Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Emilie Pons

Modules différentiels non solubles. Rayons de convergence et indices

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 103 (2000), p. 21-45
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2000__103__21_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 103 (2000)

Modules différentiels non solubles. Rayons de convergence et Indices.

EMILIE PONS (*)

Introduction.

On considère un module différentiel p-adique à coefficients des fonctions analytiques sur une couronne $\{x \in K/|x| \in]r_1, r_2[\}$, $]r_1, r_2[\subset \mathbb{R}^{>0}$. Le but de cet article est d'étudier l'indice généralisé de ce module opérant sur l'espace des fonctions analytiques dans $D^-(0, r) = \{x \in K, |x| < r\}$, $r \in [r_1, r_2]$. Paul Young a démontré un théorème d'indice lorsque les rayons de convergence des solutions sont suffisamment petits (i.e. $< \pi \cdot r$) à t_r. Gilles Christol et Zoghman Mebkhout ont démontré un théorème d'indice pour le cas particulier des modules solubles à [CH-ME III]. Nous nous intéressons donc au seul cas non résolu, à savoir les modules différentiels à coefficients les éléments analytiques définis sur une couronne (sans condition de solubilité ou de petit rayon). Ainsi, nous démontrons tout d'abord, une conjecture de Bernard Dwork (Théorème 2.2) : la représentation graphique, en coordonnées logarithmiques, de la fonction rayon de convergence à t_r, $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$, est un polygone lorsque le module différentiel $\mathcal{M}$ est à coefficients des éléments analytiques sur une couronne $\{x \in K/|x| \in]r_1, r_2[\}$. Nous donnons ensuite un contre-exemple de ce résultat lorsque les coefficients ne sont plus des éléments analytiques mais plus généralement des fonctions analytiques sur $\{x \in \in K/|x| \in]r_1, r_2[\}$. Puis, nous démontrons un théorème de décomposition selon les variations des rayons de convergence (Théorème 3.2) de nos modules différentiels. Nous démontrons finalement un théorème d'indice local (Théorème 4.1) et un théorème d'indice global (Théorème 4.6) pour les modules considérés.

(*) Indirizzo dell'A.: REFCO, Trinity Tower, 9 Thomas More Street, London E1W 1YH. E-mail: emilie-pons@yaboo.com

Résumé.

Le premier paragraphe introduit les notations communes aux différentes parties de ce travail.

Le deuxième paragraphe est consacré à la démonstration d'une conjecture de Bernard Dwork (rédigée par Maurizio Caillotto) et dont l'énoncé est le suivant (Théorème 2.2) :
Si on considère un module différentiel $\mathcal{M}$ à coefficients les éléments analytiques sur une couronne ouverte $\{x \in K / |x| \in]r_1, r_2[\}$ et si le rayon de convergence des solutions de ce module différentiel au voisinage du point générique t_r de module $r \in]r_1, r_2[$ est noté $R(\mathcal{M}, r)$, alors la fonction $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$ a pour représentation graphique sur $[r_1, r_2]$, logarithmiquement, un polygone (c'est-à-dire qu'elle a un nombre fini de côtés, qu'elle est logarithmiquement affine par morceaux et qu'elle admet une limite finie quand $r \to r_1$ ou $r \to r_2$).

La démonstration de ce théorème s'appuie sur des résultats de Paul Young d'une part, et de Gilles Christol et Bernard Dwork d'autre part.

Un exemple (Exemple 2.5) montre qu'on ne peut pas espérer obtenir un tel résultat quand on considère les coefficients non plus dans les éléments analytiques mais dans les fonctions analytiques sur $\{x \in K / |x| \in]r_1, r_2[\}$.

L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que nous n'avons pas à faire d'hypothèses sur notre module différentiel. En effet, dans leur article Gilles Christol et Zoghman Mebkhout, en utilisant les pentes et la notion d'exposants, arrivent à un résultat similaire sur des modules différentiels à coefficients des fonctions analytiques mais leurs modules différentiels doivent être solubles au bord, c'est-à-dire $\lim_{\varrho \to r_2^-} R(\mathcal{M}, \varrho) = r_2$ (voir [CH-ME III]).

Le troisième paragraphe est consacré à la démonstration de la décomposition d'un module différentiel $\mathcal{M}$ à coefficients dans les éléments analytiques sur $\{x \in K / |x| \in]r_1, r_2[\}$ (Théorème 3.2). Soit M l'opérateur différentiel associé par le théorème du vecteur cyclique à notre module différentiel $\mathcal{M}$; alors pour tout intervalle $]\bar{r}_1, \bar{r}_2[\subseteq]r_1, r_2[$ il existe un intervalle $]r_1', r_2'[\subseteq]\bar{r}_1, \bar{r}_2[$ sur lequel la restriction de M comme module différentiel à coefficients dans les éléments analytiques sur $\{x \in K / |x| \in]r_1', r_2'[\}$ se décompose en $M = M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_l$ où chaque M_i est un opérateur différentiel dont les solutions ont toutes le même rayon de convergence en t_r, $\forall r \in]r_1', r_2'[$ et la représentation graphique de la fonc-

tion $r \mapsto R(M_i, r)$ pour $r \in]\bar{r}_1, \bar{r}_2[\subset \mathbb{R}$ est logarithmiquement un segment sur $]r_1', r_2'[$ (Théorème 3.2). La démonstration de ce théorème provient du théorème de décomposition de Bernard Dwork et Philippe Robba ([DW-RO]). Il complète ainsi les théorèmes de décomposition déjà existants ([RO], [DW-RO] et [Young]). Cette décomposition sera utile pour la démonstration du théorème de l'indice.

Le quatrième paragraphe énonce et démontre un théorème d'indice local pour des modules différentiels à coefficients des éléments analytiques sur une couronne $\{x \in K/|x| \in]r_1, r_2[\}$ (Théorème 4.1). Ainsi, on montre l'existence de l'indice généralisé sur les fonctions analytiques dans un disque $D(0, r_2') = \{x \in K/|x| < r_2'\}$ avec $r_2' \in]r_1, r_2[$. On remarque tout d'abord que la décomposition de Dwork et Robba ([DW-RO] § 6): $0 \to \mathcal{M}_{\mathrm{inj}} \to \mathcal{M} \to \mathcal{M}_{\mathrm{sol}} \to 0$ permet de restreindre notre étude aux modules injectifs, le cas des modules solubles étant déjà résolu dans [CH-ME III]. On s'aperçoit ensuite, qu'en appliquant les méthodes utilisées dans les paragraphes précédents, c'est-à-dire la descente par Frobenius (proposition 2.1) et le théorème de Young ([Young] 4.3) à la décomposition obtenue au paragraphe 3 (Théorème 3.2), on obtient une formule d'indice locale lorsque les solutions de notre module différentiel ne sont pas de rayon exactement $\pi^{1/p^h} \cdot r$ à t_r pour un certain h, $\forall r \in]r_1', r_2'[$. Cependant, ces techniques s'avèrent inefficaces quand on essaye de les appliquer aux modules différentiels dont les solutions sont de rayon exactement $\pi^{1/p^h} \cdot r$. Ainsi on obtient un théorème d'indice et la formule:

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(r_2')) = \sum_{i=0}^{l} \left(\frac{d \log (R(M_i, r_2'))^{n_i}}{d \log r} \right) - n$$

où les M_i sont définis par le théorème 3.2, lorsque notre module différentiel a ses solutions de rayon $\neq \pi^{1/p^h} \cdot r$ à t_r $\forall r \in]r_1', r_2'[\subset]r_1, r_2[$.

On énonce et démontre enfin un théorème d'indice global pour des modules différentiels à coefficients des éléments analytiques sur une couronne $\{x \in K/|x| \in]r_1, r_2[\}$. Ainsi, on étudie tout d'abord les propriétés de la fonction, definie pour $r \in \mathbb{R}$, $r \in]r_1, r_2[$, $H(r) = \max\limits_{(u_i) \text{ bases de solutions}} \left(\prod\limits_i \varrho(u_i)\right)$ (Lemme 4.2 et 4.4); avec $\varrho(u_i)$ qui dénote le rayon de convergence de la solution u_i en t_r. Cette fonction possède des propriétés remarquables qui sont liées aussi bien au calcul de l'indice qu'à la structure même du module. Cette fonction a été utilisée indirectement par Young et également par Christol-Mebkhout [CH-ME III].

