REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 112 (2004)

Sur le $\mathcal{D}$-module associé au complexe des cycles proches et ses variantes p-adiques.

MICHEL GROS (*)

0. Introduction.

Soient K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers O_K, de corps résiduel k et X un schéma propre à réduction semi-stable de fibre spéciale Y et de fibre générique X_K. Cet article, qui fait suite à [11], est motivé *in fine* par la recherche d'une théorie de la spécialisation pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques (éventuellement munis d'une structure de frobenius) et, préalablement, par la question de l'obtention (via le foncteur «complexe de De Rham») des structures sous-jacentes D_n ((K_0, φ, N)-structures [14] et filtration par le poids [19]) aux groupes de cohomologie de De Rham $H^n_{DR}(X_K/K)$ de X_K ($n \geqslant 0$) à partir de structures analogues sur certains $\mathcal{D}$-modules arithmétiques.

Le résultat «local», qui admet un décalque p-adique concernant la situation X/O_K ci-dessus, concerne la filtration par le «poids» sur le $\mathcal{D}_Z$-module $\mathcal{M}$ intervenant, via la correspondance de Riemann-Hilbert, dans la description du complexe (pervers) des cycles proches $R\psi_f\mathbb{C}$ (cf. [11], 2.1) associée à la situation géométrique ci-dessous. Sous une forme grossière, il s'énonce:

(*) soient Z une variété algébrique complexe lisse munie de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$, $S := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[t])$ et $f: Z \to S$ défini par $f(t) =$

(*) Indirizzo dell'A.: IRMAR, UMR CNRS 6625, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France.
E-mail: michel.gros@univ-rennes1.fr
Membre du programme TMR de la CEE, réseau *Arithmetic Algebraic Geometry* (contract HPRN-CT-2000-00120).

$= x_1, \ldots, x_d$, $(d \leqslant n)$. Le $\mathcal{O}_Z$-module cohérent $\mathcal{M}$ est muni d'un opérateur nilpotent d'ordre d (la monodromie) N et la filtration de $\mathcal{M}$ associée ([10], prop. 1.6.1) à N a un gradué qui s'exprime canoniquement comme somme directe de groupes de «cohomologie locale» à supports dans la réunion disjointe des composantes irréductibles de $Y := f^{-1}(0)$ ou de leurs intersections itérées successives.

Ce type de dévissage n'est conceptuellement pas «nouveau», au sens où, pour ne citer que [22], 3.6, on peut trouver dans la littérature des énoncés de même nature. Notre but, en reconsidérant ceux-ci sous la forme qui va suivre, était de rendre les choses plus explicites (description des $\operatorname{Ker} N^i$, utilisation de présentations des $\mathcal{D}$-modules,...), peut-être, que dans *loc. cit.* et de convaincre le lecteur qu'une partie d'entre eux restent valides dans un cadre p-adique, dans l'esprit de [11]. Ces arguments locaux devraient ultérieurement permettre, à l'aide de techniques simpliciales, de définir un $\mathcal{D}$-module arithmétique dont les groupes de cohomologie de De Rham sont isomorphes aux D_n et de retrouver très naturellement la suite spectrale des «poids» de [19].

Dans le premier chapitre, après avoir fixé les situations géométriques, nous décrivons le $\mathcal{D}_Z$-module $\mathcal{M}$ ainsi que l'opérateur de monodromie N nilpotent dont il est muni. Le second chapitre est consacré à la description, évoquée plus haut, du gradué de $\mathcal{M}$ pour la filtration associée à N. Les calculs contenus dans ces deux chapitres sont entièrement explicites et «élémentaires» et l'on a essayé, dès qu'on le pouvait, de s'affranchir (cf. par exemple [16]) de la technique du «graphe». Ils reposent, dans leur esprit, sur des techniques de division (également valides, cf. [20], dans divers contextes p-adiques). Dans le dernier chapitre, que nous développerons dans un travail ultérieur, nous esquissons l'extension des résultats précédents à une situation p-adique comme celle X/O_K du début: le Z de (*) devient alors un schéma lisse sur W (les vecteurs de Witt sur k) dans lequel, «localement» pour la topologie étale, X/O_K se plonge (technique inaugurée dans [13], [14]).

Remerciements. Des parties de ce texte contiennent, avec d'éventuelles erreurs dont je suis seul responsable, des éléments d'un projet de travail en collaboration avec Luis Narvaez-Macarro. Ses indications et ses commentaires lors de nos discussions ont été essentiels pour moi: qu'il en soit très sincèrement remercié. Je tiens également à remercier Delphine Boucher pour ses réponses à mes questions sur les bases de Groebner.

1. Un $\mathcal{D}$-module explicite.

1.1. *Les situations géométriques*

On s'intéressera aux deux situations suivantes:

(I) la donnée d'un morphisme de schémas $Z \to \mathrm{Spec}\,(O_K[t])$ se factorisant par un morphisme étale $h : Z \to \mathbb{A}^n := \mathrm{Spec}\,(O_K[x_1, \ldots, x_n])$ avec $t \to x_1 \ldots x_d$ $(d \leqslant n)$. Pour π une uniformisante choisie de O_K, la fibre au-dessus de $t = \pi$ de cette situation conduit à un schéma $X \to \mathrm{Spec}\,(O_K)$ semi-stable comme dans l'introduction (mais sans hypothèse de propreté).

(II) la donnée d'un morphisme de schémas $Z \to S := \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[t])$ se factorisant par un morphisme étale $h : Z \to \mathbb{A}^n := \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n])$ avec $t \to x_1 \ldots x_d$ $(d \leqslant n)$.

Ces situations apparaissent respectivement dans [14] et [23]. Les résultats que nous avons en vue se ramènent par des images inverses convenables aux cas $Z = \mathbb{A}^n$ et $d = n$ auxquels nous nous limitons dans la suite.

1.2. *Rappels et définitions.*

Soient U une variété analytique, $U_0 \subset U$ une hypersurface lisse d'équation $f = 0$ et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_U$-module holonome. Rappelons que, d'après Kashiwara, on sait associer canoniquement à cette situation une filtration de $\mathcal{N}$ appelée V-filtration (de $\mathcal{N}$) relativement à U_0. Sa définition utilise de manière essentielle l'existence ([1]) pour toute section locale $n \in \mathcal{N}$ d'un polynôme à racines réelles, dit de Bernstein-Sato, (lequel intervient dans les équations fonctionnelles du même nom) de n; on a alors simplement $V_\alpha \mathcal{N} := \{ n \in \mathcal{N} \mid$ les racines du polynôme de Bernstein-Sato de n sont $\geqslant -\alpha - 1 \}$. L'un des intérêts de ces considérations vient du fait que le complexe de de Rham de $\oplus_{-1 \leqslant \alpha < 0} gr_\alpha^V \mathcal{N}$ intervient dans la théorie des cycles évanescents, ce que nous allons maintenant préciser dans un cas particulier en nous plaçant dans la situation (II) et en passant aux variétés analytiques associées (que nous noterons de la même manière).

