RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO JABARA

Gruppi di operatori che fissano un sottogruppo di Sylow

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 105 (2001), p. 77-85

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2001__105__77_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 105 (2001)

Gruppi di operatori che fissano un sottogruppo di Sylow.

ENRICO JABARA (*)

SUMMARY - Let be A and G finite groups and suppose that A acts on G. In this note we study groups G admitting a unique A-invariant Sylow p-subgroup for every $p \in \pi(G)$.

1. Introduzione.

Sia G un gruppo finito, un gruppo A di operatori su G verrà detto S-gruppo di operatori di G se per ogni $r \in \pi(G)$ esiste uno ed un solo r-sottogruppo di Sylow di G normalizzato da A. La definizione di S-gruppo di operatori, sempre associata alla condizione di coprimalità $(|G|, |A|) = 1$, è stata presa in considerazione indipendentemente da svariati autori (si vedano in particolare [6], [7], [1], [8]) soprattutto perché si presta molto bene a generalizzare il concetto di gruppo di automorfismi (di ordine coprimo con $|G|$) che agisce senza punti fissi non banali su G. È ovvio che se un gruppo G ammette il gruppo identico come S-gruppo di operatori allora G risulta nilpotente; così in [1] si dice che un gruppo G è A-nilpotente se esso ammette un S-gruppo di operatori A di ordine coprimo con $|G|$.

Scopo di questo lavoro è lo studio dei gruppi finiti dotati di un S-gruppo di operatori A che sia un p-gruppo (per qualche numero primo p) con p non necessariamente coprimo con $|G|$; seguendo [1] si dirà che tali gruppi sono A-p-nilpotenti. Ricorrendo ad alcuni risultati che utilizzano la

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica Applicata e Informatica, Università «Ca' Foscari» di Venezia, Via Torino 155, 31073 Mestre, Venezia.

classificazione dei gruppi semplici finiti si dimostrerà che un gruppo A-p-nilpotente è necessariamente p-nilpotente e risolubile. Si proverà inoltre che se $|A| = p^n$, e sono soddisfatte alcune condizioni su A, allora la lunghezza di Fitting di G non supera $n+2$; se poi A è ciclico, e sono soddisfatte alcune ulteriori condizioni su p e G, si proverà che la lunghezza di Fitting di G non supera $n+1$. Alcuni esempi mostreranno che tali limitazioni non si possono migliorare.

2. Notazioni e risultati preliminari.

Tutti i gruppi considerati in questo lavoro sono finiti; con G si indica un gruppo e con A un gruppo che agisce su G. Con p, q, r si indicano sempre numeri primi. Se A è un S-gruppo di operatori che è un p-gruppo si dice che A è un S-p-gruppo di operatori e che G è A-p-nilpotente. Se $A = \langle \alpha \rangle$ è un S-gruppo di operatori e $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, si dice che α è un S-automorfismo di G.

In quanto segue si considerano i seguenti sottoinsiemi di G (definiti induttivamente per ogni numero naturale i):

$$K_G^{(0)}(A) = \{1\} \qquad K_G^{(i+1)}(A) = \{g \in G \mid g^\alpha g^{-1} \in K_G^{(i)}(A) \ \ \forall \alpha \in A\}$$
$$K_G(A) = \cup K_G^{(i)}(A).$$

Se non esiste pericolo di equivoci tali insiemi sono denotati con $K^{(i)}$ e con K rispettivamente; è elementare la verifica che si tratta di insiemi A-invarianti di G.

Per ogni $\alpha \in A$ si considera la funzione $\delta_\alpha\colon G \to G \ g \mapsto g^\alpha g^{-1}$. Se i è un numero naturale e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \in A$ con $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)}(g)$ si indica $\delta_{\alpha_1}(\delta_{\alpha_2}(\ldots\delta_{\alpha_i}(g)\ldots))$; si ha $g \in K^{(i)}$ se e solo se $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)}(g) = 1$ per ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i) \in A^i$.