On remarque ensuite que calculer l'indice sur les fonctions analytiques sur la couronne $\{x \in K / |x| \in]r_1, r_2[\}$, revient à le calculer sur les fonctions analytiques sur $D(0, r_2)$ et sur $D(\infty, r_1)$. Comme on sait de plus que : $\tilde{\chi}(M, \mathcal{A}(r_2')) = \lim_{n \to +\infty} \tilde{\chi}(M, \mathcal{A}(r_n))$ avec (r_n) une suite qui tend vers r_2', on construit une telle suite et on démontre une formule d'indice globale (Théorème 4.6) en utilisant l'indice local et les propriétés de $H(r)$:

$$\tilde{\chi}(M, \mathcal{A}(r_2)) = \sum_{i=0}^{l} \left(\frac{d \log H(r)}{d \log r} \right) \bigg|_{r_2} - n .$$

Malheureusement, n'arrivant pas à démontrer la continuité de $H(r)$ en r_2 lorsque le rayon des solutions est $\pi^{1/p^h} \cdot r$ et à expliciter l'indice dans le cas où les solutions sont exactement de rayon $\pi^{1/p^h} \cdot r$, on a une condition pour ce théorème d'indice.

1. Notations.

Dans ce court paragraphe, nous allons définir les notations communes aux différentes parties de ce travail. Les notations spécifiques à chaque paragraphe seront définies lors de leur utilisation.

Soit K un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle, muni d'une valeur absolue ultramétrique normalisée par $|p| = p^{-1}$ qui le rend complet.

1.1. *Valeur absolue et norme.*

On définit une valeur absolue pour tout $c \in K$ et $r \in \mathbb{R}^+$ de la manière suivante : Si $f \in K[x]$, $f = \sum_i a_i (x-c)^i$, alors $|f|_c(r) = \sup_i |a_i| r^i$.

On peut prolonger cette définition aux fonctions rationnelles $h = f/g$, $f, g \in K[x]$, en posant $|h|_c(r) = |f|_c(r) / |g|_c(r)$.

A partir de la valuation $|\ |_c(r)$ définie ci-dessus, on peut définir une norme sur les opérateurs linéaires qu'on note $\|\ \|_c(r)$. En particulier, la Norme de Gauss est $\|\ \|_0(1)$.

On considère maintenant l'extension Ω de K qui est complète et algébriquement close de telle sorte que t appartienne à Ω et que la valuation de Ω soit une extension de la valuation de $K(t)$.

On note :

$K^\circ = \{x \in K,\ |x| \leq 1\}$, l'anneau des entiers de K.
$K^{\circ\circ} = \{x \in K,\ |x| < 1\}$, l'idéal maximal de K°.

$\overline{K} = K^{\circ}/K^{\circ\circ}$, le corps des restes de K de caractéristique p, $p < \infty$.

$|\Omega^*| = \{|x|, x \in \Omega \backslash \{0\}\}$, le groupe multiplicatif des valeurs absolues de Ω^*.

$D^+(a, r) = \{x \in \Omega \mid |x-a| \leq r\}$, le disque «fermé» centré en $a \in \Omega$ de rayon r.

$D^-(a, r) = \{x \in \Omega \mid |x-a| < r\}$, le disque «ouvert» centré en $a \in \Omega$ de rayon r.

$\mathcal{C}_{]r_1, r_2[} = \{x / r_1 < |x| < r_2\}$ la couronne ouverte centrée en zéro.

1.2. *Point et disque générique.*

DÉFINITIONS. On dit que $t_r \in \Omega$ est un point générique de module r ($r \in \mathbb{R}_+^*$), si $|t_r| = r$ et $D^-(t_r, r) \cap K = \emptyset$. On appelle $D^-(t_r, r)$ le disque générique.

1.3. *Eléments et fonctions analytiques.*

Si A est un sous ensemble de $\boldsymbol{P}(\Omega)$, on définit: $\mathcal{R}_A =$ l'ensemble de tous les $f \in K(x)$ qui, comme fonction sur $\boldsymbol{P}(\Omega)$ n'ont pas de pôle sur A.

DÉFINITION. $f: A \rightarrow \Omega$ est un élément analytique sur A si c'est la limite uniforme sur A d'une suite dans $\mathcal{R}_A$.

Si A est une couronne ou un disque, on note:

$\mathcal{H}_A = \{$éléments analytiques sur A$\}$,

$\dot{\mathcal{H}}_A$ le corps des quotients de $\mathcal{H}_A$,

$\mathcal{A}_K(A) = \{$fonctions analytiques sur $A\} = \{$séries de Laurent à coefficients dans K qui convergent pour tout $x \in A\}$,

$\mathcal{M}_A = \{$éléments méromorphes sur $A\}$; le corps des quotients de $\mathcal{A}_K(A)$,

$\mathcal{R}_K(r) = \{$fonctions analytiques au bord$\}$

$$= \left\{ \sum_{i \in \boldsymbol{Z}} a_i X^i,\ \exists \varepsilon \lim_{|i| \to +\infty} |a_i| \cdot \varrho^i = 0 \text{ pour } r - \varepsilon < \varrho < r \right\}.$$

On note également $\mathcal{H}_K^\dagger(r)$ l'espace définit par la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_K(r) \rightarrow \mathcal{R}_K(r) \rightarrow \mathcal{H}_K^\dagger(r) \rightarrow 0 .$$

Pour simplifier les notations, on écrit :

$\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$, $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$, $\mathcal{M}_{]r_1, r_2[}$, pour $\mathcal{A}_K(\mathcal{C}_{]r_1, r_2[})$, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{]r_1, r_2[}}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_{]r_1, r_2[}}$ et $\mathcal{A}_K(r)$ pour $\mathcal{A}_K(D^-(0, r))$.

1.4. *Modules et opérateurs différentiels.*

On considère tout au long de ce travail un module différentiel $\mathcal{M}$ c'est-à-dire un $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ module (resp. $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ module) libre de rang n muni d'une connexion. On peut associer à ce module, un opérateur différentiel M par le théorème du vecteur cyclique :

$$M = q_0(x)\, D^n + q_1(x)\, D^{n-1} + \ldots + q_{n-1}(x)\, D + q_n(x)$$

avec les $q_i \in \mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ (resp. $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$). Quitte à réduire l'intervalle $]r_1, r_2[$ en $]r_1', r_2[$ et considérer les coefficients dans $\mathcal{A}_{]r_1', r_2[}$, on peut obtenir un opérateur unitaire.

Plus précisément, le théorème du vecteur cyclique donne :

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}_{]r_1, r_2[} = \mathcal{M}_{]r_1, r_2[}[D] / \mathcal{M}_{]r_1, r_2[}[D] \cdot M\,.$$

Pour chaque point dans $\{x \in \Omega,\ |x| \in]r_1, r_2[\}$, on définit également un polynôme $\Delta_x(M)$ par : $\Delta_x(M)(\lambda) = q_0(x)\,\lambda^n + \ldots + q_{n-1}(x)\,\lambda + q_n(x)$. Au point t_r, générique de module r, le polynôme $\Delta_{t_r}(M) \in \Omega[\lambda]$ correspond aux notations de [Young].

De plus, si on choisit une base de $\mathcal{M}$, on peut lui associer la matrice G de dérivation à coefficients dans $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ (resp. $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$). On définit alors les matrices de dérivation supérieures par les formules suivantes :
$G_0 = I$ et $G_{s+1} = G_s' + G_s \cdot G$.

Remarque. Dans tous les paragraphes qui suivent, les modules différentiels seront notés avec des lettres calligraphiques ($\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{H}, \ldots$) alors que leur opérateur différentiel associé par le théorème du vecteur cyclique sera noté avec la lettre correspondante en majuscule ($L, M, H, \ldots$).

1.5. *Rayon de convergence.*

Le rayon de convergence des solutions du module (resp. opérateur) différentiel $\mathcal{M}$ (resp. M) au voisinage du point générique t_r de module $r, \in]r_1, r_2[$ est donné par la formule :

$$R(\mathcal{M}, r) = \min\left(\lim \inf_{s \to +\infty} \left\| \frac{G_s}{s!} \right\|_0^{-1/s}(r),\ r\right).$$

On remarque que ce rayon est indépendant de la base choisie. On peut en particulier, prendre une base cyclique.

On dit qu'un module différentiel $\mathcal{M}$ à coefficients dans $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ est soluble en $r \in]r_1, r_2[$ si $\lim_{\varrho \to r} R(\mathcal{M}, \varrho) = r$. On peut définir la solubilité en r_2 (resp. r_1) : on prendra la limite à gauche (resp. à droite).

DÉFINITION. Soit M un opérateur différentiel sur $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$ et soit u une solution dans $\Omega[\![x - t_r]\!]$ au voisinage d'un point générique t_r ; on note $\varrho_r(u)$ le rayon de convergence de u à t_r. On pose alors :

$$\varrho(\mathcal{M}, r) = \sup_{(u_i) \text{ base de sol à } t_r} (\varrho_r(u_1) \cdot \ldots \cdot \varrho_r(u_n)) .$$

Ce sup est en fait un max ([Young] 4.2 ou [RO 1] § 2) et une base qui atteint ce max est appelée base optimale pour le noyau de M en t_r.

