REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 111 (2004)

Equazioni integrali per un modello di simbiosi tra due specie con diffusione e struttura di età: caso di pino cembro e nocciolaia.

ALBERTO FASANO (*) - HISAO FUJITA YASHIMA (*)

ABSTRACT - We consider an ecological system of symbiotic type formed by a pine *Pinus Cembra* and a bird *Nucifraga Caryocatactes*, and taking into account the diffusion on territories and the age structure of the pine, we model this ecological system by an nonlinear integro-differential equation system. We prove the existence of non trivial stationary solutions of this equation system under some suitable conditions.

SUNTO - Consideriamo un sistema ecologico di tipo simbiotico formato da un pino *Pino cembro* e da un uccello *Nocciolaia*, e, tenendo conto della diffusione nei territori e della struttura di età del pino, modelliamo questo sistema ecologico con un sistema di equazioni integro-differenziali. Dimostriamo l'esistenza di soluzioni stazionarie non triviali di questo sistema di equazioni sotto opportune condizioni.

1. Introduzione.

Dai tempi di Volterra [9] fino ai nostri giorni (si veda per esempio [6]), molti ricercatori hanno proposto ed esaminato modelli matematici dell'evoluzione di popolazioni che tengano conto della struttura di età di una popolazione. Nel lavoro [5] abbiamo preso in esame un sistema di equazioni integro-differenziali che modella l'evoluzione di popolazioni in

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Torino, via Carlo Alberto, 10, 10123 Torino, Italia.

un territorio di due specie interdipendenti, pino cembro (*Pinus Cembra*) e nocciolaie (*Nucifraga Caryocatactes*), con la struttura di età della popolazione di pino cembro e abbiamo studiato in particolare la stabilità di soluzioni stazionarie. Nel presente lavoro consideriamo un sistema di equazioni che modella l'evoluzione di popolazioni di queste due specie con diffusione sul territorio e ne dimostriamo l'esistenza di soluzioni stazionarie non nulle sotto opportune condizioni.

Il pino cembro è una conifera molto longeva e resistente al freddo; cresce in alte montagne e nelle regioni di bassa temperatura e il suo accrescimento è assai lento. In particolare nei primi circa 40 anni della sua vita, la pianta di pino cembro non produce i semi. La nocciolaia è un passeriforme appartenente alla famiglia dei corvidi, diffuso dal Giappone fino alle Alpi, passando la Russia e l'Europa del Centro-Nord. La nocciolaia, oltre a nutrirsi dei semi di pino cembro, li immagazzina in terra e da quelli non utilizzati possono nascere nuove piante di pino cembro. Il fatto che la nocciolaia trasporti e collochi i semi al di fuori dell'immediata vicinanza dell'albero contribuisce ad aumentare l'areale del pino cembro. L'opera del corvide è essenziale per la disseminazione per il pino cembro, in quanto il seme di pino cembro è relativamente pesante e privo di ali e quindi non può essere trasportato dal vento. Tra gli esempi meglio osservati e documentati di questa associazione simbiotica tra il pino cembro e la nocciolaia citiamo quello del *bosco dell'Alèvé* situato sulla falda meridionale del Mon Viso in provincia di Cuneo. Per le descrizioni del pino cembro, della nocciolaia e del bosco dell'Alèvé, si vedano [1], [2], [3], [4] e la letteratura ivi citata.

In [5], per modellare la coevoluzione di queste due specie in un territorio, indicando con $\widetilde{P}(s,t)$ la popolazione valutata all'istante t di pino cembro nato all'istante s ($s \leq t$) e con $\widetilde{N}(t)$ la popolazione totale di nocciolaie all'istante t, abbiamo considerato il sistema di equazioni

$$\frac{d\widetilde{N}(t)}{dt} = \left[\alpha \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)\, \widetilde{P}(s,t)\, ds - (\beta + \gamma \widetilde{N}(t))\right] \widetilde{N}(t), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \widetilde{P}(s,t)}{\partial t} = -\widetilde{\mu}(t-s)\left(1 + \kappa \int_{-\infty}^{t} \widetilde{P}(s',t)\, ds'\right) \widetilde{P}(s,t), \tag{1.2}$$

$$\widetilde{P}(t,t) = \nu \widetilde{N}(t) \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)\, \widetilde{P}(s,t)\, ds\,, \tag{1.3}$$

ove α, β, γ, κ, ν sono coefficienti costanti positive, mentre $\tilde{\mu}(\tau)$ e $\varphi(\tau)$ rappresentano la mortalità naturale e la fecondità del pino cembro all'età τ e sono funzioni non negative tali che $\inf_{\tau \geqslant 0} \tilde{\mu}(\tau) > 0$ e che $\varphi(\tau) = 0$ per $\tau \in [0, \tau_0]$ $(\tau_0 > 0)$.

In [5], oltre alla soluzione del problema di evoluzione (1.1)-(1.3), sono state esaminate le soluzioni stazionarie, cioè le coppie $(\tilde{q}(\cdot), \widetilde{N})$ che, sostituite in $\widetilde{P}(s, t) = \tilde{q}(t-s)$, $\widetilde{N}(t) = \widetilde{N}$, verificano le equazioni (1.1)-(1.3) indipendentemente da t e che quindi verificano le equazioni

$$\widetilde{N}\left[\alpha \int_0^\infty \varphi(\tau)\, \tilde{q}(\tau)\, d\tau - (\beta + \gamma \widetilde{N})\right] = 0\,, \tag{1.4}$$

$$\frac{d\tilde{q}(\tau)}{d\tau} = -\tilde{\mu}(\tau)\left(1 + \kappa \int_0^\infty \tilde{q}(\tau')\, d\tau'\right) \tilde{q}(\tau)\,, \tag{1.5}$$

$$\tilde{q}(0) = \nu \widetilde{N} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, \tilde{q}(\tau)\, d\tau\,. \tag{1.6}$$

Più precisamente, posto

$$\tilde{\xi}(p) = \int_0^\infty e^{-(1+\kappa p)\int_0^\tau \tilde{\mu}(\tau')\, d\tau'}\, d\tau\,, \tag{1.7}$$

$$\tilde{\eta}(p) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-(1+\kappa p)\int_0^\tau \tilde{\mu}(\tau')\, d\tau'}\, d\tau\,, \tag{1.8}$$

$$S = \sup_{p \in [0, +\infty[} \tilde{\eta}(p)\left(\alpha p \frac{\tilde{\eta}(p)}{\tilde{\xi}(p)} - \beta\right), \tag{1.9}$$

valgono le seguenti relazioni:

i) se $S < \gamma/\nu$, allora il sistema di equazioni (1.4)-(1.6) ammette una e una sola soluzione, che è la soluzione nulla;

ii) se $S = \gamma/\nu$, allora il sistema di equazioni (1.4)-(1.6) ammette almeno due soluzioni, più precisamente, la soluzione nulla ed almeno una soluzione non nulla;

iii) se $S > \gamma/\nu$, allora il sistema di equazioni (1.4)-(1.6) ammette almeno tre soluzioni, più precisamente, la soluzione nulla ed almeno due soluzioni non nulle.

Come viene mostrato in [5], la soluzione stazionaria nulla risulta sempre stabile. Nel caso *iii)*, se le soluzioni sono tre, la soluzione stazionaria non nulla con popolazioni di grandezza intermedia risulta instabile, mentre sotto opportune condizioni la soluzione stazionaria con popolazione più grande risulta stabile (per i dettagli si veda [5]).

Nel presente lavoro consideriamo il sistema di equazioni che modella la relazione tra la popolazione di nocciolaie $N(t)$ e la densità di popolazione di pino cembro $P(s, t, x)$ dipendente sia dall'età $\tau = t - s$ sia dal punto x nel territorio ed esaminiamo le soluzioni stazionarie $q(\tau, x) = P(t - \tau, t, x)$, $N = N(t)$ di tale sistema di equazioni. L'analisi di tale sistema di equazioni integrali non lineari ci conduce a individuare tre sistuazioni: una in cui esiste solo la soluzione stazionaria nulla, una in cui esistono almeno due soluzioni stazionarie e una in cui esistono almeno tre soluzioni stazionarie; negli ultimi due casi una delle soluzioni stazionarie è quella nulla (Teorema 6.1). Si può anche considerare che questi tre casi, nei loro rapporti con le condizioni naturali dell'ambiente, corrispondono alle relazioni *i*), *ii*) e *iii*) per il sistema di equazioni (1.4)-(1.6). Ma l'ottenimento di soluzioni stazionarie non nulle $(q(\tau, x), N)$ dipendenti anche dal punto x richiede un'elaborazione matematica assai più complessa che impieghi vari metodi di Analisi funzionale, per cui si possono trovare suggerimenti utili, per esempio, in [8].

2. Formulazione del modello.

Indichiamo con $P(s, t, x)$ la denistà di popolazione valutata all'istante t di pino cembro nato all'istante s ($s \leq t$) e vegeto al punto x di un territorio, mentre con $N(t)$ la popolazione totale di nocciolaie nel territorio all'istante t. Benché il territorio di un sistema ecologico non possa essere esteso infinitamente, per lo studio matematico del sistema di equazioni ci è comodo considerare l'intero piano $\boldsymbol{R}^2$ come territorio del sistema ecologico in questione. Infatti, se fuori di una zona limitata la mortalità è sufficientemente alta, in pratica si ottiene lo stesso effetto di un territorio con estensione finita senza dover introdurre una frontiera artificiale.

Indichiamo con $\mu(\tau, x)$ la mortalità naturale senza effetto logistico del pino cembro di età τ al punto x, mentre esprimiamo l'effetto logistico con

$$-\mu(t-s, x)\, \kappa \int_{-\infty}^{t} P(s', t, x)\, ds'\, P(s, t, x)$$

(κ è una costante positiva). Si noti che $\int_{-\infty}^{t} P(s', t, x)\, ds'$ rappresenta la densità di popolazione al punto x di pino cembro di tutte le età. Queste osservazioni ci conducono a supporre che la densità di popolazione di pino cembro $P(s, t, x)$ verifichi per $t > s$ l'equazione

$$\frac{\partial P(s, t, x)}{\partial t} = -\mu(t-s, x)\left(1 + \kappa \int_{-\infty}^{t} P(s', t, x)\, ds'\right) P(s, t, x). \tag{2.1}$$

Indichiamo d'altra parte con $\varphi(\tau)$ la fecondità del pino cembro di età τ. Naturalmente si può anche supporre che la funzione di fecondità dipenda anche dal punto x. Ma è ragionevole pensare che la dipendenza della mortalità dal punto x sia determinante per la crescita (o diminuzione) della popolazione di pino cembro. Perciò per non appesantire l'esposizione, supponiamo che la funzione di fecondità $\varphi(\tau)$ dipenda solo dall'età τ. I semi prodotti dalle piante fertili di pino cembro saranno poi disseminati da nocciolaie. Come ragionevole approssimazione di questa disseminazione consideriamo la distribuzione gaussiana

$$g(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \boldsymbol{R}^2 \qquad (\sigma > 0).$$

Perciò, moltiplicandola per il numero di disseminatori $N(t)$ e un coefficiente $\nu > 0$, si suppone che la densità di nuove piante nate da semi disseminati sia data da

$$P(t, t, x) = \nu N(t) \int_{\boldsymbol{R}^2} \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)\, P(s, t, y)\, g(x-y)\, ds\, dy\,. \tag{2.2}$$

Il rapporto di crescita della popolazione di nocciolaie è dovuto all'abbondanza di cibi $\int_{\boldsymbol{R}^2} \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)\, P(s, t, x)\, ds\, dx$ come fattore favorevole e alla mortalità $\beta + \gamma N(t)$ $(\beta, \gamma > 0)$, che è ovviamente un fattore sfavorevole. Perciò si può supporre che la funzione $N(t)$ debba soddisfare all'equazione

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left[\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-s)\, P(s, t, x)\, ds\, dx - (\beta + \gamma N(t))\right] N(t), \tag{2.3}$$

ove α è un coefficiente costante positivo.