Posons $f := x_1 \ldots x_d$ et considérons $U := Z \times (\mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[t]))^{an}$, $U_0 := Z$ défini par l'équation $t = 0$, i_f: $\Gamma_f \to U$ l'immersion fermée du graphe Γ_f de h et $\mathcal{N} := i_{f+} O_{\Gamma_f} = \underline{H}^1_{\Gamma_f}(O_U) = O_U\left[\dfrac{1}{t-f}\right] \Big/ O_U$ (muni de sa structure natu-

([1]) Cette théorie fait pour l'instant défaut dans le cadre p-adique.

relle de $\mathcal{D}_U$-module holonome). La classe $\delta(t-f)$ de $\dfrac{1}{t-f}$ dans $\mathcal{N}$ engendre $\mathcal{N}$ et l'on connait (cf. plus bas (37)) son polynôme de Bernstein-Sato. Dans cette situation très favorable, le fait général que $\oplus_{-1 \leqslant \alpha < 0} gr_\alpha^V \mathcal{N}$ soit à support dans U_0 permet de le considérer comme un $\mathcal{D}_Z$-module que nous noterons $\mathcal{M}_Z$ (ou $\mathcal{M}$ si aucune confusion n'en résulte) dont on peut donner une présentation. Dans [11] (le point clef est le lemme 2.3.3), on a montré en effet que

(1) $$\mathcal{M}_Z = \frac{\mathcal{D}_Z}{\mathcal{D}_Z.(f, \delta_1, \dots, \delta_{d-1})}$$

avec $f := x_1, \dots x_d$, $\delta_i := x_1 \partial_1 - x_{i+1} \partial_{i+1} = \partial_1 x_1 - \partial_{i+1} x_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant$ $\leqslant d-1$.

Le lien avec la théorie des cycles évanescents est alors le suivant: soient $\tilde{S}^*$ le revêtement universel de $S^* := S^{an} - \{0\}$ et $\tilde{Z}^* := Z \times_{S^*} \tilde{S}^*$, on a un isomorphisme entre (cf. [17], thm. 3.4) le complexe des cycles proches $R\psi_f(\mathbb{C}) := i^* Rj_* \mathbb{C}_{\tilde{Z}^*}$ (avec $i : Y := f^{-1}(0) \hookrightarrow Z$ et $j : \tilde{Z}^* \to Z$ les morphismes canoniques) et $DR(\mathcal{M}_Z[1])$.

Ce $\mathcal{D}_Z$-module (et ses autres incarnations) a été considéré indépendamment dans [16] pour les mêmes raisons. Il est muni d'un opérateur de «monodromie» N qui apparait lorsque l'on veut interprèter, au niveau de $\mathcal{M}_Z$, le logarithme de l'action induite sur $R\psi_f(\mathbb{C})$ par le générateur positif de $\pi_1(S^*)$ (cf. [23]). Si l'on considère la définition qui précède, N se décrit comme la multiplication à droite (rappelons que s est une variable commutant avec tous les éléments de $\mathcal{D}_Z$) par $s+1$.

Ainsi, si $\overline{Pf^s}$ désigne la classe de $Pf^s \in \mathcal{D}_Z[s]\, f^s$ dans $\mathcal{M}$, on a:

(2) $$N(\overline{Pf^s}) = (s+1)\, \overline{Pf^s} = \overline{P(s+1) f^s}$$

et, si l'on cherche à exprimer $(s+1)\, f^s$ en fonction de f^s, on voit immédiatement que tout opérateur différentiel E laissant f invariant (ie. $E(f) = f$) va vérifier $(E+1)(f^s) = (s+1)\, f^s$ et donc que l'on aura

(3) $$N(\overline{Pf^s}) = \overline{P(s+1)\, f^s} = \overline{P.(E+1)\, f^s}.$$

Autrement dit, sur $\mathcal{M}$ réinterprété comme $\dfrac{\mathcal{D}_Z}{\mathcal{D}_Z.(f, \delta_1, \dots, \delta_{d-1})}$, l'opérateur N apparait comme la multiplication à droite par $E+1$ avec E «Euler-homogène» (ie. $E(f) = f$) quelconque. Il est utile de ne pas fixer E (et de choisir par exemple $E = x_i \partial_i$ pour divers i) comme dans la démonstration du

Lemme 1.1.1. On a $N^d = 0$ dans $\mathcal{M}$.

Démonstration. En effet, utilisant successivement $N = {} = .\, \partial_1 x_1, \ldots, N = .\, \partial_d x_d$, on obtient que N^d est la multiplication à droite par $\partial_1 x_1 \ldots \partial_d x_d = \partial_1 \ldots \partial_d x_1 \ldots x_d = \partial_1 \ldots \partial_d f$, élément qui appartient à $\mathcal{D}_Z.(f, \delta_1, \ldots, \delta_d)$. D'où le résultat.

1.3. *La suite exacte fondamentale.*

Cette explicitation de N permet d'obtenir une incarnation, au niveau des $\mathcal{D}_Z$-modules et via la correspondance de Riemann-Hilbert (foncteur «complexe des solutions»), du triangle distingué canonique intervenant dans la théorie des cycles évanescents

$$\mathbb{L}i^{-1}(\mathbb{C}_Y) \to R\psi_f(\mathbb{C}) \to R\phi_f(\mathbb{C}) \xrightarrow{[+1]} \tag{4}$$

(avec $R\phi_f(\mathbb{C})$ défini comme cône du morphisme canonique d'adjonction $\mathbb{L}i^{-1}(\mathbb{C}_Y) \to R\psi_f(\mathbb{C})$).

Il suffit, en effet, de considérer la suite exacte évidente construite à partir de $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$

$$0 \to \frac{\mathcal{M}}{\operatorname{Ker} N} \xrightarrow{N} \mathcal{M} \to \operatorname{Coker} N \to 0 \tag{5}$$

et la description explicite de N ci-dessus donne immédiatement la

Proposition 1.3.1. On a un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Coker}(N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}_Z / \mathcal{D}_Z.(f, \partial_1 x_1, \ldots, \partial_d x_d). \tag{6}$$

On reconnait, dans le second membre, la présentation standard du premier groupe de cohomologie locale $\underline{H}^1_Y(O_Z)$ de O_Z à support dans Y (qui par la correspondance de Riemann-Hilbert «correspond» à $\mathbb{L}i^{-1}(\mathbb{C})$).

Remarque 1.3.2. Mentionnons dès maintenant que la description de $\operatorname{Ker} N$ donnée ci-dessous nous permettra de voir que l'on a un isomorphisme

$$\frac{\mathcal{M}}{\operatorname{Ker} N} \simeq \frac{\mathcal{D}_Z}{\sum_{i=1,\ldots,d} \mathcal{D}_Z.(x_1 \ldots \widehat{x_i} \ldots x_d, \delta_1, \ldots, \delta_{d-1})} \tag{7}$$

ce qui finit d'expliciter complètement la suite exacte de $\mathcal{O}_Z$-modules dont découle le triangle ci-dessus.