1.6. *Antécédent de Frobenius.*

On dit que $\mathcal{N}$, module différentiel sur $\mathcal{H}_{]r_1^p, r_2^p[}$ est un antécédent de Frobenius de $\mathcal{M}$, module différentiel sur $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ si :

$$\phi^* \mathcal{N} = \mathcal{M}$$

où ϕ est la transformation de Frobenius définie de $]r_1, r_2[$ dans $]r_1^p, r_2^p[$ et qui à x associe x^p.

1.7. *Divers.*

On définit le Domaine de Young en r : $\{x \in \mathbb{R}^+ / x < |p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r\}$.

DÉFINITION. On dit que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ a logarithmiquement une propriété si $\log \circ f \circ \exp$ a cette propriété.

On peut définir le polygone de convergence comme étant le graphe de la fonction $r \mapsto \log R(\mathcal{M}, r)$.

On note $E_{c,r}$ le complété pour la norme définie précédemment de $K(x)$, et $\mathcal{R}_{c,r} = E_{c,r}[D]$ (Notations définies par Robba dans [RO 1]). On rappelle également que $\left\| \frac{d}{dx} \right\|_0 (r) = \frac{1}{r}$, norme comme opérateur sur $E_{0,r}$.

2. Polygone de convergence d'un module différentiel p-adique.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration d'une conjecture faite par Bernard Dwork. Nous allons en effet démontrer que le polygone de convergence d'un module différentiel libre sur $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ de rang n est effectivement un polygone. Nous donnerons ensuite un exemple afin de montrer que nous ne pouvons pas espérer obtenir un tel résultat si les coefficients sont pris non plus dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ mais dans $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$.

La proposition 2.1 a pour but de calculer le rayon de convergence d'un module différentiel de rang n et pour cela, elle utilise l'antécédent de Frobenius afin de se ramener dans le Domaine de Young. Elle nous sera également utile pour calculer l'indice d'un module différentiel dans le paragraphe 4 (Théorème 4.1).

PROPOSITION 2.1. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel de rang n défini sur $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$. Supposons que pour chaque $r \in]r_1, r_2[$, $R(\mathcal{M}, r) \neq |p|^{\frac{1}{(p-1)\cdot p^l}} \cdot r$, avec $l \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un unique h et un unique antécédent de Frobenius d'ordre h, $\mathcal{N}_h$ méromorphe sur $\mathcal{H}_{]r_1^{p^h}, r_2^{p^h}[}$ tel que: $\forall r \in]r_1, r_2[$, $R(\mathcal{M}, r)^{p^h} = R(\mathcal{N}_h, r^{p^h})$ et $R(\mathcal{N}_h, r^{p^h})$ soit dans le Domaine de Young $\forall r^{p^h} \in]r_1^{p^h}, r_2^{p^h}[$.*

DÉMONSTRATION. On suppose qu'il existe $h > 0$ tel que $|p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r > R(\mathcal{M}, r) > |p|^{\frac{1}{(p-1)p^{h-1}}} \cdot r$.

D'après [CH-DW] 5.2 et 5.4, on peut appliquer l'antécédent de Frobenius à notre module différentiel $\mathcal{M}$ et obtenir un antécédent $\mathcal{N}_1$ holomorphe. En réitérant le procédé $h-1$ fois, on obtient un antécédent holomorphe $\mathcal{N}_{h-1}$ tel que

$$|p|^{\frac{1}{(p-1)p}} \cdot r^{p^{h-1}} > R(\mathcal{N}_{h-1}, r^{p^{h-1}}) > |p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r^{p^{h-1}}.$$

On distingue alors deux cas:

Premier cas: $|p|^{\frac{1}{(p-1)p}} \cdot r^{p^{h-1}} > R(\mathcal{N}_{h-1}, r^{p^{h-1}}) > |p|^{\frac{1}{p}} \cdot r^{p^{h-1}}$.

On a alors $R(\mathcal{N}_h, r^{p^h}) < |p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r^{p^h}$ et $\mathcal{N}_h$ est holomorphe. Nous sommes dans le Domaine de Young.

Deuxième cas: $|p|^{\frac{1}{p}} \cdot r^{p^{h-1}} \geqslant R(\mathcal{N}_{h-1}, r^{p^{h-1}}) > |p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r^{p^{h-1}}$.

On applique alors [CH-DW] 4.3 et on obtient l'existence d'un antécédent méromorphe et donc une nouvelle itération. Nous sommes alors dans le Domaine de Young.

On a alors dans les deux cas $R(\mathcal{N}_h, r^{p^h}) < |p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r$ et on a $R(\mathcal{M}, r)^{p^h} = R(\mathcal{N}_h, r^{p^h})$.

On sait de plus que $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$ est une fonction continue d'après [CH-DW] 2.3, donc il existe h tel que

$$|p|^{\frac{1}{(p-1)p^{h-1}}} \cdot r < R(\mathcal{M}, r) < |p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r, \quad \forall r \in]r_1, r_2[.$$

En utilisant l'existence globale d'un antécédent d'après [CH-DW] 4.3, 5.2 et 5.4, on termine la démonstration. ■

Le théorème suivant démontre la conjecture de Bernard DWORK anoncée dans l'introduction.

THÉORÈME 2.2. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel de rang n défini sur $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ alors : $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$ est logarithmiquement affine par morceaux sur $[r_1, r_2]$, logarithmiquement concave et admet une limite finie quand $r \to r_2$.* Cela revient à dire que le polygone de convergence est un polygone dans le cas des éléments analytiques (conjecture de B. Dwork). *De plus ce polygone possède un nombre fini de côtés.*

REMARQUE. Le cas des modules différentiels solubles en r_2 est traité dans [CH-ME III]. Le résultat est alors également valable pour les modules dont les coefficients sont des fonctions analytiques sur $[r_1, r_2[$. Par conséquent, nous ne nous intéressons qu'au cas des modules non solubles en r_1 ou r_2.

DÉMONSTRATION.

Premier cas : Si on est dans le domaine de Young alors il existe d'après [Young] 3.1, une racine $\lambda(r)$ de $\Delta_{t_r}(M)$ telle que :

$$\log R(\mathcal{M}, r) = \frac{1}{p-1} + \log |\lambda(r)| \tag{2.1}$$

avec $\lambda(r)$ qui est la plus grande racine de $\Delta_{t_r}(M)$. Si $\lambda(r)$ est racine de $\Delta_{t_r}(M)$, il existe i, j entiers naturels tels que :

$$|q_i(t_r)| \cdot |\lambda(r)^i| = |q_j(t_r)| \cdot |\lambda(r)^j|.$$

Supposons que $i > j$. On peut donc écrire :

$$|\lambda(r)| = |q_i(t_r)/q_j(t_r)|^{1/(j-i)} = |q_i/q_j|_0^{1/(j-i)}(r)$$

car q_i, q_j sont des éléments analytiques. Or comme $|\sum_n a_n x^n|(r) =$

$= \max_n |a_n| r^n$, on a : $|q_i/q_j|(r) = Kr^a$ $a \in \mathbb{Z}$ et $|\lambda(r)| = K \cdot r^{a/(j-i)} =$
$= K' r^{a/(j-i)} = K' \cdot r^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{Z}/\mu!$.

D'après la formule (2.1), on a donc : $R(\mathcal{M}, r) = p^{\frac{1}{p-1}} \cdot |\lambda(r)| = p^{\frac{1}{p-1}} \cdot$
$\cdot K' \cdot r^\beta = K'' \cdot r^\beta$ avec $K'' = p^{\frac{1}{p-1}} K$.

D'après [CH-DW] 2.3 et 2.5, la fonction $r \mapsto R(\mathcal{M}, r)$ est continue et concave sur $[r_1, r_2]$. On sait de plus d'après [CH-RO] 5.4.9 que les fonctions $|q_i/q_j|(r)$ sont logarithmiquement continues et concaves sur $[r_1, r_2]$ pour chaque i et chaque j, donc : $|\lambda(r)| = \max_{i,j} |q_i/q_j|_0^{1/(j-i)}(r)$ est aussi continue. De plus $\forall r \in [r_1, r_2]$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \varrho \in [r - \varepsilon, r]$, $|q_i/q_j|_0(\varrho) =$ $= K.\ \varrho^a$ et, comme $i \leq n, j \leq n$, $i - j$ est fini. Par conséquent $|\lambda(r)|$ est affine sur $[r - \varepsilon, r]$ et continue sur $[r_1, r_2]$; $|\lambda(r)|$ est donc logarithmiquement affine par morceaux et concave (2.1) sur $[r_1, r_2]$. On peut aussi conclure que ce polygone possède un nombre fini de côtés puisque sur chaque $[r_1', r_2'] \subset]r_1, r_2[$ le nombre de zéros d'un élément analytique est fini ([CH-RO] 5),

$$\frac{d \log |\lambda(r)|}{d \log r} = \max_{i,j} \left(\frac{d \log |q_i|_0(r)}{d \log r} - \frac{d \log |q_j|_0(r)}{d \log r} \right)$$

n'a qu'un nombre fini de valeurs et [CH-RO] 5.4.9 nous permet de conclure.