Precisiamo le condizioni per le funzioni di fecondità $\varphi(\tau)$ e di mortalità $\mu(\tau, x)$.

Ricordando che il pino cembro non fornisce semi fertili che dopo i 40 anni, supponiamo che la funzione di fecondità $\varphi(\tau)$ verifichi le relazioni

$$\begin{aligned}(2.4)\qquad &\varphi \in C([0,\ \infty[), \qquad \varphi(\tau) \geqslant 0 \ \ \forall \tau \in [0,\ \infty[, \qquad \int_0^\infty \varphi(\tau)\, d\tau < \infty ,\\ &\exists\, \tau_0 > 0 \ \text{ tale che } \quad \varphi(\tau) = 0 \ \ \forall \tau \in [0,\ \tau_0].\end{aligned}$$

Per la funzione $\mu(\tau, x)$, che rappresenta il tasso di mortalità naturale del pino cembro di età τ al punto $x \in \boldsymbol{R}^2$, supponiamo innanzitutto che

$$(2.5)\qquad \mu \in C([0,\ \infty[\times \boldsymbol{R}^2), \qquad \inf_{\tau \in [0,\ \infty[,\ x \in \boldsymbol{R}^2} \mu(\tau, x) > 0 .$$

Supponiamo inoltre delle condizioni in modo tale che solo alcune regioni limitate abbiano condizioni naturali favorevoli al pino cembro, cioè allontanandosi da queste regioni la mortalità $\mu(\tau, x)$ diventi molto alta. Per formulare tali condizioni introduciamo le seguenti funzioni ausiliarie

$$(2.6)\qquad \xi(x, p) = \int_0^\infty e^{-(1+\kappa p)\int_0^\tau \mu(\tau', x)\, d\tau'}\, d\tau ,$$

$$(2.7)\qquad \eta(x, p) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-(1+\kappa p)\int_0^\tau \mu(\tau', x)\, d\tau'}\, d\tau ,$$

$$(2.8)\qquad \psi^*(x) = \sup_{p \geqslant 0} p \frac{\eta(x, p)}{\xi(x, p)} .$$

Ciò essendo, supponiamo che la funzione $\mu(\tau, x)$ soddisfi alle seguenti condizioni

$$(2.9)\qquad \psi^* \in L^1(\boldsymbol{R}^2),$$

$$(2.10)\qquad \eta(\cdot, 0) \in L^2(\boldsymbol{R}^2).$$

In realtà, sotto opportune condizioni (molto naturali per il nostro modello), la (2.10) segue dalla (2.9). Tuttavia tale deduzione, tecnicamente assai complessa, non è particolarmente interessante per l'obiettivo del nostro lavoro. Perciò, per non appesantire l'esposizione, la poniamo come ipotesi.

Si osserva inoltre che le condizioni (2.4)-(2.5) sulle funzioni $\mu(\tau, x)$ e $\varphi(\tau)$ e le definizioni (2.6)-(2.7) delle funzioni $\xi(x, p)$ e $\eta(x, p)$ implicano la limitatezza e la continuità della funzione $\psi^*(x)$. Perciò, con la condizione (2.9) vale anche

$$\psi^* \in L^1(\boldsymbol{R}^2) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^2) \cap C(\boldsymbol{R}^2).$$

Una soluzione stazionaria del sistema di equazioni (2.1)-(2.3) viene data da una coppia $(q(\cdot, \cdot), N)$ di una funzione continua non negativa $q(\cdot, \cdot)$ definita su $[0, \infty[\times \boldsymbol{R}^2$ e di un numero reale non negativo N tali che, posto

$$P(s, t, x) = q(t-s, x), \qquad N(t) = N,$$

$P(s, t, x)$ e $N(t)$ verifichino le equazioni (2.1)-(2.3). Cioè, $(q(\cdot, \cdot), N)$ è una soluzione stazionaria del sistema di equazioni (2.1)-(2.3) se e solo se soddisfa alle equazioni

$$\frac{\partial q(\tau, x)}{\partial \tau} = -\mu(\tau, x)\left(1 + \kappa \int_0^\infty q(\tau', x)\, d\tau'\right) q(\tau, x) \quad \text{per } \tau > 0, \tag{2.11}$$

$$q(0, x) = \nu N \int_{\boldsymbol{R}^2} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, q(\tau, y)\, g(x-y)\, d\tau\, dy, \tag{2.12}$$

$$N\left[\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, q(\tau, x)\, d\tau\, dx - (\beta + \gamma N)\right] = 0. \tag{2.13}$$

Si vede immediatamente che $q(\cdot, \cdot) \equiv 0$ ed $N = 0$ costituiscono una soluzione del sistema (2.11)-(2.13).

Per trovare soluzioni non nulle del sistema di equazioni (2.11)-(2.13), risolviamo l'equazione (2.11) rispetto a $q(\tau, x)$ con la condizione iniziale (2.12). La (2.11) si trasforma allora in

$$q(\tau, x) = q(0, x)\, e^{-(1 + \kappa \int_0^\infty q(\tau', x)\, d\tau') \int_0^\tau \mu(\tau', x)\, d\tau'}. \tag{2.14}$$

Perciò il nostro problema si riduce a quello di trovare le coppie $(q(\cdot, \cdot), N)$ soddisfacenti al sistema di equazioni (2.12)-(2.14).

3. Trasformazione delle equazioni.

Come abbiamo fatto notare sopra, $q(\cdot, \cdot) \equiv 0$ ed $N = 0$ costituiscono una soluzione del sistema di equazioni (2.12)-(2.14). Ci resta dunque da trovarne le soluzioni non nulle.

Osserviamo che, se $N = 0$, allora $q(\tau, x) = 0$ per ogni $\tau \geqslant 0$ e per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$. Perciò, per trovare le soluzioni non nulle, non è restrittivo supporre che $N > 0$. Supponendo che $N > 0$, dalla (2.13) segue

$$\frac{1}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \int_0^\infty \varphi(\tau)\, q(\tau, x)\, d\tau\, dx - \beta\right) = N . \tag{3.1}$$

Poniamo

$$\Pi(x) = \int_0^\infty q(\tau, x)\, d\tau . \tag{3.2}$$

Si osserva che in virtù della (2.14) si ha

$$\Pi(x) = q(0, x) \int_0^\infty e^{-(1+\kappa\Pi(x))\int_0^\tau \mu(\tau', x)\, d\tau'}\, d\tau = q(0, x)\, \xi(x, \Pi(x)), \tag{3.3}$$

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)\, q(\tau, x)\, d\tau = q(0, x) \int_0^\infty \varphi(\tau)\, e^{-(1+\kappa\Pi(x))\int_0^\tau \mu(\tau', x)\, d\tau'}\, d\tau = \tag{3.4}$$

$$= q(0, x)\eta(x, \Pi(x)),$$

ove $\xi(\cdot, \cdot)$ e $\eta(\cdot, \cdot)$ sono le funzioni definite nelle (2.6)-(2.7). Sostituendo le (2.14) e (3.1) nella (2.12) e tenendo conto della (3.4), si ha

$$q(0, x) = \nu N \int_{\boldsymbol{R}^2} q(0, y)\, \eta(y, \Pi(y))\, g(x-y)\, dy = \tag{3.5}$$

$$= \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} q(0, y)\, \eta(y, \Pi(y))\, dy - \beta\right) \int_{\boldsymbol{R}^2} q(0, y)\, \eta(y, \Pi(y))\, g(x-y)\, dy .$$

Ora cerchiamo l'espressione implicita di $\Pi(x)$ come funzione di $q(0, x)$. Per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$ fissato la funzione $\xi(x, p)$ è decrescente in p e quindi, fissato $x \in \boldsymbol{R}^2$, la funzione

$$\tilde{\varrho}_x(p) = \frac{p}{\xi(x, p)} \tag{3.6}$$

è strettamente crescente in p, il che ci permette di definire la sua funzione inversa

$$p_x(\varrho) = \tilde{\varrho}_x^{-1}(\varrho). \tag{3.7}$$

Grazie all'introduzione della funzione $p_x(\varrho)$, definiamo la funzione

$$\tilde{\eta}(x, \varrho) = \eta(x, p_x(\varrho)). \tag{3.8}$$

È facile osservare che la funzione $\tilde{\eta}(x, \varrho)$ così definita è continua e strettamente decrescente rispetto a $\varrho \in [0, \infty[$. Ricordando la relazione $q(0, x) = \Pi(x)/\xi(x, \Pi(x))$ (si veda la (3.3)), le definizioni (3.6)-(3.8) ci permettono di esprimere $\Pi(x)$ e $\eta(x, \Pi(x))$ nella forma implicita

$$\Pi(x) = p_x(q(0, x)), \qquad \eta(x, \Pi(x)) = \tilde{\eta}(x, q(0, x)). \tag{3.9}$$

Per semplificare le notazioni poniamo

$$\varrho(x) = q(0, x). \tag{3.10}$$

Allora grazie alle definizioni (3.6)-(3.8) la (3.5) si trasforma in

$$\varrho(x) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \varrho(y)\, \tilde{\eta}(y, \varrho(y))\, dy - \beta\right) \int_{\boldsymbol{R}^2} \varrho(y)\, \tilde{\eta}(y, \varrho(y))\, g(x-y)\, dy\,. \tag{3.11}$$

È chiaro che, se otteniamo una soluzione $\varrho(x)$ dell'equazione integrale (3.11), allora in virtù delle (3.9)-(3.10) si ottiene $\Pi(x)$, che assieme a $q(0,x) = \varrho(x)$, soddisfa alla (3.5) e quindi la funzione $q(\tau, x)$ definita da

$$q(\tau, x) = q(0, x)\, e^{-(1+\kappa\Pi(x))\int_0^\tau \mu(\tau', x)\, d\tau'}$$

ed N definito dalla (3.1) soddisfano al sistema di equazioni (2.12)-(2.14). Cioè il problema si è ridotto a quello di trovare soluzioni $\varrho(x)$ dell'equazione (3.11).

Si osserva inoltre che dalle definizioni (3.6)-(3.8) segue che

$$\psi^*(x) = \sup_{p \geqslant 0} p \frac{\eta(x, p)}{\xi(x, p)} = \sup_{\varrho \geqslant 0} \varrho\, \tilde{\eta}(x, \varrho), \tag{3.12}$$

$$\tilde{\eta}(x, 0) = \eta(x, 0). \tag{3.13}$$

4. Soluzione non nulla di un'equazione integrale non lineare.

Per semplificare la notazione, indichiamo con $*$ la convoluzione

$$u * v(x) = \int_{\mathbf{R}^2} u(x-y)\, v(y)\, dy = \int_{\mathbf{R}^2} u(y)\, v(x-y)\, dy\,.$$

Con questa notazione la (3.11) si scrive nella forma

$$\varrho(x) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\mathbf{R}^2} \varrho(y)\, \tilde{\eta}(y, \varrho(y))\, dy - \beta\right) g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x)\,. \tag{4.1}$$

Per risolvere l'equazione (4.1) osserviamo che essa equivale alla coppia di equazioni

$$\lambda = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\mathbf{R}^2} \varrho(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho(x))\, dx - \beta\right), \tag{4.2}$$

$$\varrho(x) = \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x)\,, \tag{4.3}$$

ove λ è un numero positivo uguale in ambedue le equazioni. Per trovare la soluzione dell'equazione (4.1), dimostriamo innanzitutto l'esistenza e l'unicità della soluzione non nulla ϱ_λ dell'equazione (4.3) con un $\lambda > 0$ fissato e poi definiamo la funzione

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\mathbf{R}^2} \varrho_\lambda(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho_\lambda(x))\, dx - \beta\right). \tag{4.4}$$

È chiaro che se risulta $\Lambda(\lambda) = \lambda$, allora la funzione $\varrho_\lambda(x)$, soluzione della (4.3), è soluzione dell'equazione (4.1).