2. Filtration par la monodromie.

2.1. *Rappels.*

L'opérateur N, étant nilpotent sur $\mathcal{M}$, induit canoniquement une filtration croissante $\mathrm{Fil}_i\mathcal{M}$ (dite filtration par la monodromie ou par le poids) caractérisée ([10], prop. 1.6.1) par les deux propriétés suivantes:

(i) $N(\mathrm{Fil}_i\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}_{i-2}\mathcal{M}$

(ii) N^j induit un isomorphisme $N^j\colon Gr_j\mathcal{M} \to Gr_{-j}\mathcal{M}$ pour tout $j \geqslant 0$.

(avec $Gr_j\mathcal{M} := \mathrm{Fil}_j\mathcal{M}/\mathrm{Fil}_{j-1}\mathcal{M}$)

La construction de $\mathrm{Fil}_i\mathcal{M}$ est fonctorielle en un sens évident et on peut la décrire explicitement ([24], (3)) par:

$$\mathrm{Fil}_i\mathcal{M} = \sum_{l \geqslant 0,\ -i} N^l(\mathrm{Ker}\, N^{2l+i+1}) \tag{8}$$

ou encore (loc. cit.) comme convolution de la filtration par les noyaux et les images des puissances de N. On définit sur $\mathcal{M}$ deux filtrations: l'une croissante $K_l\mathcal{M} = \mathrm{Ker}\, N^{l+1}$ si $l \geqslant 0$ et 0 sinon et l'autre décroissante $I^j\mathcal{M} = \mathrm{Im}\, N^j$ si $j > 0$ et $\mathcal{M}$ sinon. On a alors

$$\mathrm{Fil}_i\mathcal{M} = \sum_{l-j=i} K_l\mathcal{M} \cap I^j\mathcal{M}. \tag{9}$$

Sur $Gr_l^K\mathcal{M} := K_l\mathcal{M}/K_{l-1}\mathcal{M}$, on dispose aussi d'une filtration par les images de N définie par $I^j Gr_l^K\mathcal{M} := \mathrm{Im}\,(I^j\mathcal{M} \cap K_l\mathcal{M} \to K_l\mathcal{M}/K_{l-1}\mathcal{M})$ et le gradué $Gr_i\mathcal{M}$ s'interprète comme suit (cf. (A.1) [25]):

Lemme 2.1.1. Le morphisme canonique $\oplus_{l-j=i} K_l\mathcal{M} \cap I^j\mathcal{M} \to Fil_i\mathcal{M}$ induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \oplus_{l-j=i}\, Gr_I^j\, Gr_l^K\mathcal{M} &= \\ &= \oplus_{l-j=i} \frac{\mathrm{Im}\,(N^j\colon Gr_{l+j}^K\mathcal{M} \to Gr_l^K\mathcal{M})}{\mathrm{Im}\,(N^{j+1}\colon Gr_{l+j+1}^K\mathcal{M} \to Gr_l^K\mathcal{M})} \to Gr_i\mathcal{M}. \end{aligned} \tag{10}$$

2.2. *Description du gradué.*

Pour $j > 0$, on notera $Y^{(j)}$ la réunion disjointe de j intersections des composantes irréductibles de Y (défini dans Z par $f = 0$). Ainsi, $Y^{(1)} = \coprod_{1 \leq l \leq d} Y_l$ est la réunion disjointe des composantes irréductibles $(Y_l)_{1 \leq l \leq d}$ de Y, $Y^{(2)} := \coprod_{l < l'} Y_l \cap Y_{l'}$, …

Les groupes de cohomologie locale $\underline{H}^n_{Y^{(j)}}(O_Z)$ de O_Z à support dans $Y^{(j)}$ (qui sont nuls sauf pour $n = j$, la codimension de $Y^{(j)}$ dans Z) sont de manière naturelle des $\mathcal{D}_Z$-modules cohérents.

Considérons maintenant le $\mathcal{D}_Z$-module $\mathcal{H}^j_{Y^{(j)}}(O_Z)$ suivant: pour $j > 0$, on note $Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}$ l'intersection de j des composantes lisses de Y et l'on pose

$$\mathcal{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z) := \mathcal{D}_Z / \mathcal{D}_Z . (x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}, \partial_1, \ldots, \widehat{\partial_{i_1}}, \ldots, \widehat{\partial_{i_j}}, \ldots, \partial_d) \tag{11}$$

(la notation $\widehat{\partial_{i_j}}$ signifie que l'on exclut ∂_{i_j} du d-uplet $(\partial_1, \ldots, \partial_d)$), puis

$$\mathcal{H}^j_{Y^{(j)}}(O_Z) := \oplus_{i_1 < \ldots < i_j} \mathcal{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z) . \tag{12}$$

Il est bien connu que l'application

$$\mathcal{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z) \to \underline{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z) \tag{13}$$

induite (par passage au quotient) par l'application

$$P \in \mathcal{D}_Z \to P . \frac{1}{x_{i_1} \ldots x_{i_j}} \in \underline{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z) \tag{14}$$

est un isomorphisme (laquelle induit un isomorphisme $\mathcal{H}^j_{Y^{(j)}}(O_Z) \to \underline{H}^j_{Y^{(j)}}(O_Z)$).

Ces distinctions typographiques (entre $\mathcal{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z)$ et $\underline{H}^j_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_j}}(O_Z)$, …) seront pratiques ultérieurement.

Nous allons, une fois décrit explicitement la filtration par les noyaux de N, donner un sens à l'énoncé suivant qui précise (*).

THÉORÈME 2.2.1. Pour tous $j \geq 0$, $l \geq 0$, il existe un isomorphisme naturel de $\mathcal{D}_Z$-modules

$$\mathcal{H}^{l+j+1}_{Y^{(l+j+1)}}(O_Z) \to Gr^j_I \, Gr^K_l \mathcal{M} . \tag{15}$$

REMARQUE 2.2.2. Après sommation sur les indices convenables, application du foncteur «complexe De Rham» et de l'isomorphisme de

Gysin, on déduit aisément de ce théorème la description du $gr_i(A^{\bullet}_{\mathbb{C}})$ de [23], (4.18).

La démonstration du théorème repose de manière essentielle, comme suggéré par le lemme 2.1.1, sur la détermination des noyaux des itérés N^j de N sur $\mathcal{M}$ pour laquelle nous aurons besoin de quelques notations.

On considèrera des multi-indices $\underline{i} := (i_1, \dots, i_d)$ avec $i_j \in \{0, 1\}$ pour tout j. La longueur de $\underline{i}$ est définie par $l(\underline{i}) := i_1 + \dots + i_d$. On pose $x^{\underline{i}} := = x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}$. Soient donc $I := (f, \delta_1, \dots, \delta_{d-1})$ et I_j est l'idéal de O_Z engendré par tous les $x^{\underline{i}}$ avec $l(\underline{i}) = d - j$.

Proposition 2.2.3. Le morphisme canonique

$$\frac{I + \mathcal{D} I_j}{I} \to \operatorname{Ker} N^j \tag{16}$$

est un isomorphisme pour tout $j \geqslant 0$.

Exemple. Si $d = 4$, on a un isomorphisme

$$\frac{\mathcal{D}.(x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3)}{\mathcal{D}.(x_1x_2x_3x_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3)} \simeq \operatorname{Ker} N^2. \tag{17}$$

Le fait que le morphisme canonique aboutisse dans $\operatorname{Ker} N^j$ est immédiat (même type de calcul que dans le lemme 1.1.1) et c'est la surjectivité qui est plus délicate. On va se ramener (par passage au gradué pour la filtration par l'ordre des opérateurs différentiels) à un énoncé de nature commutative pour lequel quelques notations supplémentaires sont nécessaires.

