Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Bruno Chiarellotto

Espaces de Berkovich et équations différentielles p-adiques. Une note

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 103 (2000), p. 193-209

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_2000__103__193_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 103 (2000)

Espaces de Berkovich et équations différentielles p-adiques. Une note.

BRUNO CHIARELLOTTO (*)(**)

Introduction.

Dans toute la note, K est un corps ultramétrique complet, algébriquement clos, $\mathcal{V}$ est son anneau de valuation et k est son corps résiduel qu'on suppose parfait.

Cette note veut donner des exemples simples de l'application des espaces de Berkovich aux équations différentielles p-adiques sur les ouverts de la droite. La théorie a été introduite dans [BD] où on peut trouver aussi le cas de dimension supérieure : la note est simplement une adaptation de [BD] à la dimension 1, qui a le seul mérite d'être explicite. Un des aspects de la théorie de Berkovich est le fait que les points qui sont connus dans la théorie p-adique classique comme *les points génériques* deviennent de vrais points. Toutes les propriétés de continuité peuvent être appliquées à ces points-là comme aux autres points. Et de plus, si l'extension par continuité de certaines de ces propriétés, comme par exemple la factorisation des opérateurs différentiels, est empêchée par les racines de certains polynômes, on peut toujours espérer qu'elle garde une signification pour les points génériques. Dans cette note, on veut donner deux exemples de ce point de vue.

Dans le premier paragraphe, on introduit les notations et on explicite les outils; ils proviennent directement de l'article [BD]. Dans le deuxième paragraphe, on va considérer l'espace de Berkovich $\mathcal{M}_{r_1, r_2}$ associé à la couronne fermée de rayon intérieur r_1 et extérieur r_2. Dans cet espace,

(*) Indirizzo dell'A.: Dip. Matematica, Universitá di Padova, Via Belzoni 7, 35100 Padova Italie. E-mail: chiarbru@math.unipd.it

(**) Membre du réseau TMR de l'Union Européenne «Arithmetic Algebraic Geometry».

vivent les (vieux) points génériques t_η, $\eta \in [r_1, r_2] \subset \boldsymbol{R}^{>0}$ (qui seront indiqués comme les points génériques à distance η de 0). On va démontrer une généralization du théorème de décomposition de Dwork-Robba [DR]: si on a un opérateur différentiel défini sur $\mathcal{M}_{r_1, r_2}$, L, qui se décompose au point générique t_η à coefficients dans le corps $\mathcal{H}(t_\eta)$ ([BD], [BE]) selon le rayon de convergence des solutions à t_η, $L = N_\eta \circ M_\eta$ alors on peut trouver un ouvert de Berkovich $U \subset \mathcal{M}_{r_1, r_2}$, $t_\eta \in U$ où la restriction de M à U L_U admet une décomposition $L_U = N_U \circ M_U$ qui induit la décomposition $L = N_\eta \circ M_\eta$ à t_η. En particulier il existera un ε, $\varepsilon > 0$, tel que pour chaque réel r, $r \in]\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon[$, on obtienne une décomposition analogue à t_r. On remarquera que dans la démonstration de Dwork-Robba que nous allons adapter, l'obstruction pour obtenir un tel résultat était liée aux racines de certains polynômes à coefficients dans K; de telles racines doivent être cherchées dans K et non parmi les points génériques.

Enfin dans le dernier paragraphe, on veut montrer comme la condition de surconvergence sur $\boldsymbol{P}_k^1 \setminus \{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\}$ pour un module différentiel (M, ∇) défini sur un voisinage strict de $\boldsymbol{P}_k^1 \setminus \{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\}$ dans $\boldsymbol{P}_{\mathcal{V}}^1$ est liée au fait d'avoir un rayon de convergence 1 sur le point générique (unique point de la frontière de Shilov) de

$$]\boldsymbol{P}_k^1 \setminus \{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\}[_{\boldsymbol{P}_{\mathcal{V}}^1}.$$

En particulier on va montrer que chaque isocristal défini sur un voisinage strict de $]\boldsymbol{P}_k^1 \setminus \{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\}[_{\boldsymbol{P}_{\mathcal{V}}^1}$, s'il est convergent, est automatiquement surconvergent. C'est donc une généralisation du théorème de [BC], où on avait obtenu la même conclusion mais avec l'hypothèse de singularités méromorphes.