Nella presente sezione ci occupiamo dell'equazione (4.3) e nelle sezioni 5 e 6 esamineremo la funzione $\Lambda(\lambda)$. L'esito di tali esami ci permetterà di affermare che sotto opportune condizioni esistono soluzioni non nulle della (4.1) e quindi soluzioni non nulle del sistema di equazioni (2.12)-(2.14).

Dimostriamo l'esistenza di una soluzione non nulla dell'equazione (4.3) con un $\lambda > 0$ fissato sotto la seguente ipotesi di lavoro.

IPOTESI 4.1. *Esiste una funzione* $\sigma(x)$ *tale che*

$$\sigma(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in \boldsymbol{R}^2, \quad \exists\, \overline{x} \in \boldsymbol{R}^2 \ \text{tale che} \ \sigma(\overline{x}) > 0\,, \tag{4.5}$$

che

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant L^* \, |x - y| \tag{4.6}$$

con

$$L^* = \lambda \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \psi^*(x) \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|x|} \int_{\boldsymbol{R}^2} |g(y) - g(y - x)|\, dy\,, \tag{4.7}$$

e che, se

$$\varrho \in C(\boldsymbol{R}^2), \qquad \sigma(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \ \ \forall x \in \boldsymbol{R}^2, \tag{4.8}$$

allora si abbia

$$\sigma(x) \leqslant \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \ \ \forall x \in \boldsymbol{R}^2. \tag{4.9}$$

Nelle (4.7)-(4.9), $\psi^*(x)$ *è la funzione definita nella* (2.8).

Nella sezione 5 vedremo che l'ipotesi 4.1 è verificata per ogni λ appartenente ad un intervallo $]\overline{\lambda}, \infty[$ con un $\overline{\lambda} > 0$. Nella presente sezione, invece, procediamo per la risoluzione della (4.3) sotto l'ipotesi 4.1. Per semplificare negli enunciati di questa sezione l'ipotesi 4.1 sarà sottointesa senza essere menzionata esplicitamente.

Poniamo innanzitutto

$$\begin{aligned} \Gamma = \{\varrho \in C(\boldsymbol{R}^2) \mid |\varrho(x) - \varrho(y)| \leqslant \\ \leqslant L^* \, |x - y|, \ \ \sigma(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \ \forall x \in \boldsymbol{R}^2\}, \end{aligned} \tag{4.10}$$

ove L^* è il numero definito nella (4.7).

Indichiamo con $C_b(\boldsymbol{R}^2)$ lo spazio delle funzioni continue e limitate in $\boldsymbol{R}^2$. Come è ben noto, munito della norma

$$\|u\|_{C_b(\boldsymbol{R}^2)} = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} |u(x)|\,,$$

esso è uno spazio di Banach. Osserviamo la convessità e la compattezza di Γ in questo spazio.

LEMMA 4.1. *L'insieme* Γ *è convesso e compatto nella topologia dello spazio di Banach* $C_b(\boldsymbol{R}^2)$.

DIMOSTRAZIONE. La convessità di Γ discende immediatamente dalla definizione (4.10). Inoltre dalla (4.10) segue anche che l'insieme Γ è chiuso nella topologia di $C_b(\boldsymbol{R}^2)$.

D'altra parte, ricordando le (2.9) e (3.12) e le proprietà della funzione $g(\cdot)$, dalle (4.5) e (4.10) segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto K_ε di $\boldsymbol{R}^2$ tale che

$$0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \leqslant \varepsilon \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus K_\varepsilon. \tag{4.11}$$

Inoltre la definizione (4.10) implica banalmente che le funzioni appartenenti a Γ sono uniformemente limitate. Pertanto, ricordando che le funzioni appartenenti a Γ sono per definizione lipschitziane con un medesimo coefficiente di Lipschitz, in maniera analoga alla dimostrazione del teorema di Ascoli-Arzelà si vede che la restrizione delle funzioni appartenenti a Γ al compatto K_ε è contenuta in una ε-rete finita. Perciò grazie alla (4.11) anche Γ stesso è contenuto in una ε-rete finita. Ne segue che Γ è compatto nella topologia di $C_b(\boldsymbol{R}^2)$. ■

Poniamo

$$C_b^+(\boldsymbol{R}^2) = \{\varrho \in C_b(\boldsymbol{R}^2) \,|\, \varrho(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in \boldsymbol{R}^2\}, \tag{4.12}$$

$$G(\varrho) = g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot))) \qquad (\varrho \in C_b^+(\boldsymbol{R}^2)). \tag{4.13}$$

Si vede facilmente che l'operatore non lineare $G(\cdot)$ è ben definito in $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$. Si ha il

LEMMA 4.2. *L'operatore $G(\cdot)$ definito nella* (4.13) *è continuo in $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$ (nella topologia di $C_b(\boldsymbol{R}^2)$).*

DIMOSTRAZIONE. Si considera una successione $\{\varrho_n\}_{n \in \boldsymbol{N}}$ di elementi di $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$ convergente nella topologia di $C_b(\boldsymbol{R}^2)$. È ovvio che il suo limite, che indichiamo con $\overline{\varrho}$, appartiene a $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$.

Dalla definizione di $\tilde{\eta}(\cdot, \cdot)$ discende immediatamente che

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} |\varrho_n(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho_n(x)) - \overline{\varrho}(x)\, \tilde{\eta}(x, \overline{\varrho}(x))| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

Ciò implica evidentemente che

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} |g * (\varrho_n(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_n(\cdot)))(x) - g * (\overline{\varrho}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \overline{\varrho}(\cdot)))(x)| \to 0 \quad \text{per } n \to \infty,$$

il che dimostra la tesi. ■

È cruciale osservare che l'immagine di Γ per l'operatore $\lambda G(\cdot)$ è contenuta in Γ. Più precisamente si ha il

LEMMA 4.3. *Per ogni* $\varrho \in \Gamma$ *si ha* $\lambda G(\varrho) = \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot))) \in \Gamma$.

DIMOSTRAZIONE. In virtù dell'ipotesi 4.1 e della definizione (4.10) di Γ, se $\varrho \in \Gamma$, si ha

$$\sigma(x) \leqslant \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2 .$$

Resta dunque da dimostrare la lipschitzianità di $\lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))$. Si ha infatti

$$|\lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) - \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(y)| =$$

$$= \left| \lambda \int_{\boldsymbol{R}^2} (g(x-z) - g(y-z))\, \varrho(z)\, \tilde{\eta}(z, \varrho(z))\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \sup_{z \in \boldsymbol{R}^2} \psi^*(z) \int_{\boldsymbol{R}^2} |g(x-z) - g(y-z)|\, dz \leqslant L^* |x-y|$$

con L^* definito dalla (4.7). Il lemma è dimostrato. ∎

Ora siamo in grado di dimostrare l'esistenza di soluzione non nulla dell'equazione (4.3).

PROPOSIZIONE 4.1. *Esiste un elemento* ϱ_λ *di* Γ *tale che*

$$\varrho_\lambda(x) = \lambda g * (\varrho_\lambda(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_\lambda(\cdot)))(x) . \tag{4.14}$$

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma 4.1 l'insieme Γ è convesso e compatto in $C_b(\boldsymbol{R}^2)$. D'altra parte, poiché l'operatore $G(\cdot)$ è continuo in Γ (nella topologia di $C_b(\boldsymbol{R}^2)$) per il lemma 4.2, lo è anche $\lambda G(\cdot)$. Inoltre per il lemma 4.3 si ha $\lambda G(\Gamma) \subset \Gamma$. Pertanto per il principio di punto fisso di Schauder (si veda per esempio [7], Chap. XVI) esiste un punto fisso dell'operatore in Γ. ∎

È ovvio che per la dimostrazione della lipschitzianità riportata nella dimostrazione del lemma 4.3, né la restrizione a Γ né il fattore λ sono essenziali. Infatti un'analoga argomentazione assieme alla condizione (2.9) ci conduce alla compattezza dell'operatore $G(\cdot)$, che sarà utile nella sezione 5.

OSSERVAZIONE 4.1. *L'operatore* $G(\cdot)$ *è compatto in* $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$.

DIMOSTRAZIONE. Dalle (2.9) e (3.12) segue che, dato $\varepsilon > 0$, esiste un compatto K_ε di $\boldsymbol{R}^2$ tale che

$$g * \psi^*(x) < \varepsilon \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus K_\varepsilon .$$

Poiché per ogni $\varrho \in C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$ e per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$ si ha

$$\varrho(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho(x)) \leqslant \psi^*(x)$$

(si veda la (3.12)), si ha

$$G(\varrho)(x) = g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) \leqslant g * \psi^*(x) \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2,$$

in particolare

$$G(\varrho)(x) \leqslant g * \psi^*(x) < \varepsilon \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus K_\varepsilon . \tag{4.15}$$

D'altra parte, come si dimostra in maniera analoga alla dimostrazione del lemma 4.3, si ha

$$|G(\varrho)(x) - G(\varrho)(y)| = \left| \int_{\boldsymbol{R}^2} (g(x-z) - g(y-z))\, \varrho(z)\, \tilde{\eta}(z, \varrho(z))\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z \in \boldsymbol{R}^2} \psi^*(z) \sup_{z \in \boldsymbol{R}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{|z|} \int_{\boldsymbol{R}^2} |g(w) - g(w-z)|\, dw\, |x-y| .$$

Cioè le funzioni $G(\varrho)(x)$ con $\varrho \in C_b(\boldsymbol{R}^2)$ sono equicontinue. Perciò, ricordando la (4.15), in maniera analoga alla conclusione della dimostrazione del lemma 4.1, si dimostra che l'operatore $G(\cdot)$ è compatto. ■

Ora dimostriamo l'unicità della soluzione non nulla dell'equazione (4.3). La dimostrazione poggia sulle proprietà di operatori autoaggiunti compatti in uno spazio di Hilbert.

Iniziamo con la definizione di uno spazio di Hilbert e un operatore lineare in esso.