Considérons donc $gr(\mathcal{D}) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n]$, notons $\xi_i = = \sigma(\partial_i)$ le symbole dans $gr(\mathcal{D})$ de ∂_i et identifions le symbole d'un élément de O_Z avec lui même: $\sigma(x_i) = x_i$.

Proposition 2.2.4. Les éléments $f, \sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{n-1})$ forment une suite régulière dans le gradué $gr(\mathcal{D}_Z)$ de $\mathcal{D}_Z$.

Démonstration. cf. [7] où ce résultat est prouvé plus généralement pour n'importe quel diviseur libre localement quasi-homogène.

Corollaire 2.2.5. L'idéal gradué $\sigma(I)$ de I est l'idéal de $gr(\mathcal{D}_Z)$ engendré par $f, \sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{d-1})$.

DÉMONSTRATION. cf. prop. 4.1.2 de [6].

Posons $\tilde{I}_0 := \sigma(I)$ et, pour $j \in [1, d-1]$,

$$\tilde{I}_j := \tilde{I}_0 + \sum_{\underline{i} \mid l(\underline{i}) = d-j} gr(\mathcal{D}_Z).\, x^{\underline{i}} \tag{18}$$

PROPOSITION 2.2.6. Soit $j \in [0, d-1]$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $P \in \tilde{I}_j$

(ii) $P.(x_1 \xi_1)^j \in \tilde{I}_0$.

Admettons un instant cette proposition 2.2.6 et voyons comment elle implique la proposition 2.2.3. Soit $P \in \mathcal{D}_Z$ dont la classe dans $\mathcal{M}$ appartienne à $\operatorname{Ker} N^j$, c'est-à-dire, $P(x_1 \partial_1 + 1)^j \in I$. En considérant les symboles principaux, on trouve $\sigma(P)(x_1 \xi_1)^j \in \sigma(I)$ et par la proposition précédente, $\sigma(P) \in \sigma(I) + gr(\mathcal{D}_Z)\, I_j$. On peut donc trouver $F, G_1, \dots, G_{n-1}, H_\alpha \in gr(\mathcal{D}_Z)$ tels que $\sigma(P) = Ff + \sum_i G_i \sigma(\delta_i) + \sum_\alpha H_\alpha x^\alpha$ (ici on a utilisé ce qu'on sait sur $\sigma(I)$, i.e. $\sigma(I) = gr(\mathcal{D}_Z)(\sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{d-1}))$).

De plus, par homogénéité, les degrés de F et des H_α coïncident avec $\deg(\sigma(P))$ et les degrés des G_j sont tous égaux à $\deg(\sigma(P)) - 1$. Nous allons remonter l'expression précédente à $\mathcal{D}_Z$. Prenons des opérateurs différentiels Q, R_j, S_α de degrés convenables tels que ses symboles sont les F, G_j, H_α respectivement. Alors, la classe dans $\mathcal{M}$ de l'opérateur $P' = P - (Qf + \sum_i R_i \delta_i + \sum_\alpha S_\alpha x^\alpha)$ est toujours dans $\operatorname{Ker} N^j$ mais $\deg(P') < \deg(P)$, et on peut raisonner par récurrence sur $\deg(P)$, en commençant par le cas trivial $\deg(P) = -1$, i.e. $P = 0$.

Pour démontrer la proposition 2.2.6, on va utiliser un procédé de division et il est donc utile de fixer un «ordre» sur les monômes de $gr(D_Z)$ (cf. [9], chap. 2, 2.) : on décide que $x_1 < \dots < x_n < \xi_1 \dots < \xi_n$. L'outil essentiel est donné par la description suivante de bases de Groebner pour les idéaux $\tilde{I}_j$ que nous séparerons, pour la commodité d'énonciation en trois lemmes, suivant les valeurs de $l(\underline{i})$.

LEMME 2.2.7. (*cas* $l(\underline{i}) = 0$). La réunion des ensembles:

- $\{f, \sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{d-1})\}$
- $\{x_1^d \xi_1^{d-1}\}$
- $\{x_1^{d-1} \xi_1^{d-2} x_i \text{ tels que } i \in \{2, \dots, d\}\}$

- $\{x_1^{d-2}\xi_1^{d-3}x_{i_1}x_{i_2}$ tels que $i_2 > i_1$ et $i_j \in \{2, \dots, d\}\}$

.....

- $\{x_1^2\xi_1 x_{i_1}\dots x_{i_{d-2}}$ tels que $i_{d-2} > \dots > i_1$ et $i_j \in \{2, \dots, d\}\}$

forme un ensemble $G_{\tilde{I}_0}$ qui est une base de Groebner ([9], chap. 2, 5. def. 5) de l'idéal $\tilde{I}_0$.

LEMME 2.2.8. (*cas* $l(\underline{i}) = 1$) L'ensemble $(x_1, \dots, x_d)$ est une base de Groebner $G_{\tilde{I}_1}$ de l'idéal $\tilde{I}_1$.

LEMME 2.2.9. (*cas* $l(\underline{i}) \in [2, d-1]$) Soient $m \geqslant 2$ et S_m l'ensemble de tous les multi-indices $\underline{i}$ comme ci-dessus de longueur $l(\underline{i}) = m$. La réunion des ensembles:

- $\{x^{\underline{i}}, \sigma(\delta_1), \dots, \sigma(\delta_{d-1})$ tels que $\underline{i} \in S_m\}$
- $\{x_1^{l(\underline{i})}\xi_1^{l(\underline{i})-1}\}$
- $\{x_1^{l(\underline{i})-1}\xi_1^{l(\underline{i})-2}x_i$ tels que $i \in \{2, \dots, d\}\}$
- $\{x_1^{l(\underline{i})-2}\xi_1^{l(\underline{i})-3}x_{i_1}x_{i_2}$ tels que $i_2 > i_1$ et $i_j \in \{2, \dots, d\}\}$

....

- $\{x_1^2\xi_1 x_{i_1}\dots x_{i_{l(\underline{i})-2}}$ tels que $i_{l(\underline{i})-2} > \dots > i_1$ et $i_j \in \{2, \dots, d\}\}$

forme un ensemble $G_{\tilde{I}_m}$ qui est une base de Groebner ([9], chap. 2, 5. def. 5) de l'idéal $\tilde{I}_m$.

DÉMONSTRATION. Elle est, bien sûr, identique dans son principe pour les trois lemmes. Tout d'abord, il est clair que les éléments cités forment des bases des idéaux concernés. Pour voir qu'il s'agit bien de bases de Groebner, d'après le critère de Buchberger (cf. [9], chap. 2, 6., thm. 6), il suffit de vérifier, pour chacune d'entre elles, que le S-polynôme de deux éléments différents quelconque de la base choisie est divisible par un élément de cette base, ce qui résulte de vérifications faciles laissées au lecteur.