Infine se G è un gruppo e $r \in \pi(G)$ con $n_r(G)$ si indica il numero dei r-sottogruppi di Sylow contenuti in G.

Per il resto le notazioni sono quelle comunemente in uso (come, per esempio, in [3]).

OSSERVAZIONE 1. Dalla finitezza di $|G|$ discende che esiste un numero naturale t minimo per la proprietà $K^{(t)} = K^{(t+1)}$; si ha allora $K = K^{(t)}$. Se $(|G|, |A|) = 1$ allora $t = 1$ e $K = C_G(A)$.

LEMMA 1. Sia $\{G_r\}_{r \in \pi(G)}$ un insieme di sottogruppi di Sylow di G (uno per ogni divisore primo di $|G|$) e sia $N = \cap N_G(G_r)$. Allora N è un sottogruppo nilpotente di G.

DIM. Fissato $r \in \pi(N)$ sia N_r un r-sottogruppo di Sylow di N. Poiché G_r è l'unico r-sottogruppo di Sylow di $N_G(G_r)$ si ha $N_r \leqslant G_r$ e quindi $N_r \leqslant$ $\leqslant N \cap G_r$. D'altra parte $N \cap G_r$ è un r-sottogruppo di N e quindi, confrontando gli ordini, si ottiene $N_r = N \cap G_r$. Allora, per ogni $r \in \pi(N)$, N possiede come unico r-sottogruppo di Sylow $N \cap G_r$ e ciò dimostra che N è nilpotente. ■

LEMMA 2. Se A è un p-gruppo di operatori di G allora K contiene (almeno) un p-sottogruppo di Sylow di G.

DIM. Si consideri il prodotto semidiretto $\Gamma = GA$ con l'azione naturalmente indotta da A su G. Per i teoremi di Sylow in Γ esiste un p-sottogruppo di Sylow Γ_p contenente A. Allora, essendo $G \lhd \Gamma$, $G_p = G \cap \Gamma_p$ è un p-sottogruppo di Sylow di G che risulta A-invariante. Poiché Γ_p è nilpotente, esiste un numero naturale i tale che $[G_p, \underbrace{A, \ldots, A}_{i\,-\,volte}] = 1$.
Dunque $G_p \subseteq K^{(i)} \subseteq K$. ■

La dimostrazione del seguente lemma è elementare.

LEMMA 3. Se $H \leqslant G$ è A-invariante allora $K_H(A) = H \cap K$. ■

LEMMA 4). Se $H \trianglelefteq G$ è A-invariante allora $K_{G/H}(A) \subseteq \dfrac{KH}{H}$; se poi $H \subseteq K$ allora $K_{G/H}(A) = \dfrac{KH}{H}$.

DIM. La prima parte dell'asserto è evidente. Sia allora $H \subseteq K$ e sia $gH \in K_{G/H}(A)$; esiste perciò un numero naturale i tale che per ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i) \in A^i$ si ha $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)}(gH) = H$ ovvero $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)}(g) \in H$. Poiché $H \subseteq K$ esiste un numero naturale j tale che per ogni $h \in H$ e ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j) \in A^j$ si ha $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j)}(h) = 1$. Allora per ogni $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i+j}) \in A^{i+j}$ si ha $\delta_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i+j})}(g) = 1$ e $g \in K$. ■

In quanto segue se A è un S-gruppo di operatori di G con G_r si denota l'unico r-sottogruppo di Sylow di G che è A-invariante.

LEMMA 5. Se A è un S-gruppo di operatori di G allora $\langle K\rangle$ normalizza G_r per ogni $r \in \pi(G)$.

DIM. Fissato $r \in \pi(G)$ è sufficiente mostrare che gli elementi di $K^{(i)}$ normalizzano G_r per ogni $i \geq 0$. Si può procedere per induzione su i osservando che la base dell'induzione è banale. Sia allora $i > 0$ e $x \in K^{(i)}$, dunque per ogni $\alpha \in A$ è $x^\alpha x^{-1} \in K^{(i-1)}$ e, per l'ipotesi induttiva $G_r^{x^\alpha x^{-1}} = G_r$. Da ciò segue $G_r^x = G_r^{x^\alpha} = (G_r^x)^\alpha$ per ogni $\alpha \in A$ e G_r^x risulta essere un r-sottogruppo di Sylow A-invariante di G. L'ipotesi di unicità porge allora $G_r^x = G_r$. ∎

LEMMA 6. Se A è un S-gruppo di operatori di G allora $\langle K\rangle$ è nilpotente.