Deuxième cas : $\forall r \in]r_1, r_2[$, $R(\mathcal{M}, r) \leq r$ avec $R(\mathcal{M}, r) \neq |p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot$
$\cdot r$, $\forall h \in \mathbb{N}$.

On peut alors appliquer à $R(\mathcal{M}, r)$ la proposition 2.1 ; on obtient donc un module différentiel $\mathcal{N}_h$, h-ième antécédent de Frobenius de $\mathcal{M}$ tel que : $\forall r \in]r_1, r_2[$, $R(\mathcal{N}_h, r) < |p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r$ (i.e. dans le Domaine de Young) et on peut alors recommencer le même raisonnement que dans le premier cas avec $\mathcal{N}_h$.

Comme $R(\mathcal{M}, r)^{p^h} = R(\mathcal{N}_h, r^{p^h})$, on en déduit le résultat pour $\mathcal{M}$.

Troisième cas : $\exists r \in]r_1, r_2[$, tel que $R(\mathcal{M}, r) = |p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r$.

3*a*) $\forall \varrho \in]r_1, r_2[$, on a $R(\mathcal{M}, \varrho) = |p|^{\frac{1}{(p-1)\cdot p^h}} \cdot \varrho$. La fonction $\varrho \mapsto R(\mathcal{M}, \varrho) = K\varrho$ est donc logarithmiquement affine, continue et concave sur $]r_1, r_2[$.

3*b*) $\varrho \in]r_1, r_2[$ avec $R(\mathcal{M}, \varrho) = |p|^{\frac{1}{(p-1)\cdot p^h}} \cdot \varrho$, $h \in \mathbb{N}$, pour un ensemble discret I de ϱ. Elle est logarithmiquement affine par morceaux sur $]r_1, r_2[\setminus I$. De plus, [CH-RO] 9.2.4 montre que la fonction

$\varrho \mapsto R(\mathcal{M}, \varrho)$ est continue sur $[r_1, r_2]$. Par conséquent, elle est logarithmiquement affine par morceaux sur $]r_1, r_2[$ et logarithmiquement concave (d'après [CH-DW] 2.3) sur $]r_1, r_2[$.

3c) $\exists r_1', r_2'$ tels que $R(\mathcal{M}, \varrho) = |p|^{\frac{1}{(p-1)\cdot p^h}} \cdot \varrho$ et $\forall \varrho \in]r_1', r_2'[\subseteq$ $\subseteq]r_1, r_2[$. La fonction $\varrho \mapsto R(\mathcal{M}, \varrho)$ s'écrit $K\varrho$ (avec $K = |p|^{\frac{1}{(p-1)\cdot p^h}}$). Donc elle est logarithmiquement affine sur $]r_1', r_2'[$. De plus, comme elle est continue d'après [CH-RO] 9.2.4, sur $[r_1, r_2]$ et logarithmiquement concave sur $]r_1, r_2[$ d'après [CH-DW] 2.3, elle est continue en r_1' et en r_2' et logarithmiquement concave sur $]r_1', r_2'[$. Elle est logarithmiquement affine par morceaux sur $]r_1, r_2[\setminus]r_1', r_2'[$ d'après le premier ou le deuxième cas. Par conséquent elle est logarithmiquement affine par morceaux, continue et concave sur $]r_1, r_2[$.

2.1. *Limite logarithmiquement finie quand* $r \to r_2$.

D'après [CH-DW] 2.5, on trouve que $\lim_{r \to r_2} \varrho(r) = \varrho(r_2)$. Il reste à vérifier que $\varrho(r_2) \neq 0$. Or, $\forall r \in [r_1, r_2]$, on a défini une valeur absolue sur $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$. On a $|f| = |f(t_r)|$.

Pour d/dx, alors $\|d/dx\|_0(r) = 1/r$ comme opérateur linéaire sur $\mathcal{A}_{]r_1, r_2[}$. En particulier $\|d/dx\|_0(r_2) = 1/r_2$. On considère maintenant $d/dx - G$, avec $G \in \mathcal{M}_n(\mathcal{H}_{]r_1, r_2[})$. Si on pose $G = (g_{ij})_{i,j}$, on a $|G(t_r)| =$ $= \sup_{i,j} |g_{ij}(t_r)|$. On peut considérer la solution au point t_{r_2} qui s'écrit formellement $\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{G_s(t_{r_2})}{s!} \cdot (x - t_{r_2})^s$, avec $(d^s/dx^s) \cdot Y = G_s \cdot Y$, si Y est solution de l'équation différentielle. En particulier $G_s \in \mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$, $G_s =$ $= (d/dx)\, G_{s-1} + G_{s-1} \cdot G$ (c.f. [DW-GE-SU] chap. III § 5). On a donc $\|G_s(t_{r_2})\| \leq \max((1/r_2), |G(t_{r_2})|)^s$.

Par conséquent $\sum_{s=0} \frac{G_s(t_{r_2})}{s!} \cdot (x - t_{r_2})^s$ a un rayon de convergence $\varrho(r_2) \neq 0$.

On peut faire un raisonnement analogue pour r_1.

2.2. *Nombre fini de côtés du polygone.*

Pour cela démontrons le lemme suivant :

LEMME 2.3. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel de rang n non soluble en r_2 défini sur $\mathcal{H}_{]r_2 - \varepsilon, r_2[)}$. On suppose que $\lim_{\varrho \to r_2^-} R(\mathcal{M}, |\,|_\varrho) = \varrho_1 < r_2$. Alors, ou bien il existe un $\varepsilon_1 < \varepsilon$ et un entier naturel h tels que $\forall \varrho \in$*

$\in]r_2-\varepsilon_1, r_2[, R(\mathcal{M}, |\;|_\varrho) = p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^h}}\cdot\varrho$, *ou bien il existe un* $\varepsilon_2 < \varepsilon$ *tel que le module* $\mathcal{M}$ *admette dans la couronne* $]r_2-\varepsilon_2, r_2[$ *un antécédent méromorphe de Frobenius qui soit dans le Domaine de Young.*

DÉMONSTRATION. On va étudier l'application $R(\mathcal{M}, \varrho)$ logarithmiquement, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{rcl}]log\,(r_2-\varepsilon), log\, r_2[& \to & \mathbb{R} \\ \log r & \mapsto & \log R(\mathcal{M}, r)\,. \end{array}$$

Quand le rayon de convergence vérifie la condition de Robba, c'est-à-dire quand

$$R(\mathcal{M}, \varrho) = \varrho, \quad \forall \varrho \in]r_2-\varepsilon, r_2[$$

alors le polygone de convergence est un segment S_1 qui se situe sur la partie négative de la première bissectrice.

Comme nous ne sommes pas dans la condition de Robba, le graphe de la fonction $\log r \mapsto \log R(\mathcal{M}, r)$ est en dessous de S_1 et est concave d'après ce que nous avons démontré au 1..

Comme nous l'avons montré au 2., $\lim R(\mathcal{M}, \varrho)$ est finie quand $\varrho \to \to r_2^-$, et donc on peut écrire : $\lim\limits_{\varrho\to r_2^-} R(\mathcal{M}, \varrho) = \varrho_1$.

On va maintenant étudier logarithmiquement les fonctions $\varrho \mapsto \mapsto p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}}\cdot\varrho$ avec $\varrho \in]r_2-\varepsilon, r_2[$.

Elles s'écrivent pour $x \in]log(r_2-\varepsilon), log r_2[: f_m(x) = -\dfrac{1}{(p-1)\cdot p^m} + +x,\ m \in \mathbb{N}$.

Elles sont toutes parallèles à S_1. Et quand $h \to +\infty$, elles en sont de plus en plus proche. S_1 est une droite d'accumulation pour les $f_m(x)$. Nous allons maintenant montrer qu'il existe un $\varepsilon_2 > 0$ tel que $\forall \varrho \in]r_2-\varepsilon_2, r_2[$, $R(\mathcal{M}, \varrho) \neq p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}}\cdot\varrho,\ \forall m \in \mathbb{N}$.

On a deux cas de figures :

Soit il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\varrho_1 = p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^{m_0}}}\cdot\varrho$ et alors comme $\varrho_1 < < r_2$ nous ne sommes pas sur S_1 et par conséquent, comme $R(\mathcal{M}, \varrho) \neq \neq p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}}\cdot\varrho,\ \forall m \in \mathbb{N}$, il existe un intervalle $]r_2-\varepsilon_2, r_2[$ dans lequel $R(\mathcal{M}, \varrho) \neq p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}}\cdot\varrho,\ \forall m \in \mathbb{N}$.