Venons-en à la démonstration de la proposition 2.2.6. On écrit la division ([9], chap. 2, 6. prop. 1) de $P \in \tilde{I}_j$ dans la base de Groebner $G_{\tilde{I}_j}$:

$$P = \sum_{Q_i \in G_{I_j}} P_i \,.\, Q_i + R \tag{19}$$

avec aucun des monômes non nuls dont R est somme divisible par les coefficients dominants ([9], chap. 2, 2. def. 7) des éléments de

$G_{\tilde{I}_j}$. Nous appelerons R la forme normale ([9], chap. 2, 6.) de P relativement à l'idéal $\tilde{I}_j$.

Si maintenant on multiplie l'égalité ci-dessus par $(x_1 \xi_1)^j$, on constate tout d'abord, vu la forme des bases de Groebner ci-dessus, que la somme $(\sum_{Q_i \in G_{I_j}} P_i . Q_i).(x_1 \xi_1)^j$ se réécrit exactement comme $(\sum_{Q_i' \in G_{I_0}} P_i' . Q_i')$.

D'autre part, du fait qu'aucun des monômes non nuls dont R est somme n'est divisible par les coefficients dominants ([9], chap. 2, 2. def. 7) des éléments de $G_{\tilde{I}_j}$, on en déduit qu'aucun des monômes non nuls dont $R.(x_1 \xi_1)^j$ est somme ne peut être divisible par les coefficients dominants ([9], chap. 2, 2. def. 7) des éléments de $G_{\tilde{I}_0}$, si bien que $R.(x_1 \xi_1)^j$ est le reste de la divsion de $P.(x_1 \xi_1)^j$ par les éléments de $G_{\tilde{I}_0}$.

En conclusion, la forme normale de $P.(x_1 \xi_1)^j$ relativement à $\tilde{I}_0$ est $R.(x_1 \xi_1)^j$. Comme la nullité des formes normales d'un élément relativement à un idéal est équivalente ([9], chap. 2, 6. coroll. 2) à l'appartenance à cet idéal, on a bien l'équivalence annoncée dans la proposition.

Mentionnons sur un exemple à quels éléments on aboutit avec toutes ces conditions sur les indices.

Exemple. Soit $d = 4$. On a:

- $G_{\tilde{I}_0} =$
$$= \{x_1 x_2 x_3 x_4, \sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2), \sigma(\delta_3), x_1^4 \xi_1^3, x_1^3 \xi_1^2 x_2, x_1^3 \xi_1^2 x_3, x_1^3 \xi_1^2 x_4, x_1^2 \xi_1 x_2 x_3, x_1^2 \xi_1 x_2 x_4, x_1^2 \xi_1 x_3 x_4\}$$
- $G_{\tilde{I}_3} = \{x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 x_4, x_1 x_3 x_4, x_2 x_3 x_4, \sigma(\delta_1), \sigma(\delta_2), \sigma(\delta_3), x_1^3 \xi_1^2, x_1^2 \xi_1 x_2, x_1^2 \xi_1 x_3, x_1^2 \xi_1 x_4\}$.

Nous pouvons enfin décrire comment est construit le morphisme naturel dont il est question dans le théorème 2.2.1: on prend $\overline{P}$ dans

$$\mathcal{H}^{l+j+1}_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_{l+j+1}}}(O_Z) :=$$
$$:= \mathcal{D}_Z / \mathcal{D}_Z .(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l+j+1}}, \partial_1, \ldots, \widehat{\partial_{i_1}}, \ldots, \widehat{\partial_{i_{l+j+1}}}, \ldots, \partial_d)$$

que l'on représente par $P \in \mathcal{D}_Z$ et on lui associe la classe de

$$P. x_1. \ldots . \widehat{x_{i_1}}. \ldots . \widehat{x_{i_{l+j+1}}}. \dot{s}. x_d .(\partial_1 x_1)^j \text{ dans } Gr_l^j Gr_l^K \mathcal{M} \tag{20}$$

Tout d'abord, on a bien $P. x_1. \ldots . \widehat{x_{i_1}}. \ldots . \widehat{x_{i_{l+j+1}}}. \widehat{x_{i_{l+j+2}}}. \ldots . x_d .(\partial_1 x_1)^j \in$ $\in I^j \mathcal{M} \cap K_l \mathcal{M}$ car:

- multiplier à droite par $(\partial_1 x_1)^j$ fait clairement arriver dans $\operatorname{Im} N^j = I^j \mathcal{M}$

- d'autre part, quitte à multiplier (on est dans $\mathcal{M}$!) par $(\partial_{m_1} x_{m_1}) \ldots (\partial_{m_j} x_{m_j})$ au lieu de $(\partial_1 x_1)^j$ avec $(m_1, \ldots, m_j)$ choisis parmi $(i_1, \ldots, i_{l+j+1})$, on peut faire apparaitre $d-(l+j+1)+(j) = d-l-1$ variables différentes x_m dans le facteur $x_1 . \ldots . \widehat{x_{i_1}} . \ldots . \widehat{x_{i_{l+j+1}}} . \ldots . x_d . (\partial_1 x_1)^j$ du produit $P . x_1 . \ldots . \widehat{x_{i_1}} . \ldots . \widehat{x_{i_{l+j+1}}} . \ldots . x_d . (\partial_1 x_1)^j$, on est donc en présence d'un élément du noyau de la puissance $d-(d-l-1) = l+1$ de N, ie. dans $K_l \mathcal{M}$.

Le même type de considération montre également que si l'on part d'un élément dans $\mathcal{D}_Z . (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l+j+1}}, \partial_1, \ldots, \widehat{\partial_{i_1}}, \ldots, \widehat{\partial_{i_{l+j+1}}}, \ldots, \partial_d)$, on trouve bien 0 dans $Gr_{l+j} \mathcal{M}$.

L'application

$$\mathcal{H}^{l+j+1}_{Y^{(l+j+1)}}(O_Z) \to Gr^j_l \, Gr^K_l \mathcal{M} \tag{21}$$

est donc bien définie.

La démonstration du théorème 2.2.1 ne repose plus maintenant que sur l'examen du nombre de variables x_i et/ou ∂_m dont on a besoin dans certaines écritures. En effet, par définition de $Gr^j_l \, Gr^K_l \mathcal{M}$ et grâce aux descriptions explicites ci-dessus, on remarque que tout élément de ce dernier admet un représentant dans $\mathcal{D}_Z$ ayant les deux propriétés suivantes: dans chacun des monomes dont ce représentant est somme, il y a exactement $d-l-1$ variables x_a différentes (vu la description des $\operatorname{Ker} N^j$) et aussi un produit de j expressions du type $(\partial_b x_b)$ (vu la description de N).

La surjectivité de l'application ci-dessus en découle aussitôt.