DIM. Segue immediatamente dai lemmi 5 e 1. ∎

LEMMA 7. Se A è un S-p-gruppo di operatori di G allora $K = \langle K\rangle$ e risulta $K = G_p \times O_{p'}(C_G(A))$.

DIM. Sia $H = \langle K\rangle$; per il lemma 2 è $G_p \subseteq K$ e G_p deve essere un p-sottogruppo di Sylow di H. Poiché H è, per il lemma 6, nilpotente si ha che G_p è un fattore diretto di H: $H = G_p \times H_{p'}$. Sia $r \in \pi(H)$, $r \neq p$; poiché H normalizza G_r (lemma 5) si può considerare il prodotto semidiretto $S = G_r H_{p'}$ che è certamente A-invariante. Poiché G_r è l'unico r-sottogruppo di Sylow A-invariante di G esso è anche l'unico di S e quindi $H_r = H \cap G_r$. Poiché $(r, p) = 1$ si ha $H_r = C_{G_r}(A) \subseteq K$. Ciò dimostra che $H_{p'}$ è prodotto diretto di $C_{G_r}(A)$ al variare di $r \in \pi(H) \setminus \{p\}$ e che tutti i sottogruppi di Sylow di H sono contenuti in K. Per dimostrare che $H \subseteq K$ basta ricordare che ogni elemento di H è prodotto delle sue r-componenti che tra loro commutano e ognuna delle quali appartiene al sottogruppo A-invariante $H_r \subseteq K$. Si conclude osservando che se $q, r \in \pi(H)$, $r \neq q \neq p$, $x \in H_q$ e $y \in H_r$ allora $[\langle x\rangle^A, \langle y\rangle^A] \leq [H_q, H_r] = 1$ e quindi per ogni $\alpha \in A$ si ha $\delta_\alpha(xy) = (xy)^\alpha (xy)^{-1} = x^\alpha x^{-1} y^\alpha y^{-1} = \delta_\alpha(x)\,\delta_\alpha(y)$ e $\delta_\alpha(x) = 1$ in quanto $q \neq p$. Allora $\delta_\alpha(xy) = \delta_\alpha(y) \in H_p \subseteq K$ e $xy \in K$. ∎

LEMMA 8. Sia G un gruppo dotato di un S-p-gruppo di operatori A. Se G contiene un p'-sottogruppo di Hall A-invariante T allora A induce su T un S-p-gruppo di operatori.

DIM. Per ogni $q \in \pi(T)$ esiste certamente un q-sottogruppo di Sylow di T che è A-invariante in quanto $(|T|, |A|) = 1$ e si può applicare il teorema 6.2.2 di [3]. T_q è l'unico q-sottogruppo di Sylow normalizzato da A perché T_q è anche un q-sottogruppo di Sylow di G. ∎

Se A è un S-p-gruppo di operatori di G si consideri il prodotto semidiretto $\Gamma = GA$ con l'azione indotta in maniera naturale da A su G. Sia poi $A^* = \Gamma_p = G_p A$. Con tali notazioni si può enunciare il:

LEMMA 9. A^* induce per coniugio su Γ un S-p-gruppo di operatori.