Soit $\varrho_1 \neq p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}}\cdot\varrho,\ \forall m \in \mathbb{N}$ et par conséquent il existe un intervalle $]r_2-\varepsilon_2, r_2[$ dans lequel $R(\mathcal{M}, \varrho) \neq p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}}\cdot\varrho,\ \forall m \in \mathbb{N}$.

Dans les deux cas, on peut conclure qu'il existe ε_2 tel que:

$\forall \varrho \in]r_2 - \varepsilon_2, r_2[$, $R(\mathcal{M}, \varrho)$ est tel que: $p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^m}} \cdot \varrho < R(\mathcal{M}, \varrho) < $
$< p^{-\frac{1}{(p-1)\cdot p^{m+1}}} \cdot \varrho$. ■

Donc, d'après [CH-DW] 4.3, il existe un antécédent $\mathcal{N}_h$ global méromorphe sur $]r - \varepsilon_2, r[$ qui soit dans le domaine de Young. On applique alors le «Premier cas» de la démonstration en remarquant que (2.1) est valable pour $[r - \varepsilon_2, r]$. ■

Nous allons maintenant donner un exemple afin de montrer que si les coefficients de l'opérateur différentiel sont des fonctions analytiques, alors le polygone de convergence n'est plus nécessairement un polygone. En effet, la limite quand $r \to r_2$ n'est pas finie (Elle peut même ne pas exister).

EXEMPLE 2.4. Considérons l'équation différentielle suivante:

$$Y' - log(1 - X) \cdot Y = 0$$

Nous voulons calculer $R(\mathcal{M}, r)$ pour $r < 1$. avec $M = D - (X + (X^2/2) + $
$+ (X^3/3) + \ldots)$.

D'après Young, nous posons $\Delta_{t_r}(\lambda(r)) = \lambda(r) - (t + (t^2/2) + (t^3/3) + \ldots)$.

Après calculs, on a: $\lim_{r \to 1^-} |\lambda(r)| = +\infty$.

Si maintenant, nous appliquons [Young] 3.1, on a $|\lambda(r)| > 1/r$, pour r suffisamment proche de 1 et ainsi nous sommes dans le cas (i) de [Young] 3.1 et donc le rayon de convergence est donné par la formule : $R(\mathcal{M}, r) =$
$= p^{-\frac{1}{(p-1)}} \cdot |\lambda(r)|^{-1}$. Par conséquent, la limite de $\log R(\mathcal{M}, r)$ est $-\infty$.

3. Décomposition selon les variations du rayon de convergence.

Soit M un opérateur différentiel de rang n à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$. Si $]r_1', r_2'[\subseteq]r_1, r_2[$, alors on peut considérer M à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1', r_2'[}$. On le notera également M.

PROPOSITION 3.1. *Soit M un opérateur différentiel de rang n à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$. Alors il existe un intervalle $]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[\subseteq]r_1, r_2[$ sur lequel l'extension de M à coefficients dans $\mathcal{H}_{]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[}$ se décompose en $M =$ $= \widetilde{L}_1 \circ \widetilde{L}_2$ avec avec $R(\widetilde{L}_1, \varrho) = R(M, \varrho)$, $\forall \varrho \in]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[$ et $R(\widetilde{L}_2, \varrho) >$ $> R(M, \varrho)$, $\forall \varrho \in]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[$ et toutes les solutions de $\widetilde{L}_1$ à t_ϱ, $\varrho \in]r_1, \tilde{r}_2[$ ont même rayon de convergence.*

DÉMONSTRATION. Supposons tout d'abord que les rayons de convergence des solutions ne soient pas tous les mêmes autrement $\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}_2$ et le cas est trivial.

Il résulte du lemme 3.3 de [Young] que l'ensemble des valeurs possibles des rayons de convergence des solutions au point générique t_ϱ est un ensemble discret. Par conséquent, on peut noter r la plus petite valeur de cet ensemble qui ne soit pas égale à $R(M, r_2)$.

On applique [DW-RO] 4.1, 4.2 avec r ; en effet dans loc.cit. la démonstration est faite pour le cas $r_2 = 1$, mais il est possible d'appliquer la théorie au cas r_2 génerique. On obtient $M = L_1 \circ L_2$ sur $]r_1', r_2[$ avec L_2 dont les solutions ont un rayon de convergence supérieur ou égal à r, au point générique t_{r_2} et L_1 dont les solutions ont un rayon de convergence strictement inférieur à r (en fait égal à $R(M, r_2)$), au point générique t_{r_2}.

Comme $r > R(M, r_2)$, il existe $r_1'' \in]r_1', r_2[$ tel que $R(L_2, \varrho) > > R(M, \varrho)$, $\forall \varrho \in]r_1'', r_2[$. En particulier, on a $R(L_1, \varrho) = R(M, \varrho)$ $\forall \varrho \in \in]r_1'', r_2[$.

On distingue alors deux cas :

Premier cas : (L_1 est déjà décomposé). Il existe $r_1^{(3)} \in]r_1'', r_2[$ tel que pour tout $\varrho \in]r_1^{(3)}, r_2[$, toutes les solutions de L_1 au point générique t_ϱ ont même rayon de convergence qui est $R(L_1, \varrho) = R(M, \varrho)$, $\forall \varrho \in]r_1^{(3)}, r_2[$. On peut alors immédiatement conclure en posant $\tilde{L}_1 = L_1$ et $\tilde{L}_2 = L_2$.

Deuxième cas : Il n'existe pas de $r_1^{(3)} \in]r_1'', r_2[$ comme dans le premier cas. Cela revient à dire qu'il existe un r_2' et un $r_1^{(3)}$ tel que sur l'intervalle $]r_1^{(3)}, r_2'[\subseteq]r_1'', r_2[$ les solutions de L_1 n'aient pas toutes le même rayon de convergence.

On applique [DW-RO] à L_1 au point générique $t_{r_2'}$ et on obtient la décomposition $L_1 = L_1' \circ L_2'$ sur $]r_1^{(4)}, r_2'[$ avec L_1' dont les solutions ont un rayon de convergence égal à $R(L_1, r_2')$ au point générique $t_{r_2'}$ et L_2' dont les solutions ont un rayon de convergence strictement supérieur à $R(L_1, r_2')$ au point générique $t_{r_2'}$.

En réitérant le procédé au maximum un nombre s fini de fois ($\deg L_1 = s \leqslant n < +\infty$), on obtient :

$$L_1 = L_1' \circ L_2'$$

$$L_1' = L_1'' \circ L_2''$$

$$L_1'' = L_1^{(3)} \circ L_2^{(3)}$$

$$(\dots)$$

$$L_1^{(s)} = L_1^{(s+1)} \circ L_2^{(s+1)}$$

avec $L_1^{(s+1)}$ dont toutes les solutions ont le même rayon de convergence à t_ϱ avec $\varrho \in]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[$.

Il suffit de poser alors : $\tilde{L}_1 = L_1^{(s+1)}$ et $\tilde{L}_2 = L_2^{(s+1)} \circ L_2^{(s)} \circ \ldots \circ L_2' \circ L_2$ pour démontrer le résultat énoncé. ■

THÉORÈME 3.2 (Décomposition selon les variations du rayon de convergence). *Soit M un opérateur différentiel de rang n à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$. Alors il existe un intervalle $]\check{r}_1, \check{r}_2[\subseteq]r_1, r_2[$ sur lequel M se décompose en $M = M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_l$ avec :*

– *chaque M_i a toutes ses solutions pour $\varrho \in]\check{r}_1, \check{r}_2[$ qui ont le même rayon de convergence.*

– *et la représentation graphique de la fonction $\varrho \mapsto \log R(M_i, \varrho)$ est un segment pour $\varrho \in]\check{r}_1, \check{r}_2[$.*

DÉMONSTRATION. On considère notre opérateur différentiel M.

La proposition précédente nous a permis d'obtenir la décomposition : $M = \tilde{L}_1 \circ \tilde{L}_2$ avec $\tilde{L}_1$ dont toutes les solutions ont le même rayon de convergence à t_ϱ avec $\varrho \in]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[$ et $\tilde{L}_2$ dont toutes les solutions ont un rayon de convergence strictement supérieur à $R(M, \varrho)$, $\forall \varrho \in]\tilde{r}_1, \tilde{r}_2[$.