Pour l'injectivité, on part de

$$(\overline{P}_{i_1, \ldots, i_{l+j+1}})_{(i_1, \ldots, i_{l+j+1})} \in \mathcal{H}^{l+j+1}_{Y^{(l+j+1)}}(O_Z) := \bigoplus_{i_1 < \ldots < i_{l+j+1}} \mathcal{H}^{l+j+1}_{Y_{i_1} \cap \ldots \cap Y_{i_{l+j+1}}}(O_Z) \tag{22}$$

et l'on représente chaque $\overline{P}_{i_1, \ldots, i_{l+j+1}}$ par un $P_{i_1, \ldots, i_{l+j+1}}$ dans $\mathcal{D}_Z$ tel que aucun des monômes non nul dont il est somme n'appartienne à l'idéal

$$\mathcal{D}_Z . (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{l+j+1}}, \partial_1, \ldots, \widehat{\partial_{i_1}}, \ldots, \widehat{\partial_{i_{l+j+1}}}, \ldots, \partial_d).$$

Si l'on traduit que l'image de $(\overline{P}_{i_1, \ldots, i_{l+j+1}})_{(i_1, \ldots, i_{l+j+1})}$ dans $Gr^j_l \, Gr^K_l \mathcal{M}$

est nulle, c'est dire appartient à

$$\mathrm{Im}\left(N^{j+1}\colon \frac{\mathrm{Ker}\, N^{l+j+1}}{\mathrm{Ker}\, N^{l+j}} \to \frac{\mathrm{Ker}\, N^{l}}{\mathrm{Ker}\, N^{l-1}}\right)$$

au niveau des représentants, on obtient qu'une certaine somme

$$\sum_{i_1<\ldots<i_{l+j+1}} \overline{P}_{i_1,\ldots,i_{l+j+1}}.x_1.\ldots.\widehat{x_{i_1}}.\ldots.\widehat{x_{i_{l+j+1}}}.\ldots.x_d.((\partial_{m_1}x_{m_1})\ldots(\partial_{m_j}x_{m_j})) \tag{23}$$

avec un choix libre des $(m_1, \ldots, m_j)$ devrait, (compte tenu de la description de $\mathrm{Ker}\, N^l$), modulo $\mathcal{D}_Z.(f, \delta_1, \ldots, \delta_{d-1})$, être somme de monômes non nuls ou apparait $j+1$ fois des $\partial_b x_b$ et $d-l$ fois des x_a, ce qui est contradictoire avec la forme des monômes non nuls dont les P_i que nous avons choisis sont sommes.

Remarque 2.2.10. Le théorème 2.2.1 fournit un moyen d'obtenir la description attendue (et conforme à celle des $R\psi_f\mathbb{C}$) de la cohomologie de De Rham de $\mathcal{M}$. La cohomologie du complexe des solutions est décrite, quand à elle, dans une situation plus générale, dans [16], 5.3.

3. Variantes p-adiques.

3.1. *Cohomologie locale p-adique.*

On se place dans la situation géométrique (I) et l'on notera $\widehat{Z}$ (resp. $Z^\dagger$) le schéma formel (resp. faiblement formel) associé par complétion (resp. complétion faible) le long de la fibre spéciale. On dispose, comme déjà utilisée dans [11], 2.2 de l'anneau $\mathcal{D}^\dagger_{Z^\dagger\mathbb{Q}}$ de [18] et de son sous-anneau des opérateurs différentiels d'ordre fini $\mathcal{D}_{Z^\dagger\mathbb{Q}}$. Les résultats du chapitre précédent devraient (en référant aux théorèmes de division de [20], 3 puis en utilisant certaines propriétés de l'extension des scalaires $\mathcal{D}_{Z^\dagger\mathbb{Q}} \to \to \mathcal{D}^\dagger_{Z^\dagger\mathbb{Q}}$) s'étendre *mutatis mutandis* lorsque l'on remplace $\mathcal{D}_Z$ par $\mathcal{D}^\dagger_{Z^\dagger\mathbb{Q}}$. Des références accessibles faisant pour l'instant défaut, nous utiliserons l'anneau $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$ introduit dans [1] (cf. également [5]) et considérerons les

$$\mathcal{M}^\dagger_{\widehat{Z}\mathbb{Q}} := \frac{\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}}{\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}.(f, \delta_1, \ldots, \delta_{d-1})} \tag{24}$$

munis du même opérateur N que ci-dessus.

Remarque 3.1.1. Idéalement, pour avoir des références complètes mais rester néanmmoins dans un cadre analogue (grâce à [12], thm. 4.5.2) à [11], 2.2, (ie. avec $\mathcal{D}^{\dagger}_{Z^{\dagger}\mathbb{Q}}$) il faudrait remplacer le $\mathcal{D}_Z$ des chapitres précédents par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\overline{Z}}\,\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\widehat{Z^{\infty}})$ ou par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\overline{Z}}\,\mathbb{Q}}$ (avec $\overline{Z} := \mathbb{P}^n_{O_K}$, $Z^{\infty} := \overline{Z} - Z$) puis utiliser la flèche d'extension plate ([4], 4.3.11) $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\overline{Z}}\,\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\overline{Z}}\,\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\widehat{Z^{\infty}})$) afin d'avoir des dévissages de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\overline{Z}}\,\mathbb{Q}}({}^{\dagger}\widehat{Z^{\infty}})$-modules ou de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\overline{Z}}\,\mathbb{Q}}$-modules. Ce que l'on fait ci-dessus revient à étudier ce qui se passe sur Z (au lieu de $\overline{Z}$), ce qui ici suffit pour la compréhension du dévissage.

Avant d'énoncer un résultat général, montrons comment des arguments simples de division, comme dans [11], permettent de traiter le cas $d=2$. Comme $N^2=0$, la filtration par le poids se réduit à $0 \subset \operatorname{Im} N \subset \subset \operatorname{Ker} N \subset \mathcal{M}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$ et l'on a la

Proposition 3.1.2. On a un isomorphisme canonique de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \dfrac{\operatorname{Ker} N}{\operatorname{Im} N} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{M}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}}{\operatorname{Im} N} & \longrightarrow & \dfrac{\mathcal{M}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}}{\operatorname{Ker} N} \to 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to \mathcal{H}^{\dagger 1}_{Y_1}(O_{\widehat{Z}_K}) \oplus \mathcal{H}^{\dagger 1}_{Y_2}(O_{\widehat{Z}_K}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\dagger 1}_{Y}(O_{\widehat{Z}_K}) & \longrightarrow & \mathcal{H}^{\dagger 2}_{Y_1 \cap Y_2}(O_{\widehat{Z}_K}) \to 0
\end{array}$$

(les groupes de cohomologie figurant dans la suite exacte inférieure sont ceux de [1]).

Démonstration. La suite exacte du bas est simplement la suite exacte (type Mayer-Vietoris) longue à support associée au recouvrement de Y fourni par ses composantes irréductibles $Y_1 = V(x_1)$ et $Y_2 = V(x_2)$. On sait, d'autre part, que l'on a des isomorphismes (cf. [1], 4.2.3, 4.3.3, 4.3.4)

(25) $$\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}/\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}.(x_1, \partial_2) \to \mathcal{H}^{\dagger 1}_{Y_1}(O_{\widehat{Z}_K});\ P \to P.\frac{1}{x_1} \text{ (idem pour } Y_2)$$

(26) $$\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}/\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}.(x_1, x_2) \to \mathcal{H}^{\dagger 2}_{Y_1 \cap Y_2}(O_{\widehat{Z}_K});\ P \to P.\frac{1}{x_1 x_2}$$

(27) $$\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}/\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}.(f, \partial_1 x_1, \partial_2 x_2) \to \mathcal{H}^{\dagger 1}_{Y}(O_{\widehat{Z}_K});\ P \to P.\frac{1}{x_1 x_2}$$

De ce dernier isomorphisme, on déduit immédiatement, vu la description de N, que la flèche verticale du milieu est un isomorphisme (c'est la variante p-adique trivialement vraie de la proposition 2.2.1).

