REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 109 (2003)

Addendum e corrigendum a «Automorfismi che fissano i centralizzanti di un gruppo».

ENRICO JABARA (*)

Nella nota [3] si è studiato l'insieme:

$$\Gamma(G) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \,|\, [g, g^{\varphi}] = 1 \quad \forall g \in G\}$$

degli automorfismi *commutanti* del gruppo G. Successivamente e indipendentemente sono comparsi altri lavori sullo stesso argomento ([1], [2]) che, oltre ad estendere alcuni risultati di [3], mostrano come l'enunciato della proposizione 1 di [3] non sia esatto e di conseguenza anche la dimostrazione della proposizione 2 non sia corretta. Scopo principale di questa nota è far vedere come tali errori non compromettono i risultati ottenuti in [3]. In particolare l'enunciato della proposizione 2 è effettivamente valido, così come la dimostrazione di una congettura di Zappa, ottenuta in [4] (che di tale proposizione fa uso in un punto cruciale).

In quanto segue con G denoteremo un gruppo e con φ un suo automorfismo; oltre alle notazioni standard ed a quelle introdotte in [3] si farà ricorso alle seguenti convenzioni:

- $R(G) = \{r \in G \,|\, [r, x, x] = 1 \quad \forall x \in G\}$ denota il sottoinsieme degli elementi 2-Engel a destra di G. In [5] Kappe ha provato che $R(G)$ è un sottogruppo caratteristico di G.

- Se $g \in G$ allora $\iota_g \in \mathrm{Inn}(G)$ denota l'automorfismo di G definito da $x^{\iota_g} = x^g = g^{-1}xg$ per ogni $x \in G$; in particolare $\iota = \iota_1$ è l'identità di $\mathrm{Aut}(G)$.

- $K(G)$ denota l'insieme dei K-automorfismi di G (nel senso di Kappe [6]): $\varphi \in K(G)$ se e solo se esiste un ricoprimento normale $\mathcal{K}$ di G costituito da sottogruppi abeliani e φ-invarianti.

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Informatica, Università «Ca' Foscari» di Venezia, Via Torino 155, 30172 Mestre, Venezia.

- $[\varphi] = \langle\varphi\rangle^{\mathrm{Inn}(G)} = [\mathrm{Inn}(G), \langle\varphi\rangle]\langle\varphi\rangle$.

In [2] l'insieme $\Gamma(G)$ viene denotato con $A(G)$ e l'insieme

$$\Gamma_0(G) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(G) \mid C_G(g)^\varphi = C_G(g) \ \ \forall g \in G\}$$

con $\mathrm{Cent}(G)$. Inoltre $R(G)$ in [1] è indicato con $R_2(G)$ e in [6] con $L(G)$.

La proposizione 1 di [3] va così riformulata:

PROPOSIZIONE 1′ (*di* [3]). *$\Gamma(G)$ è un sottoinsieme normale di* $\mathrm{Aut}(G)$ *e $\Gamma_0(G)$ è un sottogruppo normale di* $\mathrm{Aut}(G)$. *Si ha* $\mathrm{Aut}_c(G) \leqslant \Gamma_0(G) \leqslant \Gamma(G)$ *e gli elementi di $\Gamma(G)/\Gamma_0(G)$ hanno ordine* 2.

La dimostrazione è quella fornita in [3] (eccettuata la prima riga che contiene un errore di calcolo sui commutatori).

Con i prossimi due lemmi si richiamano, per comodità del lettore, alcuni risultati di [1].

LEMMA 1. *Se $\varphi \in \Gamma(G)$ allora:*

a) $[x^\varphi, y] = [x, y^\varphi]$ *per ogni* $x, y \in G$ ([7]);

b) $[x, \varphi] \in R(G)$ *per ogni* $x \in G$.

LEMMA 2. *Un automorfismo interno ι_g del gruppo G appartiene a $\Gamma(G)$ se e solo se $g \in R(G)$.*

LEMMA 3. *Per ogni $\varphi \in \Gamma(G)$ il sottogruppo $[\varphi]$ è contenuto in $\Gamma(G)$.*

DIMOSTRAZIONE. Dal lemma 1 *b*), ricordando che $R(G)$ è un sottogruppo caratteristico di G, discende $[G, \langle\varphi\rangle] \leqslant R(G)$. Detto $I_R = [\mathrm{Inn}(G), \langle\varphi\rangle]$, il lemma 2 porge $I_R \leqslant \Gamma(G)$ e se $\gamma \in I_R$ allora esiste $g \in R(G)$ tale che $\gamma = \iota_g$.