On considère maintenant $\tilde{L}_2$, auquel on applique la proposition 3.1. On obtient une autre décomposition $\tilde{L}_2 = \tilde{L}_3 \circ \tilde{L}_4$ sur un intervalle $]\bar{r}_1, \bar{r}_2[\subseteq]r_1, r_2[$, et en réitérant ce procédé un nombre fini de fois (puisque $\deg M = n < +\infty$), on obtient le théorème. En effet, a priori, les fonctions $\varrho \mapsto \log R(M_i, \varrho)$ sont affines par morceaux sur $]\bar{r}_1, \bar{r}_2[$, mais, quitte à diminuer encore l'intervalle, on peut se réduire au cas où les fonctions $\varrho \mapsto \log R(M_i, \varrho)$ sont des segments sur $]\check{r}_1, \check{r}_2[\subseteq]\bar{r}_1, \bar{r}_2[$. ■

4. Indice.

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer un théorème d'indice pour un module différentiel sur $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$. Les notations sont les mêmes que dans [CH-ME III].

THÉORÈME 4.1 (THÉORÈME D'INDICE LOCAL). *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ de rang n. Supposons de plus, qu'il n'existe pas $h \in \mathbb{N}$ tel que pour chaque $r \in]r_1, r_2[$, $\mathcal{M}$ ait des solutions de* *rayon de convergence égal à* $|p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r$ *à* t_r. *Alors il existe* $r_2' \in]r_1, r_2[$, $\tilde{\chi}(M, \mathcal{A}(r_2'))$ *existe et vaut :*

$$\tilde{\chi}(M, \mathcal{A}(r_2')) = \sum_{i=0}^{l} \left(\frac{d \log (R(M_i, r_2'))^{n_i}}{d \log r} \right) - n$$

où n_i *est l'ordre des opérateurs* M_i *qui proviennent de la décomposition obtenue dans le théorème* 3.2 *dans* $]r_1', r_2'[\subseteq]r_1, r_2[$.

DÉMONSTRATION. On a, d'après le théorème 3.2, la décomposition : $M = M_1 \circ M_2 \circ \ldots {}_l\circ M_l$ sur un intervalle $]r_1', r_2'[\subseteq]r_1, r_2[$. On a : $\tilde{\chi}(M, \mathcal{A}(r_2')) = \sum_{i=1} \tilde{\chi}(M_i, \mathcal{A}(r_2'))$. Donc pour calculer notre indice, il nous suffit de calculer $\tilde{\chi}(M_i, \mathcal{A}(r_2'))$, $\forall i \leq l$. On va maintenant distinguer deux cas :

Premier cas : $\forall r \in]r_1', r_2'[$, $R(M_i, r) < |p|^{1/(p-1)} \cdot r$ (on est dans le Domaine de Young sur tout l'intervalle $]r_1', r_2'[$).

On peut alors appliquer [Young] 4.3. En effet, on peut écrire $M_i = x(d/dx) + G_i$ avec

$$G_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & \\ \cdots & & & & & \\ & & & & 0 & 1 \\ \dfrac{a_0(x)}{a_{n_i}(x)} & \dfrac{a_1(x)}{a_{n_i}(x)} & \dfrac{a_2(x)}{a_{n_i}(x)} & \cdots & \dfrac{a_{n_i-2}(x)}{a_{n_i}(x)} & \dfrac{a_{n_i-1}(x)}{a_{n_i}(x)} \end{pmatrix}$$

où n_i est l'ordre de l'opérateur M_i. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} M_i &= a_{n_i}(x)\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n_i} + a_{n_i-1}(x)\left(x\frac{d}{dx}\right)^{n_i-1} + \cdots + a_0(x) \\ &= x^{n_i} a_{n_i}(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^{n_i} + \qquad\qquad + \cdots + a_0'(x). \end{aligned}$$

On a alors :

(4.1) $$\tilde{\chi}(\mathcal{M}_i, \mathcal{A}(r_2')) = \tilde{\chi}(M_i, \mathcal{A}(r_2')) + ord_{[0, r_2'[}(a_{n_i})$$

et [Young] 4.3 montre que :

$$(4.2)\qquad \left(\frac{d\log(R(\mathcal{M}_i, r_2'))^{n_i}}{d\log r}\right) = \tilde{\chi}(M_i, \mathcal{A}(r_2')) + ord_{[0, r_2'[}(x^{n_i} a_{n_i}).$$

Par conséquent, on déduit de (4.1) et (4.2) :

$$\left(\frac{d\log(R(M_i, r_2'))^{n_i}}{d\log r}\right) = \tilde{\chi}(\mathcal{M}_i, \mathcal{A}(r_2')) + ord_{[0, r_2'[}(x^{n_i} a_{n_i}) - ord_{[0, r_2'[}(a_{n_i})$$

$$= \tilde{\chi}(\mathcal{M}_i, \mathcal{A}(r_2')) + n_i.$$

Et donc

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}_i, \mathcal{A}(r_2')) = \left(\frac{d\log(R(\mathcal{M}_i, r_2'))^{n_i}}{d\log r}\right) - n_i.$$

Deuxième cas : $\forall r \in]r_1', r_2'[$, $R(M_i, r) > |p|^{1/(p-1)} \cdot r$. On va devoir appliquer l'antécédent de Frobenius. Si on utilise les mêmes notations que dans le paragraphe 2, c'est-à-dire qu'on note $\mathcal{N}_h$ le h_i-ième antécédent de Frobenius de notre module différentiel $\mathcal{M}$, et $\mathcal{N}_{i,h_i}$ le h-ième antécédent de Frobenius de notre module différentiel $\mathcal{M}_i$ on a ([CH-ME III] lemme 8.3.4):

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}_i, \mathcal{A}_K([0, \varrho])) = \tilde{\chi}(\mathcal{N}_{i,h_i}, \mathcal{A}_K([0, \varrho^{p^{h_i}}]))$$

et

$$\tilde{\chi}\left(\mathcal{M}_i, \frac{1}{x}\mathcal{A}_K([\varrho, \infty])\right) = \tilde{\chi}\left(\mathcal{N}_{i,h_i}, \frac{1}{x}\mathcal{A}_K([\varrho^{p^{h_i}}, \infty])\right).$$

Remarque : h_i dépend de i. On peut alors procéder exactement comme dans le premier cas avec $\mathcal{N}_{i,h_i}$.

Troisième cas : Si pour tout $r \in]r_1', r_2'[$, le rayon de convergence $R(M_i, r)$ n'est pas toujours strictement inférieur ou strictement supérieur à $|p|^{\frac{1}{p-1}} \cdot r$, alors il existe un $r_1'' \in]r_1', r_2'[$ tel qu'on se retrouve soit dans le premier cas, soit dans le deuxième cas pour $r \in]r_1'', r_2'[$ (D'après les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème). Dans tous les cas on peut écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(r_2')) &= \sum_{i=0}^{l} \tilde{\chi}(\mathcal{M}_i, \mathcal{A}(r_2')) \\ &= \sum_{i=0}^{l} \tilde{\chi}(\mathcal{N}_{i,h_i}, \mathcal{A}(r_2'^{p^{h_i}})) \\ &= \sum_{i=0}^{l} \left(\left(\frac{d \log (R(\mathcal{N}_{i,h_i}, r_2'^{p^{h_i}}))^{n_i}}{d \log r}\right) - n_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{l} \left(\frac{d \log (R(\mathcal{N}_{i,h_i}, r_2'^{p^{h_i}}))^{n_i}}{d \log r}\right) - n\end{aligned}$$

avec la convention que $\mathcal{N}_{i,0} = \mathcal{M}_i$ (lorsqu'on est dans le premier cas).

On obtient ainsi la formule anoncée dans le théorème. ∎

L'étude de la fonction $H(r)$ définie ci-dessous va nous permettre de démontrer un théorème d'indice global. Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ et M son opérateur différentiel associé par le théorème du vecteur cyclique. Nous pouvons également écrire notre opérateur différentiel sous la forme matricielle : $d/dx - G$.

Soit t_r un point générique de rayon r et soit $(u_i)_{i \in \mathrm{N}}$ une base de solution de l'équation différentielle au point t_r. On note $\varrho(u_i)$ le rayon de convergence de chaque élément de la base et on pose :

$$H(r) = \max_{(u_i) \text{ bases solutions à } t_r} \left(\prod_i \varrho(u_i)\right)$$

(Le max est atteint car les $\varrho(u_i)$ forment un ensemble discret).

Remarque : La fonction $H(r)$ définie ci-dessus correspond au $\varrho(\mathcal{M}, r)$ que Young a utilisé pour calculer l'indice pour des petits rayons (base optimale).

Lemme 4.2. *La fonction* $H(r) = \max_{(u_i) \text{ bases solutions à } t_r} \left(\prod_i \varrho(u_i)\right)$ *est continue sur* $]r_1, r_2[$ *et elle est égale à :* $H(r) = \varrho_1^{n_1} \dots \varrho_k^{n_k}$ *où* n_i *est définie comme l'ordre des* M_i *qui forment la décomposition de* [DW-RO] *à* t_r, *et* ϱ_i *est le rayon des solutions à* t_r *de* M_i *avec* $\varrho_1 < \varrho_2 < \dots < \varrho_k$.