On remarque maintenant que l'on a un isomorphisme

$$\operatorname{Ker} N \simeq \frac{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (x_2, x_2)}{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (f, \delta_1)} . \tag{28}$$

En effet, $\dfrac{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (x_2, x_2)}{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (f, \delta_1)}$ est un sous-module de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}$ clairement contenu dans $\operatorname{Ker} N$. D'autre part, un élément de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}$ admettant un représentant de la forme $P = \sum \alpha_{i,j} \partial_1^i \partial_2^j \neq 0$ avec les $\alpha_{i,j} \in K$ ne peut appartenir à $\operatorname{Ker} N$, car alors on aurait une relation

$$P \,.\, \partial_1 x_1 = R \,.\, x_1 x_2 + S \,.\, \delta_1 , \tag{29}$$

qui, réduite modulo l'idéal $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \,.\, x_1$ implique facilement que l'on doit avoir $S = S' \,.\, x_1$; d'où par conséquent une relation de la forme $P \,.\, \partial_1 = R \,.\, x_2 + S' \,.\, (x_1 \partial_1 - \partial_2 x_2)$, laquelle réduite modulo l'idéal $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \,.\, \partial_1$ implique que l'on doit avoir une relation de la forme $R - S' \,.\, \partial_2 = S'' \,.\, \partial_1$. Une fois reporté dans l'équation précédente, on obtient: $P \,.\, \partial_1 = S'' \,.\, x_2 \partial_1 + S' \,.\, x_1 \partial_1$; soit finalement $P \in \mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \,.\, (x_1, x_2)$, ce que l'on vérifie immédiatement être contradictoire avec l'écriture de $P \neq 0$.

Par suite, on a des isomorphismes

$$\frac{\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}}{\operatorname{Ker} N} \simeq \frac{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (f, \delta_1)}{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (f, \delta_1, x_1, x_2)} \simeq \frac{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}}{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}} \cdot (x_1, x_2)} \tag{30}$$

La compatibilité des morphismes intervenant ci-dessus est facile et laissée au lecteur et la proposition en découle immédiatement.

Pour traiter le cas d quelconque, rappelons que l'on dispose de divers anneaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}^{(m)}_{Z_i}$ (avec $m \geqslant 0$ et $i \geqslant 1$ variables) reliés par certains morphismes de transitions pour la définition desquels on renvoie à [5] et [4]. A partir de ceux-ci, on peut former des variantes évidentes $\mathcal{M}^{(m)}_{Z_i}$ du module $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}$ ci-dessus, lesquelles sont toutes munies d'un opérateur nilpotent N comme ci-dessus. On dispose également en remplaçant $\mathcal{D}_Z$ par $\mathcal{D}^{(m)}_{Z_i}$ et par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}$ de variantes $\mathcal{H}^{i,(m)}_{Y^{(j)}}(O_{Z_i})$, $\mathcal{H}^{i}_{Y^{(j)}}(O_Z)$ des $\mathcal{H}^{\dagger i}_{Y^{(j)}}(O_{\hat{Z}_K})$. Le corollaire 4.3.4 de [1] implique qu'il n'y a pas de confusion possible dans le choix des notations: le dernier $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbf{Q}}$-module qu'on vient de considérer est un bien un groupe de cohomologie à support au sens de *loc. cit.*.

Théorème 3.1.3. Pour tous $j \leqslant 0$, $l \geqslant -1$ tels que $l-j \geqslant 0$, il existe un isomorphisme naturel de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$-modules

$$\mathcal{H}^{\dagger l-j+1}_{Y^{(l-j+1)}}(O_Z) \to Gr^j_l\, Gr^K_l\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}. \tag{31}$$

Démonstration (esquisse). On commence comme auparavant par prouver l'analogue de la proposition 2.2.4 sur les $\operatorname{Ker} N^i$ et l'on se ramène pour ce faire, en utilisant le fait que l'extension des scalaires $\mathcal{D}^{(0)}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}} \to \mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$ est plate (cf. corollaire 3.5.4 de [4]), à la proposition analogue avec $\mathcal{D}^{(0)}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$ à la place de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$ puis à l'assertion analogue avant de tensoriser par $\mathbb{Q}$, ie. avec les pro-objets correspondant à substituer dans les définitions $\mathcal{D}^{(0)}_{Z.}$ à la place de $\mathcal{D}^{(0)}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$. Comme ces pro-objets sont sans p-torsion, on se ramène à la situation modulo p (ie. avec $\mathcal{D}^{(0)}_{Z_1}$ dans la définition des objets considérés) pour laquelle les arguments du chapitre précédent s'appliquent. Une fois obtenue la structure des $\operatorname{Ker} N^i$, le théorème en découle.

On dispose également, par les mêmes arguments, de l'analogue de la suite exacte (5) et de la description (6). On a donc ici un isomorphisme canonique

$$\operatorname{Coker}(N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}) \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}} / \mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}.(f,\, \partial_1 x_1, \dots,\, \partial_d x_d)\,. \tag{32}$$

dans lequel on reconnait (cf. [1], corollaire 4.3.3) au second membre la présentation standard de $\mathcal{H}^{\dagger 1}_{Y}(O_{\widehat{Z}_K})$. Appliquant alors successivement le foncteur de De Rham $DR(-) := RHom_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}}(O_{\widehat{Z}\mathbb{Q}},\, -)$, et en utilisant l'isomorphisme de Gysin ([3], 3.8) sur les groupes de cohomologie associés, on voit apparaitre les groupes $H^*_{\mathrm{rig}}(Y/K)$, ce qui indique la nature du lien (dualité) entre le point de vue présenté ici et les suites apparaissant dans [8], introd..

On peut d'ailleurs, plus généralement et par le même type de considérations déduire du théorème des dévissages intimement liés à ceux de [19] ainsi que le calcul de la cohomologie de De Rham de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$.