Un remerciement spécial à Francesco Baldassarri, inspirateur de cette note.

1. Notations.

Les constructions générales sont données dans [BD]; pour ce qui nous intéresse, on va se mettre dans la situation locale suivante: soit $\mathcal{M}(K\{x\})$ l'espace de Berkovich correspondant au disque unité fermé en K. Les points sont associés aux semi-normes multiplicatives de $K\{x\}$, en général on les notera ξ. En particulier, à ξ on va associer la semi-norme

$|-|(\xi)$ et à chaque $f \in K\{x\}$ il correspond $|f|(\xi) \in \boldsymbol{R}^{\geqslant 0}$ et le quotient

$$\frac{K\{x\}}{Ker(|-|(\xi))}.$$

Puisque ce quotient est intègre, on peut considérer son espace quotient et finalement sa complétion; on la notera $\mathcal{H}(\xi)$ et on gardera la notation $|-|(\xi)$ pour sa valuation [BE].

Remarque. Si ξ est un point de l'espace rigide usuel $SpmK\{x\}$, alors $\mathcal{H}(\xi)$ sera une extension finie de K.

Pour chaque point on a une flèche isométrique

$$(K\{x\}, |-|(\xi)) \rightarrow (\mathcal{H}(\xi), |-|(\xi)) \tag{1.1}$$

Pour $f \in K\{x\}$, on va noter $f(\xi)$ son image par la flèche (1.1). On considère maintenant un certain type de point de Berkovich, ceux qui correspondent aux points génériques dans l'ancienne littérature: le point générique à distance ε de 0, t_ε, $\varepsilon \in |K|$, $\varepsilon \leqslant 1$ (Pour une interprétation plus générale voir [BD]); il est lié à la semi-norme multiplicative

$$K\{x\} \rightarrow \boldsymbol{R}^{\geqslant 0}$$

$$f \mapsto \sup_{|x| = \varepsilon} |f(x)|.$$

On la note $|-|(t_\varepsilon)$ et pour le corps associé, comme d'habitude, $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$. Pour ce type de points on a une immersion isométrique

$$(K\{x\}, |-|(t_\varepsilon)) \hookrightarrow (\mathcal{H}(t_\varepsilon), |-|(t_\varepsilon)) \tag{1.2}$$

Par continuité on peut définir une dérivation, d/dx, en $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$ qui commute avec la dérivation en $K\{x\}$ et on a que sa norme $|d/dx|(t_\varepsilon)$ comme opérateur est exactement $1/\varepsilon$ [BD]. On peut remarquer que t_ε est un «vrai point», i.e. un point dans l'espace analytique rigide $Spm\ \mathcal{H}(t_\varepsilon)\{x\}$. On introduit aussi la K-algèbre de Banach $\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![|X - x(t_\varepsilon)|]\!]_\varepsilon^b$ comme l'algèbre de séries formelles

$$\sum_{i \in \boldsymbol{N}} a_i (X - x(t_\varepsilon))^i$$

en $X - x(t_\varepsilon)$ (X est une indéterminée) à coefficients dans $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$, qui sont bornées pour la norme (qu'on notera encore $|-|(t_\varepsilon)$) définie par

$$\left|\sum_{i\in N} a_i(X-x(t_\varepsilon))^i\right|(t_\varepsilon) = \sup_{i\in N} |a_i|(t_\varepsilon)\varepsilon^i.$$

Remarque. Si on avait choisit le point générique t_1 de $\mathcal{M}(K\{x\})$ correspondant au seul point générique de sa réduction $Spec(k[x])$, on aurait trouvé $\mathcal{H}(t_1)=E$ le corps des éléments analytiques et $\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![|X-x(t_\varepsilon)|]\!]_1^b = W_t^1$, dans les notations de Robba et Dwork.