Sia $\varrho_\lambda(x)$ una soluzione non nulla dell'equazione (4.3). Posto

$$\eta_1(x) = \tilde{\eta}(x, \varrho_\lambda(x)), \tag{4.16}$$

si definisce lo spazio di Hilbert reale

$$L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2) = \left\{ u : \text{misurabile in } \boldsymbol{R}^2, \int_{\boldsymbol{R}^2} u(x)^2 \eta_1(x)\, dx < \infty \right\} \tag{4.17}$$

munito del prodotto scalare

$$\langle u, v\rangle_{L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)} = \int_{\boldsymbol{R}^2} u(x)v(x)\eta_1(x)\,dx \tag{4.18}$$

e della norma

$$\|u\|_{L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)}} = \left(\int_{\boldsymbol{R}^2} u(x)^2\eta_1(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Per semplificare le notazioni, poniamo

$$\|\cdot\|_{\eta_1} = \|\cdot\|_{L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)}, \qquad \langle\cdot,\cdot\rangle_{\eta_1} = \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)}.$$

Indichiamo con A_{η_1} l'applicazione che a u associa $\lambda g * (u\eta_1)$, cioè

$$(A_{\eta_1}u)(x) = \lambda g * (u\eta_1)(x)\,. \tag{4.19}$$

Si vede facilmente che l'operatore A_{η_1} è ben definito nello spazio di Hilbert reale $L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$. Infatti, tenuto conto della relazione

$$\begin{aligned}\left(\int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\,u(y)\,\eta_1(y)\,dy\right)^2 &\leqslant \\ &\leqslant \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\,\eta_1(y)\,dy \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\,u(y)^2\eta_1(y)\,dy \leqslant \\ &\leqslant \left(\sup_{y\in\boldsymbol{R}^2}\eta_1(y)\right)\int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)u(y)^2\eta_1(y)\,dy,\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}\|A_{\eta_1}u\|^2_{\eta_1} = \lambda^2\int_{\boldsymbol{R}^2}\left(\int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\,u(y)\,\eta_1(y)\,dy\right)^2\eta_1(x)\,dx &\leqslant \\ \leqslant \lambda^2\left(\sup_{y\in\boldsymbol{R}^2}\eta_1(y)\right)\int_{\boldsymbol{R}^2}\int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\,u(y)^2\eta_1(y)\,dy\eta_1(x)\,dx &= \\ = \lambda^2\left(\sup_{y\in\boldsymbol{R}^2}\eta_1(y)\right)\int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\,\eta_1(x)\,dx\int_{\boldsymbol{R}^2} u(y)^2\eta_1(y)\,dy &\leqslant \\ \leqslant \lambda^2\left(\sup_{y\in\boldsymbol{R}^2}\eta_1(y)\right)^2\int_{\boldsymbol{R}^2} u(y)^2\eta_1(y)\,dy = \lambda^2\left(\sup_{y\in\boldsymbol{R}^2}\eta_1(y)\right)^2\|u\|^2_{\eta_1}&.\end{aligned}$$

Si ha il seguente lemma.

LEMMA 4.4. *L'applicazione A_{η_1} definita nella* (4.19) *è un operatore autoaggiunto compatto nello spazio di Hilbert reale $L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$.*

DIMOSTRAZIONE. Si osserva che, tenuto conto della relazione $g(x-y) = g(y-x)$, si ha

$$\langle A_{\eta_1} u, v\rangle_{\eta_1} = \int_{\boldsymbol{R}^2} (A_{\eta_1} u)(x)\, v(x)\, \eta_1(x)\, dx =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\, u(y)\, \eta_1(y)\, dy \eta_1(x)\, dx =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^2} u(y) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(y-x)\, v(x)\, \eta_1(x)\, dx \eta_1(y)\, dy =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^2} (A_{\eta_1} v)(y)\, u(y)\, \eta_1(y)\, dy = \langle u, A_{\eta_1} v\rangle_{\eta_1}.$$

Cioè l'operatore A_{η_1} è autoaggiunto.

Per dimostrare che l'operatore A_{η_1} è compatto, osserviamo che, in virtù della (2.10), dato $\varepsilon > 0$, esiste un compatto K_ε di $\boldsymbol{R}^2$ tale che

$$\int_{\boldsymbol{R}^2 \setminus K_\varepsilon} \eta_1(x)\, g^2 * \eta_1(x)\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda^2}\,.$$

Si ha dunque per ogni $u \in L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$

$$\int_{\boldsymbol{R}^2\setminus K_\varepsilon} |(A_{\eta_1} u)(x)|^2 \eta_1(x)\, dx = \lambda^2 \int_{\boldsymbol{R}^2\setminus K_\varepsilon} \left(\int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\, u(y)\, \eta_1(y)\, dy \right)^2 \eta_1(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2 \int_{\boldsymbol{R}^2} u(y)^2 \eta_1(y)\, dy \int_{\boldsymbol{R}^2\setminus K_\varepsilon} \eta_1(x) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)^2 \eta_1(y)\, dy dx \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2_{\eta_1}.$$

D'altra parte, poiché si ha $\dfrac{\partial}{\partial x_i} A_{\eta_1} u = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_i} * (u\eta_1)$, esiste una costante C tale che

$$\|A_{\eta_1} u\|_{H^1(K_\varepsilon)} \leqslant C \|u\|_{\eta_1}$$

per ogni $u \in L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$. Pertanto in virtù dell'immersione di Sobolev da $H^1(K_\varepsilon)$ in $L^2_{\eta_1}(K_\varepsilon)$ e grazie all'osservazione sopra riportata, si deduce che A_{η_1} è un operatore compatto in $L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$. ∎

Poiché la funzione ϱ_λ verifica la (4.14) (si vedano anche le (4.16) e (4.19)), il numero 1 è un autovalore di A_{η_1} e ϱ_λ è un autovettore di A_{η_1} associato all'autovalore 1.

LEMMA 4.5. *Se $\mu \neq 1$ è un autovalore dell'operatore A_{η_1} in $L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$, allora per ogni autovettore $u \in L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$ associato a μ (per definizione $u \not\equiv 0$), si ha $u^+ \not\equiv 0$ e $u^- \not\equiv 0$, ove u^+ e u^- sono rispettivamente la parte positiva e quella negativa della funzione u.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché 1 e μ sono due autovalori distinti di A_{η_1} e che ϱ_λ è un autovettore associato all'autovalore 1, per la nota proprietà degli operatori autoaggiunti si ha

$$0 = \langle u, \varrho_\lambda \rangle_{\eta_1} = \int\limits_{\boldsymbol{R}^2} u(x)\, \varrho_\lambda(x)\, \eta_1(x)\, dx\,,$$

il che, tenuto conto della positività di $\varrho_\lambda(x)$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$, implica che $u^+ \not\equiv 0$ e $u^- \not\equiv 0$. ■

LEMMA 4.6. *Il più grande autovalore dell'operatore A_{η_1} in $L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$ è uguale a* 1.

DIMOSTRAZIONE. Poiché ϱ_λ è un autovettore di A_{η_1} associato all'autovalore 1, il più grande autovalore di A_{η_1} è maggiore o uguale a 1.

Supponiamo per assurdo che il più grande autovalore $\bar{\mu}$ di A_{η_1} sia strettamente maggiore di 1. Sia $u \not\equiv 0$ un autovettore associato a $\bar{\mu} > 1$. Allora in virtù del lemma 4.5 si ha $u^+ \not\equiv 0$, $u^- \not\equiv 0$. Siccome λ è un parametro positivo e che le funzioni g e η_1 sono strettamente positive, si ha

$$(A_{\eta_1} u^-)(x) = \lambda g * (u^- \eta_1)(x) > 0 \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2$$

e quindi

$$\bar{\mu} u = A_{\eta_1} u^+ - A_{\eta_1} u^- < A_{\eta_1} u^+\,.$$

Ne segue che

$$\langle u^+, A_{\eta_1} u^+ \rangle_{\eta_1} > \langle u^+, \bar{\mu} u \rangle_{\eta_1} = \bar{\mu} \langle u^+, u \rangle_{\eta_1} = \bar{\mu} \langle u^+, u^+ \rangle_{\eta_1} = \bar{\mu} \|u^+\|^2_{\eta_1},$$

ovvero

$$\frac{\langle u^+, A_{\eta_1} u^+ \rangle_{\eta_1}}{\|u^+\|^2_{\eta_1}} > \overline{\mu}\,.$$

D'altra parte, essendo A_{η_1} un operatore autoaggiunto e compatto in $L^2_{\eta_1}(\boldsymbol{R}^2)$, si ha

$$\overline{\mu} = \sup_{\|v\|_{\eta_1}=1} v, A_{\eta_1} v\,.$$

Dalle due relazioni segue la contradizione

$$\overline{\mu} = \sup_{\|v\|_{\eta_1}=1} \langle v, A_{\eta_1} v\rangle \geqslant \frac{\langle u^+, A_{\eta_1} u^+ \rangle_{\eta_1}}{\|u^+\|^2_{\eta_1}} > \overline{\mu}\,.$$

Il lemma è dimostrato. ■

LEMMA 4.7. *Se* $v \in L^2(\boldsymbol{R}^2)$ *e se* $v \not\equiv 0$, *allora si ha*

$$\langle v, g * v\rangle_{L^2} > 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la trasformata di Fourier, si ha $\mathcal{F}(g * v) = \widehat{g}\widehat{v}$, e quindi

$$\langle v, g * \rangle_{L^2} = \langle \widehat{v}, \widehat{g}\widehat{v}\rangle_{L^2} = \int_{\boldsymbol{R}^2} |\widehat{v}(\xi)|^2 \widehat{g}(\xi)\, d\xi\,,$$

Ma come è noto, si ha

$$\widehat{g}(\xi) = e^{-\sigma^2 \frac{|\xi|^2}{2}} > 0\,.$$

Ne segue la tesi. ■

LEMMA 4.8. *Sia* ϑ *una funzione definita su* $\boldsymbol{R}^2$ *e tale che* $\vartheta(x) < \eta_1(x)$ *e* $|\vartheta(x)| \leqslant C$ *con una costante finita C per ogni* $x \in \boldsymbol{R}^2$. *Sia* A_ϑ *l'operatore definito da*

$$(A_\vartheta u)(x) = \lambda g * (u\vartheta)(x)\,. \tag{4.20}$$

Se $v \in L^2(\boldsymbol{R}^2)\setminus\{0\}$ *e se* $A_\vartheta v = \mu v$, *allora si ha* $\mu < 1$.

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che basta esaminare il caso in cui $\|v\|_{\eta_1} = 1$. Supponendo dunque che $A_\vartheta v = \mu v$ e $\|v\|_{\eta_1} = 1$, si ha

$$\mu = \langle v, \mu \rangle_{\eta_1} = \langle v, A_\vartheta \rangle_{\eta_1}.$$

Sia $A_{\eta_1 - \vartheta}$ l'operatore definito da

$$(A_{\eta_1 - \vartheta} u)(x) = \lambda g * (u(\eta_1 - \vartheta))(x).$$

Dalla relazione

$$(A_\vartheta v)(x) = \lambda g * (v\vartheta)(x) = \lambda g * (v(\eta_1 - (\eta_1 - \vartheta)))(x) = \\ = (A_{\eta_1} v)(x) - (A_{\eta_1 - \vartheta} v)(x)$$

segue che

$$\langle v, A_\vartheta v \rangle_{\eta_1} = \langle v, A_{\eta_1} v \rangle_{\eta_1} - \langle v, A_{\eta_1 - \vartheta} v \rangle_{\eta_1}.$$

Si osserva inoltre che

$$\langle v, A_{\eta_1 - \vartheta} v \rangle_{\eta_1} = \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x)(A_{\eta_1 - \vartheta} v)(x)\, \eta_1(x)\, dx =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x)(A_{\eta_1 - \vartheta} v)(x)(\eta_1(x) - \vartheta(x))\, dx + \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x)(A_{\eta_1 - \vartheta} v)(x)\, \vartheta(x)\, dx =$$

$$= \langle v, A_{\eta_1 - \vartheta} v \rangle_{\eta_1 - \vartheta} + \lambda \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\, v(y)(\eta_1(y) - \vartheta(y))\, dy \vartheta(x)\, dx\,,$$

ove $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\eta_1 - \vartheta}$ è definito dalla relazione

$$\langle v, u \rangle_{\eta_1 - \vartheta} = \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x)\, u(x)(\eta_1(x) - \vartheta(x))\, dx\,.$$