3.2. *Monodromie et frobenius.*

Supposons maintenant que $O_K = W(k)$ et considérons Z comme schéma au-dessus de $\operatorname{Spec}(O_K[t])$ avec $t \to x_1 \dots x_d$ et soit F le relèvement de frobenius standard ie. ($F(x_i) = x_i^p$, $F(t) = t^p$). Le $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{M}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$ devrait être un exemple de $F - \mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{Z}\mathbb{Q}}$-module holonome au sens de [5] 5.3.5. C'est, bien sur, clair pour son gradué (pour la filtration associée à N)

$gr\, \mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$ puisque l'on dispose d'une telle structure sur les $\mathcal{H}^{\dagger l-j+1}_{Y^{(l-j+1)}}(O_{\hat{Z}_K})$ d'après [5] 5.1. En ce qui concerne $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$ lui-même, la situation est un peu plus compliquée à expliciter et il semble pour l'instant plus simple de revenir à la technique du «graphe» (cf. [16]) et de considérer une autre description de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$, à savoir (variante p-adique de [16], prop. 5-2.1 ou 5.2-2, a))

$$\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}} = \frac{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}\,\delta(t-f)}{\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}\,t\delta(t-f)} \tag{33}$$

avec $\delta(t-f)$ la classe de $\dfrac{1}{t-f}$ dans $\mathcal{H}^{\dagger 1}_{\Gamma_f}(O_{(\widehat{Z\times \mathbb{A}^1})_K}) \simeq \mathcal{D}^{\dagger}_{(\widehat{Z\times \mathbb{A}^1})\mathbb{Q}}\,\delta(t-f)$ (on a $t.\,\delta(t-f) = f.\,\delta(t-f)$). Dans l'écriture ci-dessus, on considère $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}\,\delta(t-f)$ comme un sous-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{H}^{\dagger 1}_{\Gamma_f}(O_{(\widehat{Z\times \mathbb{A}^1})_K})$. L'identification entre les deux descriptions de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$ est induite par $P \in \mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}} \to$ $\to P.\,\delta(t-f) \in \mathcal{H}^{\dagger 1}_{\Gamma_f}(O_{(\widehat{Z\times \mathbb{A}^1})_K})$.

On vérifie alors que la F-structure (essentiellement triviale, cf. [2]) dont est muni $\mathcal{H}^{\dagger 1}_{\Gamma_f}(O_{(\widehat{Z\times \mathbb{A}^1})_K})$ en induit une sur le sous-quotient $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$:

$$\Phi : \mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}} \to F^{*}\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}} \tag{34}$$

qui, par composition avec le morphisme de fonctorialité associé à F, donne

$$\varphi : \mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}} \to \mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}. \tag{35}$$

Maintenant, via l'identification entre les deux descriptions de $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$, on voit que la multiplication à droite par (par exemple) $\partial_1 x_1$ se transforme en l'action de $\partial_1 x_1$ sur $\delta(t-f)$. Mais, on a,

$$\partial_1 x_1\,\delta(t-f) = -t\partial_t\,\delta(t-f) \tag{36}$$

si bien que, dans la présentation de ci-dessus ($t\partial_t$ commutant aux éléments de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$), la monodromie N est simplement «induite» par l'action standard de $-t\partial_t$ sur $\mathcal{H}^{\dagger 1}_{\Gamma_f}(O_{(\widehat{Z\times \mathbb{A}^1})_K})$. Mentionnons que, dans cette présentation, le fait que $N^d = 0$ est conséquence de l'équation fonctionnelle ([2])

$$(t\partial_t)^d.\,\delta(t-f)) = (-1)^d\,\partial_1 \dots \partial_d(t\delta(t-f)) \quad (= 0 \text{ dans } \mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}). \tag{37}$$

Finalement, on en déduit la

Proposition 3.2.1. On a la relation $N\varphi = p\varphi N$ sur $\mathcal{M}^{\dagger}_{\hat{Z}\mathbb{Q}}$.

DÉMONSTRATION (ESQUISSE). Cela découle de ce que $F^*(t\partial_t) = p\,.\, t\partial_t$ $\left(\text{c'est la relation «duale» de la relation } F^*\left(\frac{dt}{t}\right) = p\,.\,\frac{dt}{t}\right)$.

(2) Cette équation provient de celle existant sur $\mathbb{C}$ où elle n'est autre que l'équation fonctionnelle de Bernstein-Sato.

REFERENCES

[1] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, Lecture Notes in Maths, **1454** (1990), pp. 80-124.

[2] P. BERTHELOT, *Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes*, C. R. Acad. Sci., Paris, Série I, **323**, n. 1 (1996), pp. 35-40.

[3] P. BERTHELOT, *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Inv. Math., **128** (1997), pp. 329-377.

[4] P. BERTHELOT, *$\mathcal{D}$-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. **29** (1996), pp. 185-272.

[5] P. BERTHELOT, *Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules*, Astérisque, **279** (2002), pp. 1-80.

[6] F. J. CALDERON-MORENO, *Logarithmic differential operators and logarithmic de Rham complexes relative to a free divisor*, Ann. Sci. ENS, **32**, no. 5 (1999), pp. 701-714.

[7] F. J. CALDERON-MORENO - L. NARVÁEZ-MACARRO, *The module Df^s for locally quasi-homogeneous free divisors*, Compositio Math., **134**, n.1, (2002), pp. 59-74.

[8] B. CHIARELLOTTO, *Rigid cohomology and invariant cycles for a semi-stable log scheme*, Duke Math. J., **97**, n. 1 (1999), pp. 155-169.

[9] D. COX - J. LITTLE - D. O'SHEA, *Ideals, varieties and algorithms*, UTM Springer. Second edition (1996).

[10] P. DELIGNE, *La conjecture de Weil. II*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci., **52** (1980), pp. 137-252.

[11] M. GROS - L. NARVÁEZ-MACARRO, *Cohomologie évanescente p-adique: calculs locaux*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **104** (2000), pp. 71-90.

[12] C. HUYGHE, *Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout-Narvaez-Macarro*, J. Algebraic Geometry, **12** (2003), pp. 147-199.

[13] O. HYODO, *On the de Rham-Witt complex attached to a semi-stable family*, Compos. Math., **78**, n. 3 (1991), pp. 241-260.

[14] O. HYODO - K. KATO, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Périodes p-adiques, Astérisque, **223** (1994), pp. 221-268.

[15] K. KATO, *Crystals with log poles and limit Hodge structures in the positive and mixed characteristics*, Notes manuscrites (1988).

[16] P. MAISONOBE - Z. MEBKHOUT, *Le théorème de comparaison pour les cycles évanescents*, Proceedings du CIMPE, A paraitre.

[17] B. MALGRANGE, *Polynômes de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente*, Astérisque, **101-102** (1983), pp. 243-267.

[18] Z. MEBKHOUT - L. NARVÁEZ-MACARRO, *Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, Lecture Notes in Maths, **1454** (1990), pp. 267-308.

[19] A. MOKRANE, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J., **72** (1993), pp. 301-337.

[20] L. NARVÁEZ-MACARRO, *Division theorem over the Dwork-Monsky-Washnitzer completion of polynomial rings and Weyl algebras*, in Rings, Hopf algebras and Brauer groups. Lect. Notes in Pure and Appl. Math. (Marcel Dekker), **197** (1998), pp. 175-191.

[21] C. SABBAH, *D-modules et cycles évanescents (d'après Malgrange et Kashiwara)*, Travaux en cours n. 24 (conférence de la Rábida 1984) (1987), pp. 53-98.

[22] M. SAITO, *Modules de Hodge polarisables*. Publ. of the RIMS. Kyoto Univ., **24** (1988), pp. 849-995.

[23] J. STEENBRINK, *Limits of Hodge structures*, Inv. Math., **31** (1976), pp. 229-257.

[24] J. STEENBRINK - S. ZUCKER, *Variation of mixed Hodge structure. I*, Inv. Math., **80** (1985), pp. 489-542.

[25] S. ZUCKER, *Variation of mixed Hodge structure. II* , Inv. Math., **80** (1985), pp. 543-565.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 settembre 2003.