On obtient alors un diagramme commutatif *d'immersions* isométriques d'algèbres [BD]

$$(1.3)\qquad \begin{array}{ccc} & (\mathcal{H}(t_\varepsilon), |-|(t_\varepsilon)) & \\ \overset{(1.1)}{\nearrow} & & \overset{(1.4)}{\searrow} \\ (K\{x\}, |-|(t_\varepsilon)) & \xrightarrow{(1.5)} & (\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![X-x(t_\varepsilon)]\!]_\varepsilon^b, |-|(t_\varepsilon)) \end{array}$$

où les flèches (1.4), (1.5) sont données par le dévelopement de Taylor à $x(t_\varepsilon)$. Notamment, si f est un élément de $K\{x\}$ alors son image par (1.5) est donnée par $\tilde{f}$,

$$\tilde{f} = \sum_{i\in N}\frac{1}{i!}\frac{d^i f}{dx^i}(t_\varepsilon)(X-x(t_\varepsilon))^i.$$

En considérant que la dérivation est continue dans $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$ et est bornée, comme opérateur K-linéaire, par $1/\varepsilon$ [BD], on peut donc définir la flèche analogue (1.4) de $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$ à $(\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![|X-x(t_\varepsilon)|]\!]_\varepsilon^b)$. Même dans $(\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![|X-x(t_\varepsilon)|]\!]_\varepsilon^b)$, on peut définir une dérivation compatible avec toutes les autres constructions: $(d/dx)(\sum a_i(X-x(t_\varepsilon))^i) = \sum ia_i(X-x(t_\varepsilon))^{i-1}$.

Remarque. Les éléments de $(\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![|X-x(t_\varepsilon)|]\!]_\varepsilon^b)$ qui sont dans les images des flèches (1.4) (donc aussi parmi les images de (1.5)), sont à chercher parmi les séries $\sum_{i\in N} a_i(X-x(t_\varepsilon))^i$ telles que

$$\left|\sum_{i\in N} a_i(X-x(t_\varepsilon))^i\right|(t_\varepsilon) = \sup_{i\in N}|a_i|(t_\varepsilon)\varepsilon^i = |a_0|(t_\varepsilon).$$

On peut maintenant considérer un sous domaine affinoïde U de $\mathcal{M}(K\{x\})$, qu'on peut penser, dans notre cas, lié à une algèbre affinoïde (stricte). En effet, notre but est de considérer les voisinage d'un point «générique» qui ont une base donnée par des sous domaines affinoïdes

$$U = \{\xi \in \mathcal{M}(K\{x\}) \mid |f_i|(\xi) \leq |g|(\xi),\ i = 1, \ldots, n\}$$

où $(f_1, \ldots, f_n, g) = K\{x\}$. Ce sont des espaces associés à l'algèbre affinoïde stricte

$$K\left\{x, \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}\right\}.$$

Si $t_\varepsilon \in U$, alors on peut encore définir la semi-norme $|-|(t_\varepsilon)$ en $K\{x, f_1/g, \ldots, f_n/g\}$ et on aura

$$\begin{array}{ccc} & (\mathcal{H}(t_\varepsilon), |-|(t_\varepsilon)) & \\ \overset{(1.1)'}{\nearrow} & & \overset{(1.7)}{\searrow} \\ \left(K\left\{x, \frac{f_1}{g}, \ldots, \frac{f_n}{g}\right\}, |-|(t_\varepsilon)\right) & \xrightarrow{(1.8)} & (\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![X - x(t_\varepsilon)]\!]^b_\varepsilon, |-|(t_\varepsilon)) \end{array} \tag{1.6}$$