Pertanto si ha

$$\mu = \langle v, A_{\eta_1} v \rangle_{\eta_1} - \langle v, A_{\eta_1 - \vartheta} v \rangle_{\eta_1 - \vartheta} - I_1,$$

$$I_1 = \lambda \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\, v(y)(\eta_1(y) - \vartheta(y))\, dy \vartheta(x)\, dx\,.$$

Quanto al termine $\langle v, A_{\eta_1} v \rangle_{\eta_1}$, per il lemma 4.5 si ha

$$\langle v, A_{\eta_1} v \rangle_{\eta_1} \leqslant \sup_{\|w\|_{\eta_1} = 1} \langle w, A_{\eta_1} w \rangle_{\eta_1} = 1\,.$$

D'altra parte per il termine $\langle v, A_{\eta_1-\vartheta} v\rangle_{\eta_1-\vartheta}$ in virtù del lemma 4.6 si ha

$$\langle v, A_{\eta_1-\vartheta} v\rangle_{\eta_1-\vartheta} =$$

$$= \lambda \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\, v(y)(\eta_1(y)-\vartheta(y))\, dy(\eta_1(x)-\vartheta(x))\, dx =$$

$$= \lambda\langle v(\eta_1-\vartheta),\ g*(v(\eta_1-\vartheta))\rangle_{L^2(\boldsymbol{R}^2)} > 0\,.$$

Infine si ha

$$I_1 = \lambda \int_{\boldsymbol{R}^2} v(x) \int_{\boldsymbol{R}^2} g(x-y)\, v(y)(\eta_1(y)-\vartheta(y))\, dy\vartheta(x)\, dx =$$

$$= \int_{\boldsymbol{R}^2} (A_\vartheta v)(y)\, v(y)(\eta_1(y)-\vartheta(y))\, dy = \mu \int_{\boldsymbol{R}^2} v(y)^2(\eta_1(y)-\vartheta(y))\, dy > 0\,.$$

Pertanto si ha

$$\mu = \langle v, A_{\eta_1}(v)\rangle_{\eta_1} - \langle v, A_{\eta_1-\vartheta}(v)\rangle_{\eta_1-\vartheta} - I_1 < 1\,.$$

Il lemma è dimostrato. ■

Ora siamo in grado di dimostrare l'unicità della soluzione non nulla dell'equazione (4.3).

PROPOSIZIONE 4.2. *L'equazione* (4.3) *ammette al più una soluzione non nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\varrho_1(x)$ e $\varrho_2(x)$ siano due soluzioni differenti della (4.3). Si ha evidentemente

$$\varrho_1(x)-\varrho_2(x)=\lambda(g*(\varrho_1\tilde{\eta}(\cdot,\varrho_1)-\varrho_2\tilde{\eta}(\cdot,\varrho_2)))(x)=\lambda g*((\varrho_1-\varrho_2)\,\vartheta)(x)\,,$$

ove

$$\vartheta(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\varrho_1(x)\,\tilde{\eta}(x,\varrho_1(x))-\varrho_2(x)\,\tilde{\eta}(x,\varrho_2(x))}{\varrho_1(x)-\varrho_2(x)} & \text{per } x \text{ tali che } \varrho_1(x)\neq\varrho_2(x)\,, \\ \dfrac{d}{d\varrho}[\varrho\tilde{\eta}(\cdot,\varrho)]\big|_{\varrho=\varrho_1(x)=\varrho_2(x)} & \text{per } x \text{ tali che } \varrho_1(x)=\varrho_2(x)\,. \end{cases}$$

Definendo formalmente l'operatore A_ϑ come nella (4.20), si ha

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \lambda g * ((\varrho_1 - \varrho_2)\,\vartheta) = A_\vartheta(\varrho_1 - \varrho_2),$$

cioè $\varrho_1 - \varrho_2$ risulta essere un autovettore dell'operatore A_ϑ associato all'autovalore 1.

Osserviamo che per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$ si ha $\vartheta(x) < \eta_1(x) = \tilde{\eta}(x, \varrho_1(x))$. Infatti, visto che la funzione $\tilde{\eta}(x, \varrho)$ è strettamente decrescente per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$ fissato, si ha per ogni x tale che $\varrho_1(x) \neq \varrho_2(x)$

$$\vartheta(x) = \frac{\varrho_1(x)\,\tilde{\eta}(x, \varrho_1(x)) - \varrho_2(x)\,\tilde{\eta}(x, \varrho_2(x))}{\varrho_1(x) - \varrho_2(x)} <$$

$$< \frac{\varrho_1(x)\,\tilde{\eta}(x, \varrho_1(x)) - \varrho_2(x)\,\tilde{\eta}(x, \varrho_1(x))}{\varrho_1(x) - \varrho_2(x)} = \tilde{\eta}(x, \varrho_1(x)) = \eta_1(x);$$

invece dalla relazione $\dfrac{d}{d\varrho}[\varrho\,\tilde{\eta}(x, \varrho)] = \tilde{\eta}(x, \varrho) + \varrho \dfrac{d}{d\varrho}\,\tilde{\eta}(x, \varrho) < \tilde{\eta}(x, \varrho)$ segue che per ogni x tale che $\varrho_1(x) = \varrho_2(x)$ si ha

$$\vartheta(x) < \tilde{\eta}(x, \varrho_1(x)) = \eta_1(x).$$

Inoltre, è facile verificare che esiste una costante C tale che $|\vartheta(x)| \leqslant C$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$. Pertanto, per il lemma 4.8 l'operatore A_ϑ non può avere l'autovalore 1, contrariamente a ciò che abbiamo supposto. Ciò significa che $\varrho_1 = \varrho_2$. La proposizione è dimostrata. ■

5. Famiglia di equazioni integrali non lineari parametrizzate da $\lambda > 0$.

Nella § 4 abbiamo dimostrato l'esistenza e l'unicità della soluzione non nulla ϱ_λ dell'equazione (4.3) per un $\lambda > 0$ fissato sotto l'ipotesi 4.1. Nella presente sezione esaminiamo l'esistenza dell'unica soluzione ϱ_λ dell'equazione (4.3) al variare di λ e il comportamento della funzione

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \varrho_\lambda(x)\,\tilde{\eta}(x, \varrho_\lambda(x))\,dx - \beta\right). \tag{4.4}$$

Ciò ci permetterà di ottenere il punto fisso $\lambda = \Lambda(\lambda)$ sotto opportune condizioni.

Per questo è essenziale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 5.1. *Se per un numero* $\lambda_0 > 0$ *l'equazione* (4.3) *con* $\lambda = \lambda_0$ *ammette una soluzione non nulla, allora esiste un numero* $\lambda_1 \in]0, \lambda_0[$ *tale che l'equazione* (4.3) *con* $\lambda \geq \lambda_1$ *ammetta una ed una sola soluzione non nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Per le proposizioni 4.1 e 4.2 è sufficiente dimostrare che esiste $\lambda_1 \in]0, \lambda_0[$ tale che per $\lambda \geq \lambda_1$ valga l'ipotesi 4.1.

Indichiamo con ϱ_{λ_0} la soluzione non nulla dell'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda_0$ e poniamo

$$\eta_1^{(\varepsilon)}(x) = [\tilde{\eta}(x, (1/2)\varrho_{\lambda_0}(x)) - \varepsilon]^+, \quad \varepsilon \in [0, E[, \tag{5.1}$$

ove $E = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \tilde{\eta}\left(x, \frac{1}{2}\varrho_{\lambda_0}(x)\right)$. Definiamo l'operatore lineare $G_{\eta_1^{(\varepsilon)}}$ per la relazione

$$G_{\eta_1^{(\varepsilon)}} u = g * (u\eta_1^{(\varepsilon)}).$$

Sia $\nu_1(\varepsilon)$ il più grande autovalore dell'operatore $G_{\eta_1^{(\varepsilon)}}$ e sia $\lambda_1(\varepsilon) = 1/\nu_1(\varepsilon)$.

In modo analogo alla dimostrazione dei lemmi 4.5 e 4.6, si può constatare che esiste un autovettore $\sigma^{(\varepsilon)}$ associato all'autovalore $\nu_1(\varepsilon)$ e tale che

$$\sigma^{(\varepsilon)}(x) > 0 \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2, \qquad \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \sigma_\varepsilon(x) < \infty .$$

Per fissare l'idea, scegliamo $\sigma^{(\varepsilon)}$ in modo tale che

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \sigma^{(\varepsilon)}(x) = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \varrho_{\lambda_0}(x) .$$

Per la famiglia di operatori $G_{\eta_1^{(\varepsilon)}}$, $\varepsilon \in [0, E[$, vale la seguente affermazione.

LEMMA 5.1. *La funzione* $\nu_1(\varepsilon)$ *è continua in* $\varepsilon \in [0, E[$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che in un punto $\varepsilon_0 \in [0, E[$ la funzione $\nu_1(\varepsilon)$ non sia continua. Poiché per la costruzione degli operatori $G_{\eta_1^{(\varepsilon)}}$ si ha $0 \leq \nu_1(\varepsilon) \leq E$ per ogni $\varepsilon \in [0, E[$, esisterebbe una successione $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ tale che $\varepsilon_k \to \varepsilon_0$ e $\nu_1(\varepsilon_k) \to \nu_1^* \neq \nu_1(\varepsilon_0)$. Inoltre in modo analogo alla dimostrazione dell'osservazione 4.1, la famiglia $\{\sigma^{(\varepsilon)}\}_{\varepsilon \in [0, E[}$ costituisce un insieme relativamente compatto nella topologia di $C_b(\boldsymbol{R}^2)$. Perciò si può estrarre dalla successione $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$

una sottosuccessione $\{\varepsilon_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tale che $\sigma^{(\varepsilon_{kj})}$ converga ad una funzione σ^* in $C_b(\boldsymbol{R}^2)$ per $j \to \infty$.

Ora passando al limite per $j \to \infty$ nell'uguaglianza

$$\nu_1(\varepsilon_{k_j})\, \sigma^{(\varepsilon_{kj})} = g * (\sigma^{(\varepsilon_{kj})}\, \eta_1^{(\varepsilon_{kj})}),$$

si ha

$$\nu_1^* \sigma^* = g * (\sigma^* \eta_1^{(\varepsilon_0)}).$$

Cioè σ^* risulta essere un autovettore associato all'autovalore $\nu_1^* \neq \neq \nu_1(\varepsilon_0)$ dell'operatore $G_{\eta_1^{(\varepsilon_0)}}$ e $\sigma^*(x) \geqslant 0$ per ogni $x \in \boldsymbol{R}^2$, il che non è possibile come si può vedere in modo analogo al lemma 4.5. È dimostrata la continuità della funzione $\nu_1(\varepsilon)$ in $\varepsilon \in [0, E[$. ■

CONTINUAZIONE DELLLA DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 5.1. Poiché la funzione $\tilde{\eta}(x, \varrho)$ è decrescente in $\varrho \geqslant 0$, si ha

$$\eta_1^{(0)}(x) = \tilde{\eta}(x, 1\cdot 2\varrho_{\lambda_0}(x)) > \tilde{\eta}(x, \varrho_{\lambda_0}(x)) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2$$

e quindi si ha

$$\frac{1}{\lambda_0}\varrho_{\lambda_0}(x) = g * (\varrho_{\lambda_0}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_{\lambda_0}(\cdot)))(x) <$$

$$< g * \left(\varrho_{\lambda_0}(\cdot)\, \tilde{\eta}\left(\cdot, \frac{1}{2}\varrho_{\lambda_0}(\cdot)\right)\right)(x) = G_{\eta_1^{(0)}}\varrho_{\lambda_0}(x).$$

Pertanto vale la disuguaglianza

$$\nu_1(0) = \sup_{\|\varrho\|_{\eta_1^{(0)}} = 1} \int_{\boldsymbol{R}^2} (G_{\eta_1^{(0)}}\varrho)(x)\, \varrho(x)\, \eta_1^{(0)}(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\int_{\boldsymbol{R}^2} (G_{\eta_1^{(0)}}\varrho_{\lambda_0})(x)\, \varrho_{\lambda_0}(x)\, \eta_1^{(0)}(x)\, dx}{\|\varrho_{\lambda_0}\|^2_{\eta_1^{(0)}}} >$$

$$> \frac{\int_{\boldsymbol{R}^2} g * (\varrho_{\lambda_0}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_{\lambda_0}(\cdot)))(x)\, \varrho_{\lambda_0}(x)\, \eta_1^{(0)}(x)\, dx}{\|\varrho_{\lambda_0}\|^2_{\eta_1^{(0)}}} = \frac{1}{\lambda_0}$$

(qui $\|\cdot\|_{\eta_1^{(0)}}$ è da intendersi in modo analogo alla notazione $\|\cdot\|_{\eta_1}$ utilizzata nella sezione 4), ossia

$$0 < \lambda_1(0) = \frac{1}{\nu_1(0)} < \lambda_0.$$

Ne segue, tenuto conto del lemma 5.1, che esiste un $\tilde{\varepsilon} > 0$ tale che $\lambda_1(\tilde{\varepsilon}) < \lambda_0$.