DIM. G_p è l'unico p-sottogruppo di Sylow di G normalizzato da A e quindi Γ_p è l'unico p-sottogruppo di Sylow di Γ normalizzato da A^*. Se $r \in \pi(\Gamma)$ con $r \neq p$ sia G_r l'unico r-sottogruppo di Sylow di G normalizzato da A. Per il lemma 5 G_r è normalizzato da K e quindi da G_p perché (lemma 2) $G_p \subseteq K$. Dunque G_r è normalizzato da A^* ed esso è evidentemente l'unico r-sottogruppo di Sylow di G che gode di tale proprietà in quanto $A \leqslant A^*$. Poiché $r \neq p$ e A è un p-gruppo $G_r = \Gamma_r$ risulta essere un r-sottogruppo di Sylow di Γ ed esso è l'unico a essere normalizzato da A^*. ∎

3. Risolubilità dei gruppi A-p-nilpotenti.

In questa parte si fa ricorso a due risultati che utilizzano la classificazione dei gruppi semplici finiti. Il primo è dovuto a A. Beltrán (teorema B di [1]):

(B) Se un gruppo G ammette un gruppo di operatori A con $(|G|, |A|) = 1$ e $C_G(A)$ nilpotente allora G è risolubile.

Il secondo è la dimostrazione, dovuta a N. Chigira (corollario 1 di [2]) della seguente congettura proposta da B. Huppert (e di una generalizzazione di essa):

(H) Un gruppo G è p-nilpotente se e solo se per ogni $r \in \pi(G)$ si ha:

i) $(n_r(G), p) = 1$;

ii) per ogni $r \in \pi(G)$ se R è un r-sottogruppo di Sylow di G allora $N_G(R)$ è p-nilpotente.

I risultati ottenuti in [2] permettono di dimostrare una forma più forte della congettura di Huppert:

LEMMA 10. Un gruppo G è p-nilpotente se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

i) per ogni $r \in \pi(G)$ si ha $(n_r(G), p) = 1$.

ii) se P è un p-sottogruppo di Sylow P di G allora $N_G(P)$ è p-nilpotente.

DIM. Per il teorema principale di [2] se G è un controesempio di ordine minimo all'asserto si deve avere $p = 3$ e $G \simeq U_3(q)$ con $q = 2^f$ e f numero pari non divisibile per 3. Si ha $3 \mid q - 1$ e se P è un 3-sottogruppo di Sylow di G allora (dalla dimostrazione del teorema 1 di [2]) $N_G(P) = C \times \times D$ dove C è un sottogruppo ciclico di ordine $q + 1$ e D un sottogruppo diedrale di ordine $2(q - 1)$. Quindi $N_G(P)$ non è 3-nilpotente, contro il punto ii) delle ipotesi. ■

TEOREMA 1. Se G è un gruppo A-p-nilpotente allora G è p-nilpotente e risolubile.

DIM. Sia $\Gamma = GA$ allora, per il lemma 8, $A^* = G_pA$ induce su Γ un S-p-gruppo di operatori. Per dimostrare che G è p-nilpotente è sufficiente far vedere che Γ è p-nilpotente (infatti un p-complemento normale di Γ è anche un p-complemento normale di G).

Dal lemma 5 discende che per ogni $r \in \pi(\Gamma)$ il sottogruppo $K_\Gamma(A^*)$ è contenuto in $N_\Gamma(\Gamma_r)$, per il lemma 2 si ha $\Gamma_p \leq K_\Gamma(A^*)$ e quindi p non divide $|\Gamma : N_\Gamma(\Gamma_r)|$; dunque $(n_r(\Gamma), p) = 1$ per ogni $r \in \pi(\Gamma)$. Se c è la classe di nilpotenza di Γ_p, allora è immediato constatare che $[N_\Gamma(\Gamma_p), \underbrace{\Gamma_p, \ldots, \Gamma_p}_{(c+1)-volte}] = 1$ da cui $[N_\Gamma(\Gamma_p), \underbrace{A^*, \ldots, A^*}_{(c+1)-volte}] = 1$ e quindi $N_\Gamma(\Gamma_p) \leq K_\Gamma(A^*)$. Per i lemmi 6 e 7 $K_\Gamma(A^*)$ è un sottogruppo nilpotente e quindi $N_\Gamma(\Gamma_p)$, essendo nilpotente, ammette un p-comlpemento normale. Si può allora applicare il lemma 10 e concludere che Γ ammette un p-complemento normale T (che è anche un p-complemento normale di G).