Le corps $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$ est le même que celui défini en utilisant $K\{x, f_1/g, \ldots, f_n/g\}$ où $K\{x\}$, et la flèche (1.1)′ et les (1.7) et (1.8) sont toujours des immersions isométriques. Le seul problème est la définition de la flèche (1.8): pour cela il suffit de la construire pour $n = 1$; dans ce cas, puisque $(f, g) = K\{x\}$, on a $g(t_\varepsilon) \neq 0$. Comme $g \in K\{x\}$ on peut considérer son image $\tilde{g}$ dans $\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![|X - x(t_\varepsilon)|]\!]^b_\varepsilon$, on aura

$$\tilde{g} = \sum_{i \in N} \frac{1}{i!} \frac{d^i g}{dx^i}(t_\varepsilon)(X - x(t_\varepsilon))^i = \sum_{i \in N} \tilde{g}_i (X - x(t_\varepsilon))^i$$

et $|\tilde{g}|(t_\varepsilon) = |g|(t_\varepsilon) = |\tilde{g}_0|(t_\varepsilon)$. Par définition de la dérivation et de sa norme on aura aussi que

$$|\tilde{g}_i|(t_\varepsilon)\varepsilon^i = \left| \frac{1}{i!} \frac{d^i g}{dx^i} \right|(t_\varepsilon)\, \varepsilon^i \leq |\tilde{g}_0|(t_\varepsilon)$$

et donc $\tilde{g}^{-1} \in \mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![X - x(t_\varepsilon)]\!]^b_\varepsilon$. Par conséquent, $(f/g)^\sim = (\tilde{f}/\tilde{g}) \in$ $\in \mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![X - x(t_\varepsilon)]\!]^b_\varepsilon$ et par définition de U

$$\left| \left(\frac{f}{g}\right)^\sim \right|(t_\varepsilon) \leq 1\,.$$

La définition de la flèche (1.8) en découle. De plus, il est également évident que toutes les flèches dans (1.6) commutent avec la dérivation qui aura donc toujours pour norme exactement $1/\varepsilon$ (les flèches étant isométriques).

1.9. On aura besoin pendant notre travail de considérer certains types de sous-domaines affinoïdes de $\mathcal{M}(K\{x\})$. On va d'abord étudier l'algèbre affinoïde stricte

$$A = \frac{K\{x, Y, Z\}}{(x - \tilde{r}_2 Y, xZ - \tilde{r}_1)}$$

où $|\tilde{r}_1| = r_1$ et , $|\tilde{r}_2| = r_2$, $r_1, r_2 \in |K| \cap [0, 1]$, $r_2 > r_1$. On note $| - |_{\varrho, A}$ sa norme spectrale:

$$|f|_{\varrho, A} = \sup_{\xi \in \mathcal{M}(A)} |f|(\xi)$$

par [BE, 2.1.15] $| - |_{\varrho, A}$ coïncide avec le sup sur les points de l'espace rigide associé à A (Les points rigides sont denses dans l'espace de Berkovich $\mathcal{M}(A)$). Comme A est réduite, elle est équivalente à toutes les autres norme de Banach [BGR, 6.2.4]. A correspond à l'espace analytique de Berkovich $\{\xi \in \mathcal{M}(K\{x\}) \mid |x|(\xi) \leq r_2,\ |x|(\xi) \geq r_1\}$. On associe l'algèbre $\tilde{A}$ liée au quotient des fonctions qui ont une norme spectrale (i.e. le maximum dans ce cas) égale à $\leq 1, A^\circ$, modulo celles qui l'ont $< 1, A^{\circ\circ}$. $\tilde{A}$ est donnée, en remarquant que Z et Y ont une norme spectrale exactement égale à 1 et $|x|_{\varrho, A} < 1$ et que l'idéal contient aussi $ZY - \tilde{r}_1/\tilde{r}_2$ et $|\tilde{r}_1/\tilde{r}_2| < 1$ (En effet il peut être engendré par $(ZY - (\tilde{r}_1/\tilde{r}_2), x - \tilde{r}_2 Y)$), par

$$\tilde{A} = \frac{k[Z, Y]}{(ZY)}.$$

Elle correspond à l'union de $(Z = 0) \cup (Y = 0)$, et possède donc deux points génériques. Ils correspondent à la frontière de Shilov, donnée par t_{r_1} et t_{r_2}. Par la théorie de Berkovich chaque fonction $f \in A$ devrait obtenir son maximum en correspondance de ces points, i.e.

$$|f|_{\varrho, A} = \max_{\xi \in \mathcal{M}(A)} |f|(\xi) = max(|f|(t_{r_1}), |f|(t_{r_2}))\,.$$

Remarque. Dans le cas où $r_1 = r_2$, on trouve une seule composante liée à l'idéal $(YZ - 1)$. Donc un seul point dans la frontière de Shilov.