Per dimostrare che $[\varphi] = I_R\langle\varphi\rangle$ è contenuto in $\Gamma(G)$ basta dimostrare che $\gamma\psi \in \Gamma(G)$ per ogni $\gamma \in I_R$ e ogni $\psi \in \langle\varphi\rangle$. Poiché $\varphi \in \Gamma(G)$, dalla proposizione 1′ segue $\varphi\Gamma_0(G) \subseteq \Gamma(G)$ e quindi $\langle\varphi\rangle \leqslant \Gamma(G)$. Siccome esiste $r \in R(G)$ con $\gamma = \iota_r$, sfruttando il lemma 1 *a*) si ottiene

$$[x^{\gamma\psi}, x] = [(x^r)^\psi, x] = [x^r, x^\psi] = [x^{-1}x^r, x^\psi] = [[x, r], x^\psi] =$$

$$= [[x, r]^\psi, x] = [[x^\psi, r^\psi], x] = [[x, r^{\psi^2}], x] = 1 \quad \text{per ogni } x \in G$$

che porge la conclusione in quanto $R(G)$ è un sottogruppo caratteristico di G.

PROPOSIZIONE 2′ (di [3]). $\Gamma(G) = K(G)$.

La dimostrazione è quella fornita in [3] tranne nel fatto che, se $\varphi \in \Gamma(G)$, per far vedere che $\varphi \in K(G)$, il ricoprimento di G da considerare è

$$\mathcal{K} = \{\langle g \rangle^{[\varphi]} \,|\, g \in G\}.$$

Purtroppo non è possibile (come asserito in [3]) trovare un ricoprimento $\mathcal{K}$ di G che sia *universale*, indipendente cioè dall'elemento di $K(G)$ che si considera.

Anche la proposizione 3 di [3] va riformulata tenendo conto del fatto che è valida solamente se $\Gamma(G)$ è un gruppo. In particolare sussiste la

PROPOSIZIONE 3′ (*di* [3]). *Se Λ è un sottogruppo contenuto in $\Gamma(G)$ allora* $\Lambda' \leqslant \mathrm{Aut}_c(G)$; *in particolare* $\Gamma_0(G)/\mathrm{Aut}_c(G)$ *è abeliano.*

Curiosamente una conseguenza del lemma 2 di [3] continua a valere anche quando $\Gamma(G)$ non è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$. Si ha infatti:

PROPOSIZIONE 4′ (lemma 2 di [3]). $[G', \langle \Gamma(G) \rangle'] = 1$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\gamma \in \langle \Gamma(G) \rangle'$ e $g \in G'$; si deve far vedere che $g^\gamma = g$.

È sufficiente provare l'asserto quando γ è un commutatore: $\gamma = [\alpha, \beta]$ con $\alpha, \beta \in \langle \Gamma(G) \rangle$. Si procede per induzione su $m + n$ ove m (risp. n) è il minimo numero di elementi di $\Gamma(G)$ il cui prodotto fornisce α (risp. β).

Se $m = n = 1$, l'asserto è dato dal lemma 2.4. v) di [2].

Sia perciò $m > 1$ (il caso $n > 1$ è del tutto analogo); allora $\alpha = \varphi\alpha_0$ con $\varphi \in \Gamma(G)$ e α_0 prodotto di $m-1$ elementi di $\Gamma(G)$. La nota formula $[\alpha, \beta] = [\varphi\alpha_0, \beta] = [\varphi, \beta]^{\alpha_0}[\alpha_0, \beta]$, l'ipotesi induttiva e il fatto che G' è un sottogruppo caratteristico di G porgono quindi la conclusione.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. DEACONESCU - G. L. WALLS, *Right 2-Engel elements and commuting automorphisms of groups*, J. Algebra, **238** (2001), pp. 479-484.

[2] M. DEACONESCU - G. SILBERBERG - G. L. WALLS, *On commuting automorphisms of groups*, Archiv Math., **79** (2002), pp. 423-429.

[3] E. JABARA, *Automorfismi che fissano i centralizzanti di un gruppo*, Rend. Sem. Mat. Padova, **102** (1999), pp. 233-239.
[4] E. JABARA, *S-partizioni strette nei gruppi finiti*, Ric. Mat., **49** (2000), pp. 257-262.
[5] W. P. KAPPE, *Die A-Norm einer Gruppe*, Illinois J. Math., **5** (1961), pp. 187-197.
[6] W. P. KAPPE, *Automorphisms and abelian subgroups*, Symposia Math., **XVII** (1976), pp. 301-312.
[7] T. J. LAFFEY, *A trivial group automorphism (solution to problem E3039)*, Amer. Math. Montly, **93** (1986), pp. 816-817.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 febbraio 2003.