Per il lemma 8 A è un S-gruppo di operatori di T e $(|T|, |A|) = 1$ inoltre, per il lemma 6, $C_T(A)$ è nilpotente; si applica allora (B) per concludere che T è risolubile.

Dalla risolubilità di T discende immediatamente quella di G. ■

4. Struttura dei gruppi A-p-nilpotenti.

Sia W_p il prodotto intrecciato standard di due gruppi di ordine p. Un gruppo P si dice W_p-libero se non contiene sezioni isomorfe a W_p. Dato un p-gruppo A di operatori si consideri la seguente condizione:

(†) Se $p=2$ oppure se p è un primo di Mersenne allora A è W_p-libero.

Teorema 2. Sia G un gruppo A-p-nilpotente. Se $|A|=p^n$ e se la condizione (†) è soddisfatta allora la lunghezza di Fitting di G non supera $n+2$.

Dim Sia T il complemento normale e risolubile di G (teorema 1); per il lemma 8 A induce un S-p-gruppo di operatori su T. Utilizzando i risultati di [9] e il teorema di [5] come nella dimostrazione del teorema di [8] si può concludere che T ha lunghezza di Fitting al più $n+1$. Poiché G/T è nilpotente l'asserto è dimostrato. ■

Si osservi che dalla dimostrazione del teorema precedente discende che, sotto le stesse ipotesi, anche $\Gamma = GA$ ha lunghezza di Fitting al più $n+2$.

Lemma 11. Sia A un S-p-gruppo di operatori del gruppo G e sia H un p'-sottogruppo normale e A-invariante di G. Allora A induce su G/H un S-p-gruppo di operatori.

Dim. Posto $\overline{G} = G/H$ sia $r \in \pi(\overline{G})$ e $R = G_r$ l'unico r-sottogruppo di Sylow A-invariante di G. Allora HR/H è un r-sottogruppo di Sylow A-invariante di $\overline{G}$. Per dimostrare che è l'unico si ragiona per assurdo supponendo che HQ/H sia un r-sottogruppo di Sylow A-invariante di $\overline{G}$ distinto dal precedente.

Si ha $HR \neq HQ$ e si devono distinguere due casi:

I) $r \neq p$.

Poichè HR e HQ hanno ordine coprimo con p essi, per il teorema 6.2.2 di [3], contengono un r-sottogruppo di Sylow A-invariante. Tale sottogruppo è anche un r-sottogruppo di Sylow A-invariante di G che quindi deve coincidere con R. Dunque $R \leqslant HQ$ e $HQ = HR$: contraddizione.

II) $r = p$.

Allora, per il lemma 2, $K_{HR}(A)$ e $K_{HQ}(A)$ contengono un p-sottogruppo di Sylow rispettivamente di HR e HQ. Per il lemma 3 si ha $K_{HR}(A) = K \cap HR$ e $K_{HQ}(A) = K \cap HQ$. Ma K è un sottogruppo A-invariante nilpotente di G (lemma 6) e quindi contiene R come unico p-sottogruppo di Sylow. Dunque $R \leqslant HQ$ e $HQ = HR$: contraddizione. ■

Dato un gruppo G che ammette un S-p-gruppo di operatori di ordine p^n si consideri la seguente condizione:

(‡) a) se p è un numero primo di Fermat i 2-sottogruppi di Sylow di G sono abeliani.

b) se $p = 2$ tutti i q-suttogruppi di Sylow di G, con q numero primo di Mersenne e $q < 2^n$, sono abeliani.

Si può allora enunciare il

TEOREMA 3. Sia G un gruppo e α un suo S-automorfismo di ordine p^n. Se la condizione (‡) è soddisfatta allora la lunghezza di Fitting di G non supera $n+1$.