1.10. On peut, de plus, généraliser l'exemple 1.9, au sous-domaine affinoïde défini par $\{\xi \in \mathcal{M}(K\{x\}) \mid |x|(\xi) \leqslant r_2,\ |x|(\xi) \geqslant r_1,\ |x-a|(\xi) \geqslant |\bar{a}|\}$ où $a, \bar{a} \in K$, $r_1 \leqslant |a| \leqslant r_2$ avec $r_1 \leqslant |\bar{a}| \leqslant |a|$. Dans ce cas, la réduction possède trois composantes. Donc la frontière de Shilov est donnée en général par trois points: t_{r_1}, t_{r_2} et le point $E(a, |\bar{a}|)$, donné par le maximum sur tous les points ξ, $|x-a|(\xi) = |\bar{a}|$. Mais si $|\bar{a}| = |a|$ est égal à r_1 ou r_2 alors il y aura seulement deux points dans la frontière: t_{r_1}, t_{r_2}, puisque dans ce cas $E(a, |\bar{a}|)$ coincide avec un des t_{r_i}. On va noter les espaces qu'on vient d'introduire $\mathcal{M}_{r_1, r_2}$ et $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a, |\bar{a}|)$. En général, on aura $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_1, \dots, a_n; |\overline{a_1}|, \dots |\overline{a_n}|)$ $(a_i \in K,\ r_1 \leqslant |a_i| \leqslant r_2$ avec $r_1 \leqslant |\overline{a_i}| \leqslant |a_i|)$: en remarquant que les points de la frontière de Shilov sont donnés par t_{r_1}, t_{r_2} (points génériques à distance r_i de 0) et $E(a_i, |\bar{a}_i|)$, $i = 1, \dots, n$ (on suppose que les disques $E(a_i, |\bar{a}_i|)$ sont disjoints) [BER]. On notera $A_{r_1, r_2}(a_1, \dots, a_n; |\overline{a_1}|, \dots |\overline{a_n}|) = A_{r_1, r_2}(a_i; |\overline{a_i}|)$ l'algèbre affinoïde qui donne $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_1, \dots, a_n; |\overline{a_1}|, \dots |\overline{a_n}|) = \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\overline{a_i}|) = \mathcal{M}(A_{r_1, r_2}(a_i; |\overline{a_i}|))$.

A partir de la décomposition de Mittag-Leffler et pour notre construction des points de Shilov, on a alors que pour chaque élément f d'une algèbre affinoïde $A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$.

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\, |\bar{a}_i|)} \leqslant \frac{1}{r_1} |f|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\, |\bar{a}_i|)}.$$

1.11. On considère alors un opérateur différentiel dans $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_1, \dots, a_n; |\overline{a_1}|, \dots |\overline{a_n}|) = \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$ (lié à l'algèbre affinoide $A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$, avec la norme spectrale $|-|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\, |\bar{a}_i|)}$

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + c_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + c_n$$

avec $c_i \in A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$. Pour un point générique, à distance ε de 0 tel que $t_\varepsilon \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$, on peut considérer l'action de L en $(\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![X - x(t_\varepsilon)]\!]_\varepsilon^b, |-|(t_\varepsilon))$. On peut démontrer comme dans [RO1] que sa norme comme opérateur est alors

$$|L|(t_\varepsilon) = \max_i \left| \frac{\tilde{c}_{n-i}}{i!} \right| (t_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^i} = \max_i |c_{n-i}|(t_\varepsilon) \frac{1}{\varepsilon^i}.$$

Si on a un intervalle $[b_1, b_2] \subset \boldsymbol{R}^{\geqslant 0}$ tel que pour chaque $\varepsilon \in [b_1, b_2]$, $t_\varepsilon \in$

$\in \mathcal{M}(A_{r_1, r_2}(a_i; \overline{a_i}))$, alors la fonction

$$[b_1, b_2] \to \boldsymbol{R}^{\geq 0}$$
$$\varepsilon \mapsto |L|(t_\varepsilon)$$

est continue.