Démonstration. 1. *Continuité sur* $]r_1, r_2[$: Nous voulons étudier $H(r)$ quand $r \in]r_1, r_2[$. On peut écrire $\mathcal{U}_{G,t_r}$ la solution de l'équation différentielle en t_r : $\mathcal{U}_{G,t_r}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(t_r)}{s!} \cdot (X - t_r)^s$ avec G_s définie par la formule de récurrence :

$$\begin{cases} G_0 = I\,, \\ G_{s+1} = D(G_s) + G_s \cdot G\,. \end{cases}$$

Posons $G_s(t_r)_i$ la i-ème colonne de $G_s(t_r)$.

Comme $R(\mathcal{M}, r) = \max(\liminf \|G_s/s!\|_r^{-1/s}, r)$, on a :

$$\prod_i \left(\liminf_s \left\| \frac{G_s(t_r)_i}{s!} \right\|^{-1/s} \right) \leqslant H(r)\,.$$

En effet, à chaque t_r, une base de solution est donnée par les colonnes de $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(t_r)}{s!} \cdot (X - t_r)^s$. Ainsi nous avons écrit notre solution dans une base (u_i), mais notre fonction $H(r)$ correspond à la base qui maximise $\varrho(r)$ dans l'ensemble des solutions à coefficients dans Ω.

Etudions les changements de base nécessaires :

Soit $U \in Gl_n(\Omega)$, $t \in \Omega$, $K \subseteq \Omega$ et $|\alpha| = r$, $t_r = \alpha \cdot t$.

On a : $\mathcal{U}_{G,\,t_r}(x)\Big|_{u_i} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(t_r)}{s!} \cdot (X - t_r)^s$ qui dans la nouvelle base (v_i) s'écrit : $\mathcal{U}_{G,\,t_r}(x)\Big|_{v_i} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(t_r)}{s!} \cdot (X - t_r)^s \cdot U$ et donc $\mathcal{U}_{G,\,t_r}(x) = = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{G_s(t_r) \cdot U}{s!} \cdot (X - t_r)^s$. Par conséquent, on a :

$$\prod \varrho(v_i) = \prod_i \left(\liminf_s \left\| \frac{(G_s(t_r) \cdot U)_i}{s!} \right\|^{-1s} \right).$$

On peut donc définir $H(r)$ par :

$$H(r) = \max_{U \in Gl_n(\Omega)} \left(\prod_i \liminf_s \left\| \frac{(G_s(t_r) \cdot U)_i}{s!} \right\|^{-1/s} \right).$$

Remarque. On va travailler sur le corps $\Omega = E_{0,\,1}$ qui est le complété de $\mathbb{C}_p(t)$ pour la norme de Gauss. Bernard Dwork et Philippe Robba avaient déjà obtenu une décomposition d'un opérateur différentiel sur $E_{0,\,1}$ en un point t_r dont le produit des rayons de convergence des solutions de chaque élément de la décomposition est égal à $H(r)$. De plus, comme l'anneau de valuation de $E_{0,\,1}$ est $\mathbb{Q}$, il existe $\alpha \in E_{0,\,1}$ tel que $|\alpha \cdot \cdot t| = r$ avec $r \in \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut prolonger nos propriétés à $\mathbb{R}$.

On étudie tout d'abord : $r \mapsto \left(\prod_i \liminf_s \left\| \frac{(G_s(t_r) \cdot U)_i}{s!} \right\|^{-1/s} \right)$. Pour i fixé, la fonction $r \mapsto \liminf_s \left\| \frac{(G_s(t_r) \cdot U)_i}{s!} \right\|^{-1/s}$ est continue sur $[r_1, r_2]$ (voir la démonstration de [CH-DW] prop 2.4 et 2.5) et logarithmiquement concave sur $[r_1, r_2]$ (car la limite inférieure de fonctions concaves est encore concave). De plus, la fonction $r \mapsto \log \left(\sum_i \liminf_s \left\| \frac{(G_s(t_r) \cdot U)_i}{s!} \right\|^{-1/s} \right)$, comme somme de fonctions concaves, est encore concave. Nous avons besoin, afin de passer au maximum, du Lemme suivant :

LEMME 4.3. *Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ une famille de fonctions concaves, f_α: $I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Supposons que, pour chaque $x \in I$, l'ensemble $\{f_\alpha(x), \alpha \in \mathbb{R}\}$ est fini. Alors la fonction $f(x) = \max_\alpha \{f_\alpha(x), \alpha \in \mathbb{R}\}$ est localement lipschitzienne et en particulier, continue sur I.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.3. Soient a, b, c et d tels que $c < a < b < d$. Posons a_M le maximum des $f_\alpha(a)$ et c_m le minimum des $f_\alpha(c)$. Alors on a :

$$M = \frac{a_M - c_m}{a - c} \geqslant \frac{f_\alpha(a) - f_\alpha(c)}{a - c}.$$

Posons b_M le maximum des $f_\alpha(b)$ et d_m le minimum des $f_\alpha(d)$. Alors on a :

$$m = \frac{b_M - d_m}{b - d} \leqslant \frac{f_\alpha(b) - f_\alpha(d)}{b - d}.$$

De plus, comme la fonction est concave, on a :

$$m \leqslant \frac{f_\alpha(y) - f_\alpha(x)}{y - x} \leqslant M$$

avec $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$.

On pose :

$$f(x) = f_\alpha(x) \geqslant f_\beta(x), \quad \forall \beta \neq \alpha$$

et

$$f(y) = f_\beta(y) \geqslant f_\alpha(y), \quad \forall \beta \neq \alpha.$$

On a, en posant $L = \max\{|m|, |M|\}$:

$$-L(y-x) \leqslant f_\alpha(y) - f_\alpha(x) \leqslant L(y-x)$$

et

$$-L(y-x) \leqslant f_\beta(y) - f_\beta(x) \leqslant L(y-x).$$

Cela revient à :

$$-L(y-x) \leqslant f_\alpha(y) - f_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(y) - f_\beta(x) \leqslant f_\beta(y) - f_\beta(x) \leqslant L(y-x)$$

et donc

$$-L(y-x) \leqslant f(y) - f(x) \leqslant L(y-x). \qquad \blacksquare$$

On applique ce lemme à $H(r)$. En effet, l'ensemble des rayons de convergence des solutions au point t_r est fini ([RO I], théorème 2.6) et on peut donc en conclure que $H(r)$ est continue sur $]r_1, r_2[$.

2. *Interprétation locale de* $H(r)$: On veut montrer que :

$$H(r) = \varrho_1^{n_1} \ldots \varrho_k^{n_k}$$

avec $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_k$.

On considère la décomposition locale de Robba à t_r ([RO I], théorème 2.6), de l'opérateur M associé à notre module différentiel. On a :

$$M = M_1 \circ \ldots \circ M_l$$

où toutes les solutions des M_i à t_r ont des rayons ϱ_i et $rang\, M_i = n_i$.

On va supposer que $k = 2$ (il suffira de procéder par récurrence sur k pour obtenir le résultat pour k quelconque). On a :

$$M = M_1 \circ M_2.$$

Le système associé à M s'écrit :

$$\left[\frac{d}{dx} - \begin{pmatrix} A_2 & B \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 .$$

Une solution de M doit donc vérifier : $X' - A_2 \cdot X - B \cdot Y = 0$; $Y' - A_1 \cdot Y = 0$. Les solutions Y de A_1 sont, soit nulles, soit de rayon de convergence égal à ϱ_1. Si une solution a un rayon supérieur à ϱ_1, on a $Y = 0$. Donc l'espace des solutions de rayon de convergence supérieur à ϱ_1 est au plus de dimension n_2. Ces solutions doivent alors vérifier $X' - A_2 \cdot X = 0$ et par conséquent, ont un rayon égal à ϱ_2. Par la méthode de variations des constantes, on sait que les autres solutions sont de rayon ϱ_2. Comme $X' - A_2 \cdot X = 0$ admet n_2 solutions linéairement indépendantes, $X' - A_2 \cdot X - B \cdot Y = 0$ a une solution dont le rayon de convergence est égal au rayon de Y, c'est-à-dire ϱ_1. Par conséquent $H(r) = \varrho_1^{n_1} \cdot \varrho_2^{n_2}$. ■

LEMME 4.4. *M étant défini comme précédemment, supposons de plus que M n'a aucune solution dont le rayon de convergence est égal à* $|p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r_2$ *en* t_{r_2} *pour tout* $h \in \mathbb{N}$.

Alors, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ *tel que la fonction* $H(r) = \max_{(u_i) \text{ bases solutions à } t_r} (\prod_i \varrho(u_i))$ *est continue et logarithmiquement affine par morceaux avec un nombre fini de côtés sur* $[r_2 - \varepsilon, r_2]$ *et vaut* $H(r) = \varrho_1^{n_1} \ldots \varrho_k^{n_k}$ *où* n_i *est comme précédemment l'ordre de* M_i *et* ϱ_i *le rayon des solutions de* M_i.