Per non appesantire le notazioni, indichiamo semplicemente con ε il numero $\tilde{\varepsilon}$ qui sopra ottenuto. Poiché $\varepsilon > 0$ e quindi il supporto di $\eta_1^{(\varepsilon)}$ è compatto (si veda la (5.1)), si ha

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \frac{\sigma^{(\varepsilon)}(x)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(x)}{\varrho_{\lambda_0}(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho_{\lambda_0}(x))} = \sup_{x \in \operatorname{supp} \eta_1^{(\varepsilon)}} \frac{\sigma^{(\varepsilon)}(x)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(x)}{\varrho_{\lambda_0}(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho_{\lambda_0}(x))} < \infty .$$

Ciò, tenuto conto delle espressioni $\sigma^{(\varepsilon)}(x) = \lambda_1(\varepsilon)\, g * (\sigma^{(\varepsilon)}(\cdot)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(\cdot))(x)$ e $\varrho_{\lambda_0}(x) = \lambda_0 g * (\varrho_{\lambda_0}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_{\lambda_0}(\cdot))(x)$, implica che

$$\sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \frac{\sigma^{(\varepsilon)}(x)}{\varrho_{\lambda_0}(x)} < \infty .$$

È inoltre evidente che la funzione $\sigma^{(\varepsilon)}(x) = \lambda_1(\varepsilon) g * (\sigma^{(\varepsilon)}(\cdot)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(\cdot))(x)$ è lipschitziana. Pertanto esiste un numero $\vartheta_1 > 0$ tale che per ogni $\vartheta \in$ $\in]0, \vartheta_1]$ valgano

$$\vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(x) \leqslant (1/2) \varrho_{\lambda_0}(x) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2,$$

$$|\vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(x) - \vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(y)| \leqslant L^* \, |x - y| \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2,$$

ove L^* è la costante definita nella (4.7).

Poiché la funzione $\tilde{\eta}(x, \varrho)$ è decrescente in $\varrho \geqslant 0$, per ogni $\vartheta \in]0, \vartheta_1]$ si ha

$$\vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(x)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(x) \leqslant \varrho \tilde{\eta}(x, \varrho) \qquad \forall \varrho \in [\vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(x), (1/2)\, \varrho_{\lambda_0}(x)] .$$

Pertanto, ricordando la definizione di $\tilde{\eta}(x, \varrho)$ e tenendo conto della compattezza del supporto di $\eta_1^{(\varepsilon)}$, si constata che, dato $\lambda \geqslant \lambda_1(\varepsilon)$, esiste un $\vartheta \in$ $\in]0, \vartheta_1]$ tale che, per ogni $\varrho \in C(\boldsymbol{R}^2)$ soddisfacente alla relazione

$$\vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2,$$

si abbia

$$\vartheta \sigma^{(\varepsilon)}(x)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(x) \leqslant \varrho(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho(x)) \qquad \forall x \in \operatorname{supp} \eta_1^{(\varepsilon)}.$$

Ne segue che, se $\varrho \in C(\boldsymbol{R}^2)$ e se

$$\vartheta\sigma^{(\varepsilon)}(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2,$$

allora si ha

$$\vartheta\sigma^{(\varepsilon)}(x) = \lambda_1(\varepsilon)\, g * (\vartheta\sigma^{(\varepsilon)}(\cdot)\, \eta_1^{(\varepsilon)}(\cdot))(x) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda g * ([\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot))]\, \chi_S(\cdot))(x) \leqslant \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x),$$

ove $S = \operatorname{supp} \eta_1^{(\varepsilon)}$ mentre $\chi_S(\cdot)$ è la funzione caratteristica dell'insieme S. Tenendo conto che per la definizione di ψ^* si ha

$$\varrho(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho(x)) \leqslant \psi^*(x) \qquad \forall x \in \boldsymbol{R}^2,$$

si può affermare che la funzione $\sigma = \vartheta\sigma^{(\varepsilon)}$ verifica le condizioni dell'ipotesi 4.1. Cioè, abbiamo dimostrato che per ogni $\lambda \geqslant \lambda_1(\varepsilon)$, l'ipotesi 4.1 è verificata e quindi, in virtù delle proposizioni 4.1 e 4.2 l'equazione (4.3) ammette una e una sola soluzione non nulla. ■

Ora osserviamo che l'ipotesi 4.1 è verificata per λ sufficientemente grande. Più precisamente si ha la

PROPOSIZIONE. 5.2. *Esiste un* $\lambda > 0$ *tale che l'ipotesi* 4.1 *con questo* λ *sia verificata.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordando le definizioni (2.6)-(2.7) delle funzioni $\xi(\cdot, \cdot)$ e $\eta(\cdot, \cdot)$, non è difficile dedurre dalla continuità della funzione $\mu(\tau, x)$ (si veda la (2.5)) quella di $\xi(x, p)$ e $\eta(x, p)$. Perciò esistono $p_0 > 0$, $r_0 > 0$ e $x_0 \in \boldsymbol{R}^2$ tali che, posto $B = \{x \in \boldsymbol{R}^2 \mid |x - x_0| \leqslant r_0\}$, si ha $\inf_{x \in B} \xi(x, p_0) > 0$. Quindi, posto $\varrho_0 = \sup_{x \in B}(p_0/\xi(x, p_0))$, si ha $\inf_{x \in B} \tilde{\eta}(x, \varrho_0) > 0$. Poniamo

$$h_0 = \inf_{x \in B} \tilde{\eta}(x, \varrho_0), \qquad \delta = \inf_{x \in B} g * \chi_B(x),$$

$$D = \{(x, \varrho) \in \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R} \mid x \in B,\ \varrho \in [\varrho_0, (1/(\delta h_0))\, g * \psi^*(x)]\},$$

$$\zeta = \inf_{(x, \varrho) \in D} \varrho\, \tilde{\eta}(x, \varrho), \qquad \sigma_0 = \min(\varrho_0, \zeta/h_0).$$

Si constata facilmente che $\delta > 0$ e $\zeta > 0$.

Ora, definendo una funzione $\sigma(x)$ per

$$\sigma(x) = \tag{5.2}$$

$$= \begin{cases} \sigma_0 & \text{per } x \in B \\ \sigma_0 - L^* \operatorname{dist}(x, B) & \text{per } x \text{ tali che } r_0 < |x - x_0| < r_0 + \dfrac{\sigma_0}{L^*}, \\ 0 & \text{per } x \text{ tali che } |x - x_0| \geqslant r_0 + \dfrac{\sigma_0}{L^*} \end{cases}$$

dimostriamo che $\sigma(x)$ verifica le condizioni dell'ipotesi 4.1 con $\lambda = 1/(\delta h_0)$. Nella (5.2) L^* è il numero definito nella (4.7) (con $\lambda = 1/(\delta h_0)$).

È evidente che per $\sigma(x)$ le condizioni (4.5)-(4.6) sono verificate. Esaminiamo la condizione (4.8)-(4.9) separatamente nei due casi: $\varrho_0 \leqslant \zeta/h_0$ e $\varrho_0 > \zeta/h_0$.

Supponiamo innanzitutto che $\varrho_0 \leqslant \zeta/h_0$. Sia ϱ una funzione di classe $C(\boldsymbol{R}^2)$ tale che $\sigma(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)$ $\forall x \in \boldsymbol{R}^2$. Allora per $x \in B$ si ha

$$\varrho_0 = \sigma_0 = \sigma(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)$$

e quindi si ha

$$\inf_{x \in B} \varrho(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho(x)) \geqslant \zeta\,.$$

Ne segue che

$$\inf_{x \in B} \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) \geqslant \lambda\zeta \inf_{x \in B} g * \chi_B(x) = \zeta/h_0 \geqslant \varrho_0 = \sigma_0 = \sigma(x)\,.$$

Tenuto conto della costruzione della funzione $\sigma(x)$, non è difficile constatare che $\lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) \geqslant \sigma(x)$ anche per $x \in \boldsymbol{R}^2 \setminus B$. D'altra parte per la definizione della funzione $\psi^*(\cdot)$ (si vedano le (2.8), (3.12)) si ha evidentemente

$$\lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)\,.$$

Cioè, se $\varrho_0 \leqslant \zeta/h_0$, allora la funzione $\sigma(x)$ definita nella (5.2) verifica le condizioni dell'ipotesi 4.1.

Ora supponiamo che $\varrho_0 > \zeta/h_0$ e che ϱ sia una funzione di classe $C(\boldsymbol{R}^2)$ tale che $\sigma(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)$ $\forall x \in \boldsymbol{R}^2$. Per un punto $x \in B$ si ha o $\sigma(x) \leqslant \varrho(x) < \varrho_0$ o $\varrho_0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)$. Se $\sigma(x) \leqslant \varrho(x) < \varrho_0$, allora, tenuto conto che $\sigma(x) = \sigma_0 = \zeta/h_0$, si ha

$$\varrho(x)\,\tilde{\eta}(x,\varrho(x)) \geqslant \varrho(x)\,\tilde{\eta}(x,\varrho_0) \geqslant \sigma_0 h_0 = (\zeta/h_0)\,h_0 = \zeta\,.$$

Se $\varrho_0 \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)$, allora per la definizione di ζ si ha $\varrho(x)\,\tilde{\eta}(x,\varrho(x)) \geqslant \zeta$. Cioè in entrambi i casi per $x \in B$ si ha $\varrho(x)\,\tilde{\eta}(x,\varrho(x)) \geqslant \zeta$. Pertanto si ha

$$\lambda g * (\varrho(\cdot)\,\tilde{\eta}(\cdot,\varrho(\cdot)))(x) \geqslant (\zeta/(\delta h_0)) \inf_{x \in B} g * \chi_B(x) =$$

$$= \zeta/h_0 = \sigma_0 = \sigma(x) \quad \forall x \in B\,.$$

Stabilito ciò, come nel caso precedente, non è difficile constatare che

$$\sigma(x) \leqslant \lambda g * (\varrho(\cdot)\,\tilde{\eta}(\cdot,\varrho(\cdot)))(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x) \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^2.$$

Si può dunque concludere che la funzione $\sigma(x)$ definita nella (5.2) verifica le condizioni dell'ipotesi 4.1, ossia, l'ipotesi 4.1 è verificata con $\lambda = 1/(\delta h_0)$. ■

PROPOSIZIONE 5.3. *Esiste un numero* $\bar{\lambda} > 0$ *tale che l'equazione* (4.3) *con* $\lambda = \lambda'$ *ammetta una e una sola soluzione non nulla se e solo se* $\lambda' > \bar{\lambda}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo innanzitutto che esiste un $\lambda_\omega > 0$ tale che l'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda_\omega$ non ammetta alcuna soluzione non nulla. Infatti se $\lambda_\omega \sup_{x \in \boldsymbol{R}^2} \tilde{\eta}(x, 0) < 1$, ricordando che la funzione $\tilde{\eta}(x,\varrho)$ è decrescente in $\varrho \geqslant 0$, si vede immediatamente che l'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda_\omega$ non può ammettere soluzione non nulla.