On peut aussi définir le rayon de convergence des solutions de L à chaque point générique $t_\varepsilon \in \mathcal{M}(A_{r_1, r_2}(a_i; |\overline{a}_i|)) = \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\overline{a}_i|)$, en regardant comme dans [RO1] ses solutions dans $\mathcal{H}(t_\varepsilon)[\![X - x(t_\varepsilon)]\!]$ et en disant qu'une série $\sum a_i (X - x(t_\varepsilon))^i$ a un rayon de convergence $\eta \in \boldsymbol{R}$ si pour chaque $r < \eta$, $\lim |a_i|(t_\varepsilon)\, r^i = 0$.

Remarque. Pour chaque t_ε on peut aussi bien considérer L opérant sur $\mathcal{H}(t_\varepsilon)$. Pour obtenir des résultats analogues et plus généraux voir [BD].

1.12. Pour s'adapter aux notations de Dwork et Robba [DR], [RO1], on va introduire pour chaque $r \in \boldsymbol{R}^{>0}$ l'espace $\mathcal{A}^r_{t_\eta}$. Ce sera l'espace des séries dans $\mathcal{H}(t_\eta)[\![X - x(t_\eta)]\!]$ qui ont rayon de convergence égal à r. i.e. des séries $\sum b_i (X - x(t_\eta))^i$, telles que pour chaque $\overline{r} < r$, $\lim |b_i|(t_\eta)\, \overline{r}^i = 0$. Bien sûr, on a une immersion, $r \leq \eta$,

$$\mathcal{H}(t_\eta)[\![X - x(t_\eta)]\!]^b_\eta \to \mathcal{A}^r_{t_\eta}.$$

En particulier, chaque élément de $\mathcal{H}(t_\eta)$ peut être vu comme un élément de $\mathcal{A}^\eta_{t_\eta}$ (via 1.4 et 1.7). On peut aussi introduire pour chaque η, et pour chaque r l'espace de Banach $\mathcal{W}^r_{t_\eta}$ des séries limitées $\sum b_i (X - x(t_\eta))^i \in \mathcal{H}(t_\eta)[\![X - x(t_\eta)]\!]$, telles que

$$\sup |b_i|(t_\eta) r^i < \infty.$$

La norme de Banach est donnée par $|\sum b_i (X - x(t_\eta))^i|_{\mathcal{W}^r_{t_\eta}} = \sup |b_i|(t_\eta)\, r^i$. On a de plus, pour chaque $r \leq \eta$ une immersion $\mathcal{H}(t_\eta) \to \mathcal{W}^r_{t_\eta}$ qui est une isometrie pour $r = \eta$.

1.13. On définira $\mathcal{R}_\eta = \mathcal{H}(t_\eta)[d/dx]$ et $\mathcal{R}_o = K(x)[d/dx]$. L'image de $K(x)$ dans $\mathcal{H}(t_\eta)$ est dense. Un opérateur dans $\mathcal{R}_\eta$ peut être vu comme un opérateur dans $\mathcal{W}^r_{t_\eta}$, $r \leq \eta$ et, en particulier dans $\mathcal{H}(t_\eta)[\![X - x(t_\eta)]\!]^b_\eta = \mathcal{W}^\eta_{t_\eta}$; on peut donc considérer sa norme comme opérateur sur l'espace de Banach $\mathcal{W}^r_{t_\eta}$, $r \leq \eta$ (dans ce cas $|d/dx|_{\mathcal{W}^r_{t_\eta}} = 1/r$).

