REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 114 (2005)

Sur le radical permanent dans les algèbres topologiques

HAKIMA MOUANIS - AHMED ZINEDINE (*)

ABSTRACT - Let A be a topological algebra. In [1], Żelazko asked whether the permanent radical of A in the class of all topological algebras is equal to the ideal $I_s(A)$ consisting of all elements of A possessing small powers. Our aim in this paper is to show that this is always true.

1. Introduction.

Toutes les algèbres considérées dans ce papier sont commutatives complexes. Une algèbre topologique est une algèbre munie d'une topologie telle que les trois lois de l'algèbre soient continues. On note $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{LC}$, resp. $\mathcal{B}_0$) la classe de toutes les algèbres topologiques (resp. localement convexes, resp. localement convexes métrisables complètes). Soit $A \in \mathcal{T}$. Le radical de A, noté $Rad(A)$ est l'intersection de tous les idéaux maximaux de A. Si on note $G(A)$ le groupe des éléments inversibles de A, alors on a:

$$Rad\,(A) = \{x \in A : \ e - ax \in G(A), \ \forall a \in A\}$$

Soient $\mathcal{K}$ une classe d'algèbres topologiques et $A \in \mathcal{K}$. Une algèbre $B \in \mathcal{K}$ est dite une $\mathcal{K}$-extension de A s'il existe un isomorphisme d'algèbres topologiques ϕ de A dans une sous-algèbre unitaire de B tel que $\phi(e_A) = e_B$. Alors on peut voir A comme une sous-algèbre topologique de B.
Dans la théorie des algèbres topologiques, on rencontre plusieurs notions en relation avec la notion d'extensions. Par exemple, on trouve la notion d'élément singulier permanent, celle d'idéal non relevable et celle du radical permanent introduite par Żelazko dans [1]:

(*) Indirizzo degli Autori: Département de mathématiques et informatique, Université S.M. Ben Abdellah, Faculté des sciences Dhar-Mehraz, B.P. 1796 Fès-Atlas, Fès (MAROC); e-mail: ahmedzinedine@yahoo.com

DÉFINITION 1 ([1]). *Soit $\mathcal{K}$ une classe d'algèbre topologique et $A \in \mathcal{K}$. On appelle radical permanent de A par rapport à la classe $\mathcal{K}$ le sous-ensemble de A suivant:*

$$Rad_{\mathcal{K}}(A) = \{x \in A : \ x \in Rad(B) \text{ pour toute } \mathcal{K}-\text{extension } B \text{ de } A\}$$

Il est claire que $Rad_{\mathcal{K}}(A)$ est un idéal de A contenu dans $Rad(A)$ et que pour deux classe $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ qui contiennent A et telles que $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$ on a $Rad_{\mathcal{K}_2}(A) \subset Rad_{\mathcal{K}_1}(A)$. En particulier, pour toute classe $\mathcal{K}$ d'algèbres topologiques telle que $A \in \mathcal{K}$ on a $Rad_{\mathcal{T}}(A) \subset Rad_{\mathcal{K}}(A)$.

2. Eléments à petites puissances.

DÉFINITION 2 ([1]). *Soient A une algèbre topologique et $x \in A$. On dit que x est un élément à petites puissances (possessing small powers) si pour tout voisinage U de 0 dans A, il existe un entier n tel que $\mathbb{C}x^n \subset U$. On note $I_s(A)$ l'ensemble de tous les éléments à petites puissances de A.*

Il est évident que si x est à petites puissances dans A alors il est ainsi dans toute extension topologique de A.

PROPOSITION 1 ([1]). *Soient A une algèbre topologique et $x \in A$. Alors x est à petites puissances si, et seulement si, pour tout voisinage U de l'origine, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Ax^n \subset U$.*

PROPOSITION 2 ([1]). *Soient A une algèbre topologique et $x \in A$. Alors x est à petites puissances si, et seulement si, pour toute suite $(z_i)_i$ d'éléments de A, la série $\sum_0^\infty x^i z_i$ converge dans A.*

Pour la preuve, voir proposition 2.5 de [1] et la remarque qui la suit.

PROPOSITION 3 ([1]). *Soit A une algèbre topologique. Alors $I_s(A)$ est un idéal de A et on a:*

$$I_s(A) \subset Rad_{\mathcal{T}}(A)$$

Dans ([1]), Żelazko a montré le théorème suivant:

THÉORÈM 1. *Soient $\mathcal{K}$ l'une des deux classes $\mathcal{LC}$ ou $\mathcal{B}_0$ et $A \in \mathcal{K}$. Alors on a:*

$$I_s(A) = Rad_{\mathcal{K}}(A) = Rad_{\mathcal{T}}(A)$$

Dans le cas d'une algèbre topologique quelconque (non nécessairement dans $\mathcal{B}_0$ ni dans $\mathcal{LC}$), on ne sait pas si $Rad_{\mathcal{T}}(A)$ coïncide avec $I_s(A)$ ou non:

PROBLÈME ([1]). *Soit A une algèbre topologique. A-t-on $I_s(A) = Rad_{\mathcal{T}}(A)$?*

Notre but dans la suite est de montrer que la réponse à ce problème est positive.