Consideriamo ora l'insieme L' dei numeri positivi λ' tale che l'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda'$ ammetta una e una sola soluzione non nulla. In virtù delle proposizioni 5.2, 4.1, 4.2 l'insieme L' non è vuoto. Poniamo $\bar{\lambda} = \inf L'$. Per ciò che abbiamo osservato sopra, $\bar{\lambda}$ non può essere 0 e quindi si ha $\bar{\lambda} > 0$. In virtù della proposizione 5.1 e della definizione di L' l'equazione (4.3) ammette una e una sola soluzione per ogni $\lambda' > \bar{\lambda}$. Se esistesse una soluzione non nulla dell'equazione (4.3) con $\lambda = \bar{\lambda}$, allora per la proposizione 5.1 esisterebbe un $\lambda'' < \bar{\lambda}$ tale che l'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda''$ ammetta una e una sola soluzione non nulla, il che contraddice la definizione del numero $\bar{\lambda}$. Ne segue la tesi. ■

Ora dimostriamo la continuità della funzione $\Lambda(\lambda)$.

PROPOSIZIONE 5.4. *La funzione*

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \varrho_\lambda(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho_\lambda(x))\, dx - \beta\right), \tag{4.4}$$

è continua nell'intervallo $]\bar{\lambda}, \infty[$, *ove* $\bar{\lambda}$ *è il numero positivo ottenuto nella proposizione* 5.3.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $\lambda_d \in]\bar{\lambda}, \infty[$ sia un punto di discontinuità per la funzione $\Lambda(\lambda)$. Allora esistono $\varepsilon > 0$ e una successione $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ tali che $\lambda_k \to \lambda_d$ per $k \to \infty$ e che $|\Lambda(\lambda_k) - \Lambda(\lambda_d)| \geq \varepsilon$ per ogni $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$.

Sia ϱ_{λ_k} la soluzione dell'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda_k$. È facile constatare che la successione $\{\varrho_{\lambda_k}\}_{k=1}^\infty$ è un insieme limitato di $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$. Poiché come abbiamo osservato nell'osservazione 4.1 l'operatore non lineare $G(\cdot)$ è compatto, e dato che si ha

$$\frac{1}{\lambda_k}\varrho_{\lambda_k} = g * (\varrho_{\lambda_k}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_{\lambda_k}(\cdot))) = G(\varrho_{\lambda_k}),$$

la successione $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\varrho_{\lambda_k}\right\}_{k=1}^\infty$ risulta essere un insieme relativamente compatto in $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$. Quindi dalla successione $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\varrho_{\lambda_k}\right\}_{k=1}^\infty$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $\left\{\frac{1}{\lambda_{k_j}}\varrho_{\lambda_{k_j}}\right\}_{j=1}^\infty$ tale che

$$\frac{1}{\lambda_{k_j}}\varrho_{\lambda_{k_j}} \to \frac{1}{\lambda_d}\tilde{\varrho} \quad \text{per } j \to \infty;$$

in virtù di $\lambda_{k_j} \to \lambda_d$ si ha anche $\varrho_{\lambda_{k_j}} \to \tilde{\varrho}$ per $j \to \infty$.

Inoltre per il lemma 4.2 l'operatore $G(\cdot)$ è continuo in $C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$. Perciò si ha

$$\frac{1}{\lambda_d}\tilde{\varrho} = \lim_{j\to\infty}\frac{1}{\lambda_{k_j}}\varrho_{\lambda_{k_j}} = \lim_{j\to\infty} g * (\varrho_{\lambda_{k_j}}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho_{\lambda_{k_j}}(\cdot))) = g * (\tilde{\varrho}(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \tilde{\varrho}(\cdot))),$$

da cui segue che $\tilde{\varrho}$ è la soluzione dell'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda_d$.

D'altra parte, posto

$$\bar{\Lambda}(\varrho) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \varrho(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho(x))\, dx - \beta\right),$$

tenuto conto della condizione (2.9) (si veda anche (3.12)) si vede facilmente che la funzione $\bar{\Lambda}(\varrho)$ è continua in $\varrho \in C_b^+(\boldsymbol{R}^2)$. Pertanto dalla relazione $|\Lambda(\lambda_k) - \Lambda(\lambda_d)| \geq \varepsilon$ verificata per ogni $k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}$ segue che $|\overline{\Lambda}(\tilde{\varrho}) - \overline{\Lambda}(\varrho_{\lambda_d})| \geq \varepsilon$ e che quindi $\tilde{\varrho} \neq \varrho_{\lambda_d}$, il che contraddice l'unicità della soluzione non nulla dell'equazione (4.3) con $\lambda = \lambda_d$. Pertanto la funzione $\Lambda(\lambda)$ è continua nell'intervallo $]\overline{\lambda}, \infty[$. ■

Prima di concludere questa sezione osserviamo le seguenti proprietà della funzione $\Lambda(\lambda)$.

PROPOSIZIONE 5.5. *Poniamo*

$$\lambda^* = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\mathbb{R}^2} \psi^*(x)\, dx - \beta\right),$$

ove ψ^* *è la funzione definita dalla* (2.8). *Allora si ha* $\Lambda(\lambda) \leq \lambda^*$ *per ogni* $\lambda \in]\overline{\lambda}, \infty[$; *in particolare si ha* $\Lambda(\lambda^*) \leq \lambda^*$.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalla definizione di ψ^* (si veda anche la (3.12)) e della funzione $\Lambda(\lambda)$. ■

PROPOSIZIONE 5.6. *Si ha*

$$\lim_{\lambda \to \overline{\lambda}^+} \Lambda(\lambda) = -\frac{\nu}{\gamma}\beta, \tag{5.3}$$

ove $\overline{\lambda}$ *è il numero positivo ottenuto nella proposizione* 5.3.

DIMOSTRAZIONE. La definizione (4.4) della funzione $\Lambda(\lambda)$ e la positività di $\varrho_\lambda(x)$ implicano che $\Lambda(\lambda) > -\frac{\nu}{\gamma}\beta$ per ogni $\lambda > \overline{\lambda}$. Osservato ciò, supponiamo per assurdo che non valga la (5.3). Esisterebbero allora un numero positivo ε e una successione $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_k > \overline{\lambda})$ tali che

$$\lambda_k \to \overline{\lambda} \ \text{per} \ k \to \infty, \quad \Lambda(\lambda_k) \geq -\frac{\nu}{\gamma}\beta + \varepsilon \ \ \forall k \in \boldsymbol{N} \backslash \{0\}. \tag{5.4}$$

Dunque, come nella dimostrazione della proposizione 5.4, esisterebbero una funzione $\tilde{\varrho} \in C_b(\boldsymbol{R}^2)$ e una sottosuccessione $\{\lambda_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tali che

$$\frac{1}{\lambda_{k_j}} \varrho_{\lambda_{k_j}} \to \frac{1}{\overline{\lambda}} \tilde{\varrho} \quad \text{in} \quad C_b(\boldsymbol{R}^2) \quad \text{per} \quad j \to \infty. \tag{5.5}$$

Come nella dimostrazione della proposizione 5.4, la continuità dell'operatore $G(\cdot)$ implicherebbe che $\tilde{\varrho}$ sia una soluzione dell'equazione (4.3) con $\lambda = \overline{\lambda}$. D'altra parte la definizione (4.4) di $\Lambda(\lambda)$ e le relazioni (5.4) e (5.5) implicherebbero che almeno in una regione di misura positiva risulti $\tilde{\varrho}(x) > 0$, cioè $\tilde{\varrho}$ sarebbe una soluzione non nulla dell'equazione (4.3) con $\lambda = \bar{\lambda}$, il che contraddice la proposizione 5.3. Pertanto deve essere vera la (5.3). ■

6. Soluzioni del sistema di equazioni.

Ora dalle proposizioni dimostrate nella sezione 5 traiamo un criterio sull'esistenza di soluzioni non nulle dell'equazione (4.1). Per questo ci è comodo introdurre la funzione

$$M(\lambda) = \frac{\Lambda(\lambda)}{\lambda}, \quad \lambda > \bar{\lambda}, \tag{6.1}$$

ove $\bar{\lambda}$ è il numero positivo ottenuto nella proposizione 5.3.

PROPOSIZIONE 6.1. *i) Se* $\sup_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) < 1$, *allora non esiste alcuna soluzione non nulla dell'equazione* (4.1).

ii) Se $\sup_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) = 1$, *allora esiste almeno una soluzione non nulla dell'equazione* (4.1).

iii) Se $\sup_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) > 1$, *allora esistono almeno due soluzioni non nulle dell'equazione* (4.1).

DIMOSTRAZIONE. Si ricorda che, se $M(\lambda) = 1$, allora la soluzione $\varrho = \varrho_\lambda$ dell'equazione (4.3), di cui l'esistenza e l'unicità sono dimostrate nelle proposizioni 4.1 e 4.2, è soluzione dell'equazione (4.1). Si ricorda inoltre che per la proposizione 5.4 $\Lambda(\lambda)$ è continua in $]\bar{\lambda}, \infty[$ e quindi lo è anche $M(\lambda)$. D'altra parte in virtù della proposizione 5.6 si ha $\lim_{\lambda \to \bar{\lambda}^+} M(\lambda) = -\nu\beta/(\gamma\bar{\lambda}) < 0$, mentre in virtù della proposizione 5.5 per $\lambda > \lambda^*$ si ha $M(\lambda) \leqslant \lambda^*/\lambda < 1$. È evidente che da queste proprietà di $M(\lambda)$ segue la tesi della proposizione. ■

Ora possiamo formulare la conclusione del nostro studio.