DIM. Sia T il p-complemento normale e risolubile di G (teorema 1). Allora, per il lemma 8, α induce su T un S-automorfismo di ordine (che divide) p^n. Poiché la condizione (‡) è certamente soddisfatta da T, il teorema 1 di [6] porge che la serie:

$$1 \leqslant [T, \alpha^{p^{n-1}}] \leqslant \ldots \leqslant [T, \alpha^{p^{n-i}}] \leqslant \ldots \leqslant [T, \alpha] \leqslant T$$

è una serie di T che è normale, α-invariante, a quozienti nilpotenti e di lunghezza al più $n+1$. Si verifica immediatamente che anche la serie

$$1 \leqslant [T, \alpha^{p^{n-1}}]^G \leqslant \ldots \leqslant [T, \alpha^{p^{n-i}}]^G \leqslant \ldots \leqslant [T, \alpha]^G \leqslant T$$

gode delle stesse proprietà. Su $T/[T, \alpha]^G$ l'automorfismo α induce l'identità. Posto $\overline{G} = G/[T, \alpha]^G$ si ha allora $K_{\overline{G}}(\alpha) = \overline{G}$. Per il lemma precedente α induce su $\overline{G}$ un S-automorfismo e quindi, per il lemma 6, $K_{\overline{G}}(\alpha)$ è nilpotente. Dunque G ammette una serie normale (A-invariante) a quozienti nilpotenti di lunghezza al più $n+1$. ■

Nell'esempio 1 dato in [6] si sono costruiti, per ogni numero primo p e ogni numero intero n, dei p'-gruppi di lunghezza di Fitting $n+1$ dotati di un S-automorfismo di ordine p^n (in tali esempi tutti i sottogruppi di Sylow di G sono abeliani). Quindi la limitazione fornita dal teorema 3 non è migliorabile.

Sia $q \geqslant 5$ un numero primo, V un gruppo abeliano elementare di ordine q^2, Q il gruppo dei quaternioni (di ordine 8) e $\langle\alpha\rangle$ un gruppo di ordine 3. Sia G il gruppo di Frobenius avente come nucleo V e come complemento il prodotto semidiretto $Q\langle\alpha\rangle \cong SL(2, 3)$. Si verifica che α induce sul prodotto semidiretto VQ un S-automorfismo di ordine 3 (si veda l'esempio 2 di [6]); per il lemma 9 α induce un S-automorfismo di ordine 3 su $\Gamma = G\langle\alpha\rangle$. Poiché Γ ha lunghezza di Fitting 3 tale esempio mostra che la limitazione fornita nel teorema 2 non e migliorabile, inoltre la condizione (‡) a) è essenziale per ottenere il teorema 3 (per gli altri numeri primi di Fermat si costruiscono esempi analoghi utilizzando il teorema 3.5.3. di [4]).

L'autore non è a conoscenza di esempi che mostrino che la condizione (‡) b) è necessaria per ottenere il teorema 3.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BELTRÁN, *Actions with nilpotent fixed point subgroup*, Arch. Math. (Basel), **69** (1997), pp. 177-184.

[2] N. CHIGIRA, *Number of Sylow subgroups and p-nilpotence of finite groups*, J. Algebra, **201** (1998), pp. 71-85.

[3] D. GORENSTEIN, *Finite Groups*, Harper & Row, New York (1968).

[4] P. HALL - G. HIGMAN, *On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside problem*, Proc. London Math. Soc., **6** (1956), pp. 1-42.

[5] B. HARGRAVES, *The existence of regular orbits for nilpotent groups*, J. Algebra, **72** (1981), pp. 54-100.

[6] E. JABARA, *Una generalizzazione degli automorfismi privi di coincidenze*, Rend. Acc. Naz. Sci. XL, **101** (1983), pp. 7-14.

[7] H. MATSUYAMA, *On finite groups admitting a coprime automorphism of prime order*, J. Algebra, **174** (1995), pp. 1-38.

[8] P. SHUMYATSKY, *Fitting height of A-nilpotent groups*, Rend. Sem. Mat. Padova, **104** (2000), in corso di pubblicazione.

[9] A. TURULL, *Supersolvable automorphism groups of solvable groups*, Math. Z., **183** (1983), pp. 47-73.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 ottobre 1999.