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 4.2, il suffit de montrer que $H(r)$ est continue en r_2 et logarithmiquement affine par morceaux en $[r_2 - \varepsilon, r_2]$.

Premier cas : Toutes les solutions en t_{r_2} de l'opérateur différentiel sont dans le Domaine de Young. Alors, d'après [Young] 4.3, leur rayon de convergence est lié à la valuation des racines du polynôme $\Delta_{t_{r_2}}(M)$. Comme les $\lambda_i(r)$ qui sont les racines de $\Delta_{t_{r_2}}(M)$ au point générique t_{r_2} sont en nombre fini, il existe un intervalle $[r_2 - \varepsilon, r_2]$ sur lequel leur produit est logarithmiquement affine par morceaux.

Deuxième cas: On suppose maintenant que M se décompose sur $\mathcal{H}_{]r_2 - \varepsilon, r_2[}$ en $M = M_1 \circ M_2$ où M_1 a toutes ses solutions dans le domaine de Young et M_2 dont les solutions ne sont pas dans le Domaine de Young (pour obtenir cette décomposition, on a utilisé le théorème de [DW-RO]).

En faisant un raisonnement similaire à celui utilisé dans la démonstration du théorème 2.2 sur M_2, c'est-à-dire en utilisant l'antécédent de Frobenius de la proposition 2.1 et la continuité démontrée dans 4.3, on peut se ramener au premier cas (i.e. dans le Domaine de Young). La fonction $H(r)$ est donc logarithmiquement affine par morceaux sur $[r_2 - \varepsilon, r_2]$. ■

REMARQUES. La condition dans l'énoncé du Lemme «M n'a aucune solution dont le rayon de convergence est égal à $|p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r_2$ à t_{r_2} pour tout $h \in \mathbb{N}$» est plus *restrictive* que celle dont nous avons réellement besoin. En effet nous pouvons également conclure que $H(r)$ est continue et logarithmiquement affine par morceaux sur $[r_2 - \varepsilon, r_2]$ dans le cas suivant : Lorsque M est d'ordre 2. Alors, le produit des rayons de convergence de M peut seulement prendre deux valeurs en chaque t_r, une qui est égale à $(R(M, r))^2$ et l'autre qui est égale à $H(r)$. En utilisant la finitude de l'indice, on obtient le résultat. Le seul cas qu'on ne sait pas traiter est, en fait, quand M est d'ordre supérieur ou égal à 3, et qu'il existe $h \in \mathbb{N}$ tel que $R(M, r_2) = |p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r_2$ à t_{r_2}.

COROLLAIRE 4.5. *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ de rang n. Supposons de plus, qu'aucune de ses solutions n'a un rayon égal à $|p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r$, $\forall h \in \mathbb{N}$, $\forall r \in [r_1', r_2']$ où r_1' et r_2' sont définis par le théorème* 3.2. *Alors $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(r_2'))$ existe et vaut :*

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(r_2')) = \left(\frac{d \log H(r)}{d \log r} \right) \Bigg|_{r_2'} - n\,.$$

où $H(r)$ est la fonction définie dans le lemme précédent.

DÉMONSTRATION. Cela provient directement du théorème 4.1, de la remarque qui le suit appliqués à $]r_1', r_2'[$ et de l'interprétation locale de $H(r)$. ■

THÉORÈME 4.6 (THÉORÈME D'INDICE). *Soit $\mathcal{M}$ un module différentiel à coefficients dans $\mathcal{H}_{]r_1, r_2[}$ de rang n. Supposons que $\mathcal{M}$ n'a aucune solution de rayon de convergence égal à $|p|^{1/(p-1)p^h} \cdot r_2$ $\forall h \in \mathbb{N}$ en t_{r_2}. Alors $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(r_2))$ existe et vaut :*

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}(r_2)) = \left(\frac{d \log H(r)}{d \log r} \right) \Bigg|_{r_2} - n\,.$$

où $H(r)$ est la fonction définie dans le lemme précédent.

Remarque : La condition provient de celle du lemme 4.4 *et peut donc être rendue plus faible* (*voir la remarque précédente et la démonstration de* 4-4).

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 4.4 et suivant la construction de la fonction $H(r)$, on conclut qu'il existe ε tel que $\forall r \in]r_2 - \varepsilon, r_2[$ il n'existe pas $h \in \mathbb{N}$, tel que $\mathcal{M}$ ait des solutions de rayon de convergence égal à $|p|^{\frac{1}{(p-1)p^h}} \cdot r$ en t_r. On va se réduire à l'étude de M et de sa restriction à $\{x \in K / |x| \in]r_2 - \varepsilon, r_2[\}$.

Soit s_m une suite qui tend vers r_2, $s_m \in]r_2 - \varepsilon, r_2[$. Considérons la suite $s_m - \varepsilon_m$ avec ε_m qui tend vers 0. Pour chaque $]s_m - \varepsilon_m, s_m[$, on peut appliquer la décomposition du théorème 3.2 et obtenir $M = M_1 \circ M_2 \circ \ldots \circ M_l$ sur un intervalle $]s'_m, s''_m[\subseteq]s_m - \varepsilon_m, s_m[$ avec chaque M_i qui a toutes ses solutions pour $\varrho \in]s'_m, s''_m[$ qui ont même rayon de convergence et dont la représentation graphique de la fonction $\varrho \mapsto \log R(M_i, \varrho)$ est un segment pour $\varrho \in]s'_m, s''_m[$.

La suite (s''_m) tend vers r_2 et donc $\tilde{\chi}(M, \mathcal{C}(s''_m))$ existe et est égal à $\left(\dfrac{d \log H(r)}{d \log r}\right)\Bigg|_{s''_m} - n$. On a donc :

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{C}(r_2)) = \lim_{m \to +\infty} \left(\frac{d \log H(r)}{d \log r}\right)\Bigg|_{s''_m} - n\,.$$

Par conséquent, d'après le lemme 4.4 et le corollaire 4.5 :

$$\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{C}(r_2)) = \left(\frac{d \log H(r)}{d \log r}\right)\Bigg|_{r_2} - n\,.$$

En effet, $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{d \log H(r)}{d \log r}\right)\Bigg|_{s''_m}$ est constant pour m assez grand et est égal à $\left(\dfrac{d \log H(r)}{d \log r}\right)\Bigg|_{r_2}$ car $H(r)$ est affine par morceaux avec un nombre fini de côtés dans $[r_2 - \varepsilon, r_2]$.

REFERENCES

[CH] G. CHRISTOL, *Modules différentiels et équations différentielles p-adiques*, Queen's papers in Pure and Applied mathematics 66, Queen's University, Kingston (1983).

[CH-DW] G. CHRISTOL - B. DWORK, *Modules différentiels sur des couronnes*, Annales de l'Institut Fourier, 44 (1994), pp. 663-701.

[CH-ME] G. CHRISTOL - Z. MEBKHOUT, *Topological p-adic vector spaces and Index theory*, Annales de Mathématiques de l'Institut Blaise Pascal, Vol. 2 (1995), pp. 93-98.

[CH-ME III] G. CHRISTOL - Z. MEBKHOUT, *Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques III* (à paraître).

[CH-RO] G. CHRISTOL - P. ROBBA, *Equations différentielles p-adiques, applications aux sommes exponentielles*, Collection Actualités, Hermann (1994).

[DW-RO] B. DWORK - P. ROBBA, *On ordinary linear differential equations*, T.A.M.S. **231** (1977).

[DW-RO II] B. DWORK - P. ROBBA, *Effectifs p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations*, Trans A.M.S., **259** (1980), pp. 559-577.

[DW-GE-SU] B. DWORK - G. GEROTTO - F. J. SULLIVAN, *An Introduction to G-Functions*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Study 133.

[Pons] E. PONS, *Modules différentiels non solubles. Rayons de convergence et Indices*, Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.

[RO] P. ROBBA, *Lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles*, L'Enseignement Mathématiques, t. XXVI, fascicule 3-4 (1980), pp. 279-311.

[RO I] P. ROBBA, *On the Index of* $p-$ *adic differential operators I*, Annals of Mathematics, **101** (1975), pp. 280-316.

[RO II] P. ROBBA, *On the Index of* $p-$ *adic differential operators II*, Duke Mathematical Journal, **43** (1976), pp. 19-31.

[RO III] P. ROBBA, *On the Index of* $p-$ *adic differential operators III, application to twisted exponential sums*, Astérisque, **119-120** (1984), pp. 191-266.

[Young] P. T. YOUNG, *Radii of convergence and index for p-adic differential operators*, T.A.M.S. **333**, 2 (1992).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 gennaio 1998