{(m)}_{\mathbb{Q}}$. D'après 2.3.32, le carré du haut est commutatif. De plus, grâce à 2.3.34, ceux de devant et de derrière le sont aussi. Via 2.3.37, les carrés de droite et de gauche sont commutatifs. Comme les morphismes sont des isomorphismes, il en dérive la commutativité du carré du bas. □

THÉORÈME 2.3.39. *Avec les notations* 2.3.1, *l'isomorphisme*

$$\mathbb{D}^\dagger_{Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger Z')_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}({}^\dagger Z')_{\mathbb{Q}}} \mathrm{sp}_*(E'^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}^\dagger_{Z'}(\mathrm{sp}_*(E'))$$

est compatible à Frobenius.

PREUVE. Cela résulte de 2.2.7.2 et de 2.3.38. □

REFERENCES

[AB01] Y. ANDRÉ - F. BALDASSARRI, *De Rham cohomology of differential modules on algebraic varieties.*, Progress in Mathematics (Boston, Mass.), **189**. Basel: Birkhäuser. vii, 214 p., 2001 (English).

[Ber90] P. BERTHELOT, «*Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*», p-adic analysis (Trento, 1989), Springer, Berlin (1990), pp. 80–124.

[Ber96] P. BERTHELOT, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **29** (1996), no. 2, pp. 185–272.

[Ber00] P. BERTHELOT, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) (2000), no. 81, pp. vi+136.

[Ber02] P. BERTHELOT, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, Astérisque (2002), no. 279, pp. 1–80, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

[BGK+87] A. BOREL, - P.-P. GRIVEL - B. KAUP - A. HAEFLIGER - B. MALGRANGE - F. EHLERS, *Algebraic D- modules*, Academic Press Inc., Boston, MA (1987).

[Cara] D. CARO, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surholonomes*, Prépublication.

[Carb] D. CARO, *Dévissages des F-complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en F-isocristaux surconvergents*, Prépublication.

[Carc] D. CARO, *Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes*, À paraître dans Compositio Mathematica.

[Car04a] D. CARO, *Cohérence différentielle des F-isocristaux unités*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), no. 2, pp. 145–150.

[Car04b] D. CARO, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **54** (2004), no. 6, pp. 1943–1996.

[Car04c] D. CARO, *Surcohérence: holonomie des F-isocristaux unités*, Prépublication de l'Université de Sydney (2004).

[Har66] R. HARTSHORNE, *Residues and duality* (Springer-Verlag, Berlin, 1966).

[LSQ97] B. Le STUM - A. QUIRÓS, *Transversal crystals of finite level*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 1, pp. 69–100.

[Mer72] D. MEREDITH, *Weak formal schemes*, Nagoya Math. J. **45** (1972), p. 1–38.

[MNM90] Z. MEBKHOUT - L. NARVÁEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, p-adic analysis (Trento, 1989), Lecture Notes in Math., vol. **1454** (Springer, Berlin, 1990), p. 267–308.

[NH] C. NOOT-HUYGHE, *Finitude de la dimension homologique d'algèbres d'opérateurs différentiels faiblement complètes et à coefficients surconvergents*, A paraître au Journal of Algebra (2004).

[NH03] C. NOOT-HUYGHE, *Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout-Narváez-Macarro*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), no. 1, pp. 147–199.

[sga71] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* (Springer-Verlag, Berlin, 1971), Séminaire de Géométrie Algégrique du Bois-Marie 1966–1967 (SGA 6), Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck et L. Illusie. Avec la collaboration de D. Ferrand, J. P. Jouanolou, O. Jussila, S. Kleiman, M. Raynaud et J. P. Serre, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **225**.

[sga72] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 2*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **270**.

[Tsu02] N. TSUZUKI, *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, Duke Math. J., **111** (2002), no. 3, p. 385–418.

[Vir00] A. VIRRION, *Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), no. 1, pp. 1–68.

[Vir04] A. VIRRION, *Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin (2004), pp. 1039–1112.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 giugno 2005