3. Résultat principal.

THÉORÈM 2. *Soit A une algèbre topologique. Alors $I_s(A) = Rad_{\mathcal{T}}(A)$.*

Preuve:

L'inclusion $I_s(A) \subset Rad_{\mathcal{T}}(A)$ est déjà connue (voir proposition 3). Il nous reste donc à montrer que si $x \notin I_s(A)$, alors il existe une extension B de A telle que $x \notin Rad(B)$. Soit donc $x \in A$ tel que $x \notin I_s(A)$. Considérons l'algèbre S des séries formelles à coefficients dans A munie de la multiplication par scalaires et de la somme habituelles et de la multiplication de cauchy des séries formelles. Soit B le sous-ensemble de S défini par:

$$B = \Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i : \sum_{i=0}^{\infty} a_i z_i \text{ converge pour toute suite } (z_i)_i \text{ de } A \Big\}$$

(B est défini de façon que $x \in I_s(A) \Longleftrightarrow \sum_0^{\infty} x^i t^i \in B$ (voir proposition 2).) B est une sous algèbre de S. En effet, si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ sont deux éléments de B et (z_i) une suite d'éléments de A, alors $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) z_i = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i z_i) + (\sum_{i=0}^{\infty} b_i z_i)$. Puisque les deux séries du terme à droite de l'égalité sont convergentes, alors la série $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) z_i$ converge et alors la somme des deux séries est encore dans B. La même chôse pour le produit et la multiplication par scalaire.
Munissons maintenant B d'une topologie convenable. Pour tout voisinage V de 0 dans A, posons

$$W(V) = \Big\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \in B : \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \in V, \ \forall z \in A \Big\}$$

La collection de tous les $W(V)$ définit un système de voisinages de 0 dans B pour une topologie d'algèbre topologique. En effet, il est facile de voir que si V est équilibré alors $W(V)$ est aussi équilibré. D'autre par si U est un voisinage de 0 dans A tel que $U+U \subset V$ alors $W(U)+W(U) \subset W(V)$, car si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ sont dans $W(U)$ alors pour tout $z \in A$, $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i+b_i) z^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \in U+U \subset V$. De même pour le produit: si U est un voisinage de l'origine de A qui vérifie $U.U \subset V$ alors $W(U).W(U) \subset W(V)$ car si $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ sont dans $W(U)$ alors pour tout $z \in A$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \Big) z^i = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i=0}^{n} (a_i z^i)(b_{n-i} z^{n-i}) \Big) =$$

$$= \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \Big) \Big(\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i \Big) \in U.U \subset V$$

Donc B est une algèbre topologique. Mais il reste à voir que B est une extension de A. Pour cela, considérons l'application ψ de A dans B qui à tout a de A fait correspondre l'élément a de B (la série formelle constante a). Alors ψ est bien injective et $\psi(e_A) = e_B$. Donc A peut être vue comme une sous-algèbre de B. Reste à remarquer que la topologie de B induit sur A exactement la topologie initiale de A. En effet, il est évident que pour tout voisinage V de 0 dans A on a: $W(V) \cap A = V$. Donc B est bien une extension topologique de A.
Il nous reste dans la suite à montrer que x n'est pas dans le radical de B. Supposons que le contraire est vrai. Alors, en particulier, l'élément $e - xt$ de B doit être inversible dans B. D'où l'existance d'un élément $\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ de B tel que:

$$(e - xt) \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i \Big) = e$$

Ce qui donne

$$a_0 - \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x a_{i-1}) t^i = e$$

On aboutit à:

$$a_0 = e, \ a_1 = x, \ a_2 = x^2, ..., \ a_i = x^i, ...$$

On conclut donc que si $e - xt$ est inversible dans B, son inverse ne peut être que $\sum_{i=0}^{\infty} x^i t^i$. Mais cet élément ne peut être dans B car x n'est pas à petites puissances (voir proposition 2). Par conséquent, $e - xt$ ne peut être inversible dans B et par suite x n'est pas dans le radical de B. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Żelazko, *On permanent radical in commutative locally convex algebras*, Studia Math., **75** (1983), pp. 265-272.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 luglio 2003, modificato il 26 aprile 2005