TEOREMA 6.1. *Supponiamo che i coefficienti positivi (costanti)* α, β, γ, κ, ν *e le funzioni* $\varphi(\tau)$, $\mu(\tau, x)$ *verifichino le condizioni* (2.4), (2.5), (2.9), (2.10). *Sia* $M(\lambda)$ $(\lambda \in]\bar{\lambda}, \infty[)$ *la funzione definita nella* (6.1).

i) Se $\sup_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) < 1$, *allora il sistema di equazioni* (2.1)-(2.3) *am-*

mette una e una sola soluzione stazionaria, che è la soluzione nulla $P(s, t, x) = q(t-s, x) = 0$, $N(t) = N = 0$.

ii) Se $\sup\limits_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) = 1$, *allora il sistema di equazioni* (2.1)-(2.3) *ammette almeno due soluzioni stazionarie, più precisamente, la soluzione nulla ed almeno una soluzione stazionaria non nulla.*

iii) Se $\sup\limits_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) > 1$, *allora il sistema di equazioni* (2.1)-(2.3) *ammette almeno tre soluzioni stazionarie, più precisamente, la soluzione nulla ed almeno due soluzioni stazionarie non nulle.*

DIMOSTRAZIONE. Si ricorda che la trasformazione del problema effettuata nella § 3 ci permette di determinare, a partire da una soluzione ϱ dell'equazione (4.1), la funzione $q(\tau, x)$ e il numero N, che soddisfano alle equazioni (2.12)-(2.14), e che, se $(q(\tau, x), N)$ è una soluzione del sistema di equazioni (2.12)-(2.14), allora $P(s, t, x) = q(t-s, x)$, $N(t) = N$ costituiscono una soluzione stazionaria del sistema di equazioni (2.1)-(2.3). Si ricorda inoltre che in tutti i casi l'equazione (4.1) ammette la soluzione nulla $\varrho \equiv 0$, che ovviamente corrisponde alla soluzione nulla $(q(\cdot, \cdot) \equiv 0$, $N = 0)$ del sistema di equazioni (2.12)-(2.14) e quindi alla soluzione stazionaria nulla $(P(\cdot, \cdot, \cdot) \equiv 0$, $N(\cdot) \equiv 0)$ del sistema di equazioni (2.1)-(2.3). Ne segue la tesi. ■

Nelle impostazioni del nostro studio i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \nu$ e le funzioni $\varphi(\tau)$, $\mu(\tau, x)$ dovranno rappresentare le condizioni naturali. Ma, poiché il criterio dato nel teorema 6.1 dipende dalla definizione assai complessa della funzione $\Lambda(\lambda)$ (si vedano le (4.4), (6.1)), non è facile individuare le condizioni espresse direttamente dai coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \nu$ e delle funzioni $\varphi(\tau)$, $\mu(\tau, x)$ perché si verifichi il caso *i)* o *ii)* o *iii)* del teorema 6.1. A questo proposito merita citare una condizione sufficiente perché valga il caso *iii)* $\sup\limits_{\lambda > \bar{\lambda}} M(\lambda) > 1$.

OSSERVAZIONE 6.1. *Supponiamo che esistano un insieme misurabile* $\Omega \subset \boldsymbol{R}^2$ *e un numero positivo* p_1 *tali che, posto*

$$h_1 = \inf_{x \in \Omega} \eta(x, p_1), \qquad \delta = \inf_{x \in \Omega} g * \chi_\Omega(x), \qquad \varrho_1 = \inf_{x \in \Omega} \frac{p_1}{\xi(x, p_1)},$$

$$p_-(x) = \inf\{p \geqslant 0 \,|\, p/\xi(x, p) \geqslant \varrho_1\},$$

$$p^+(x) = \sup\{p \geqslant 0 \,|\, p/\xi(x, p) \leqslant g * \psi^*(x)/(\delta h_1)\},$$

$$D_1 = \{(x,\, p) \in \boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R} \,|\, x \in \Omega,\, p_-(x) \leqslant p \leqslant p^+(x)\}, \qquad \zeta = \inf_{(x,\, p) \in D_1} p \frac{\eta(x,\, p)}{\xi(x,\, p)},$$

si abbia

$$p_1 \frac{\eta(x,\, p_1)}{\xi(x,\, p_1)} \leqslant p \frac{\eta(x,\, p)}{\xi(x,\, p)} \quad \forall p \in [p_1,\, p^+(x)], \quad \forall x \in \Omega\,, \tag{6.2}$$

$$\frac{\nu \delta h_1}{\gamma}(\alpha \zeta |\Omega| - \beta) > 1\,, \tag{6.3}$$

ove $|\Omega|$ *è la misura dell'insieme* Ω. *Allora, posto* $\lambda = 1/(\delta h_1)$, *si ha* $\Lambda(\lambda) > \lambda$ *e si verifica il caso iii) del teorema* 6.1.

DIMOSTRAZIONE. Definiamo la funzione $\sigma(x)$ e l'insieme Γ per

$$\sigma(x) = \begin{cases} \varrho_1 & \text{per } x \in \overline{\Omega} \\ \varrho_1 - L^* \operatorname{dist}(x,\, \Omega) & \text{per } x \text{ tali che } 0 < \operatorname{dist}(x,\, \Omega) < \varrho_1/L^*, \\ 0 & \text{per } x \text{ tali che } \operatorname{dist}(x,\, \Omega) \geqslant \varrho_1/L^* \end{cases}$$

$$\Gamma = \{\varrho \in C(\boldsymbol{R}^2) \,|\, |\varrho(x) - \varrho(y)| \leqslant L^* |x - y|,\ \sigma(x) \leqslant \varrho(x) \leqslant \lambda g * \psi^*(x)\},$$

ove L^* è il numero definito nella (4.7) mentre $\lambda = 1/(\delta h_1)$.

Osserviamo innanzitutto che, se $\varrho \in \Gamma$, allora per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$\varrho(x)\, \tilde{\eta}(x,\, \varrho(x)) = p_x(\varrho(x)) \frac{\eta(x,\, p_x(\varrho(x)))}{\xi(x,\, p_x(\varrho(x)))} \geqslant \varrho_1 h_1,$$

ove $p_x(\cdot)$ è la funzione che a $\varrho \geqslant 0$ associa $p \geqslant 0$ tale che $p/\xi(x,\, p) = \varrho$. Infatti, se $p_-(x) \leqslant p_x(\varrho(x)) \leqslant p_1$, allora per la definizione di $p_-(x)$ si ha

$$p_x(\varrho(x))/\xi(x,\, p_x(\varrho(x))) \geqslant \varrho_1,$$

mentre per la decrescenza della funzione $\eta(x,\, p)$ in p si ha

$$\eta(x,\, p_x(\varrho(x))) \geqslant \eta(x,\, p_1) \geqslant h_1;$$

pertanto si ha

$$p_x(\varrho(x)) \frac{\eta(x,\, p_x(\varrho(x)))}{\xi(x,\, p_x(\varrho(x)))} \geqslant \varrho_1 h_1.$$

Se invece $p_1 \leqslant p_x(\varrho(x)) \leqslant p^+(x)$, allora dalla (6.2) segue immediatamente

$$p_x(\varrho(x)) \frac{\eta(x,\, p_x(\varrho(x)))}{\xi(x,\, p_x(\varrho(x)))} \geqslant p_1 \frac{\eta(x,\, p_1)}{\xi(x,\, p_1)} \geqslant \varrho_1 h_1.$$

Osservato ciò, in modo analogo alla proposizione 5.2 si constata che la funzione $\sigma(x)$ verifica l'ipotesi 4.1. Di conseguenza, in virtù delle proposizioni 4.1 e 4.2 esiste ed è unica la soluzione non nulla $\varrho = \varrho_\lambda$ dell'equazione

$$\varrho(x) = \lambda g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x) = \frac{1}{\delta h_1} g * (\varrho(\cdot)\, \tilde{\eta}(\cdot, \varrho(\cdot)))(x)$$

e $\varrho = \varrho_\lambda$ appartiene a Γ. L'appartenenza di ϱ_λ a Γ implica che per $x \in \Omega$ si ha

$$\varrho_\lambda(x)\, \tilde{\eta}(x, \varrho_\lambda(x)) = p_x(\varrho(x)) \frac{\eta(x, p_x(\varrho(x)))}{\xi(x, p_x(\varrho(x)))} \geqslant \zeta\,.$$

Ne segue che

$$\Lambda(\lambda) = \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\boldsymbol{R}^2} \varrho_\lambda(x)\, \eta(x, \varrho_\lambda(x))\, dx - \beta\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\nu}{\gamma}\left(\alpha \int_{\Omega} \zeta dx - \beta\right) = \frac{\nu}{\gamma}(\alpha\zeta |\Omega| - \beta)\,.$$

Pertanto, per la condizione (6.3) si ha $\Lambda(\lambda) > 1/(\delta h_1) = \lambda$, ossia $M(\lambda) > 1$. È verificato il caso *iii*) del teorema 6.1. ■

L'osservazione 6.1 ammette un'interpretazione secondo cui, se in una regione sufficientemente estesa la mortalità $\mu(\tau, x)$ di pino cembro è sufficientemente bassa, allora esistono soluzioni stazionarie non nulle del sistema di equazioni (2.1)-(2.3). Infatti, supponendo la regolarità e il comportamento biologicamente normale delle funzioni $\varphi(\tau)$ e $\mu(\tau, x)$, dalle definizioni (2.6)-(2.7) di $\xi(x, p)$ e $\eta(x, p)$ si vede facilmente che, se per un $x \in \boldsymbol{R}^2$ i valori di $\mu(\tau, x)$ $(\tau \in \boldsymbol{R}_+)$ sono piccoli, allora $\eta(x, p)$ e $p\eta(x, p)/\xi(x, p)$ sono più grandi. Inoltre, un'osservazione più accurata delle funzioni $\xi(x, p)$ e $\eta(x, p)$ ci consentirà di trovare un p_1 tale che valga la (6.2). La definizione di h_1 e di ζ riportata nell'osservazione 6.1 ci permetterà allora di capire che, se i valori di $\mu(\tau, x)$ per x appartenenti a una regione sufficientemente estesa sono sufficientemente piccoli (almeno per $\tau \in [0, \tau_1]$ con $\tau_1 > \tau_0$; per τ_0 si veda la (2.4)), allora sarà verificata l'ipotesi dell'osservazione 6.1 e quindi si troverà nella condizione del caso *iii*) del teorema 6.1. Va ricordato che la validità della disuguaglianza (6.3) dipende ovviamente anche dai coefficienti ν, α, β, γ che compaiono nelle equazioni (2.2)-(2.3).

Potremmo dunque concludere dicendo che, se le condizioni per le nocciolaie espresse da α, β, γ e il coefficiente di riproduzione ν di pino cembro mediante la disseminazione per mezzo di nocciolaie sono favorevoli e se in un territorio abbastanza esteso viene verificata una condizione naturale favorevole alla sopravvivenza di pino cembro e quindi una mortalità abbastanza bassa, allora esistono almeno due soluzioni stazionarie non nulle del sistema di equazioni (2.1)-(2.3), ossia due stati di equilibrio non nulli del sistema ecologico modellato dalle equazioni (2.1)-(2.3).

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Bellino: *La Nocciolaia ('Nucifraga caryocatactes') nel bosco dell'Alevé: selezione autunnale dell'habitat*, Univ. Torino, Tesi di laurea (Scienze Naturali), 1995-96.

[2] P. Debernardi - O. Dominici, *Nocciolaia*. In: *Atlante degli uccelli nidificanti in Piemonte e Valle d'Aosta* (ed. T. Mingozzi, G. Boano, C. Pulcher), Monografia VIII, Museo Regionale di Scienze Naturali, Torino, 1988, pp. 374-375.

[3] E. Dotta, *La foresta dell'Alévè (Alpi Cozie)*, Monti e Boschi, **5** (1988), pp. 11-14.

[4] *Enciclopedia Motta di scienze naturali: nel mondo della natura, Botanica*. F. Motta Ed., Milano, 1963, pp. 332-334.

[5] H. Fujita Yashima - S. Bianconi, *Modello integro-differenziale di un sistema ecologico e la sua stabilità: caso di pino cembro e nocciolaia nella loro interdipendenza*, in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl.

[6] M. Iannelli, *Mathematical theory of age-structured population dynamics*, Giardini Ed., Pisa, 1995.

[7] L. Kantorovitch - G. Akilov, *Analyse fonctionnelle, vol II* (traduit du russe), Mir, Mosca, 1981.

[8] M. A. Krasnosel'skij, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations* (translated from Russian), Pergamon Press, Oxford, 1964.

[9] V. Volterra, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 luglio 2003.