Si on considère maintenant un opérateur comme dans 1.11, L, défini sur $\mathcal{M}(A_{r_1, r_2}(a_1, \ldots, a_n; |\overline{a_1}| \ldots |\overline{a_n}|)) = \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\overline{a}_i|)$, alors pour chaque $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$, on peut voir L comme élément de $\mathcal{R}_\eta$ et, donc, operant sur $\mathcal{W}^r_{t_\eta}$, $r \leq \eta$. Soit donc L dans $\mathcal{R}_\eta$, on considère l'idéal $\mathcal{R}_\eta L$ dans $\mathcal{R}_\eta$. Sur $\mathcal{R}_\eta$ on pose la topologie donnée en considérant ces éléments comme operateurs sur $\mathcal{W}^r_{t_\eta}$, $r \leq \eta$: soit donc $\overline{\mathcal{R}_\eta L}$ l'idéal clotûre de $\mathcal{R}_\eta L$ par cette topologie [RO1]. $\mathcal{R}_\eta$ etant euclidien, on peut trouver son générateur unitaire R dans $\mathcal{R}_\eta$: $\mathcal{R}_\eta R = \overline{\mathcal{R}_\eta L}$.

En général pour un opérateur L de $\mathcal{R}_\eta$, on note $Ker_{t_\eta} L$ son noyau comme opérateur sur $\mathcal{H}(t_\eta)[\![X - x(t_\eta)]\!]$, on peut alors prouver exactement comme dans [RO1, 2.6] que

$$Ker_{t_\eta} R = Ker_{t_\eta} L \cap \mathcal{W}^r_{t_\eta}.$$

1.14. En remarquant que les rayons de convergence forme un ensemble fini [P], on a que pour chaque $r \leq \eta$ et pour chaque $L \in \mathcal{R}_\eta$ une décomposition dans $\mathcal{R}_\eta$,

$$L = N \circ M$$

$N, M \in \mathcal{R}_\eta$, telle que

$$Ker_{t_\eta} M = Ker_{t_\eta} L \cap \mathcal{A}^r_{t_\eta}.$$

(voire [DW-RO § 4]).

2. Le théorème de décomposition de Dwork-Robba.

On peut donc considérer comme avant un opérateur différentiel L, $L = (d^n/dx^n) + c_1(d^{n-1}/dx^{n-1}) + \ldots + c_n$, défini sur un espace de Berkovich $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$. On suppose que $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i, \bar{a}_i)$, et $A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$ est l'algèbre affinoïde associée (§ 1). On rappelle que, comme l'algèbre $A_{r_1, r_2}(a_i; \bar{a}_i)$ est réduite, sa norme spectrale $| - |_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)}$ est une norme de Banach, qui est donc équivalente à toutes les autres normes de Banach. Puisque pour $A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$, comme précédemment, la frontière de Shilov est donnée par les deux points génériques t_{r_1} et t_{r_2} et par $E(a_i, |\bar{a}_i|)$, on a pour $f \in A$

$$\left| \frac{df}{dx} \right|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)} \leq \frac{1}{r_1} |f|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)}.$$

De plus, en regardant toujours la frontière de Shilov, on s'aperçoit que si $c \in A_{r_1, r_2}(a_i, |\bar{a}_i|)$ alors sa norme comme opérateur sur $A_{r_1, r_2}(a_i, |\bar{a}_i|)$ est plus petite ou égale à $|c|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i, |\bar{a}_i|)}$. On a donc pour L que sa norme comme opérateur sur $A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$ est bornée par

$$|L|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)} \leqslant \sup_i |c_i|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)} \frac{1}{r_1^{n-i}} .$$

Soit maintenant $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$, un point générique à distance η de 0, alors dans les notations du paragraphe 1,

PROPOSITION 2.1. *On considère un opérateur L sur espace de Berkovich $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$ (lié à l'algèbre affinoïde $A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$). On suppose qu'au point t_η on ait une décomposition dans $\mathcal{R}_\eta$, $L = N_\eta \circ M_\eta$ où toutes les solutions de rayon r de L sont exactement celles de M_η. Alors il existe un sous-espace de Berkovich $\mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ \bar{a}_i')$ (lié à l'algèbre affinoïde $A_{r_1', r_2'}(a_i';\ \bar{a}_i')$), $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ \bar{a}_i') \subset \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$, tel qu'on puisse avoir une décomposition $L = N \circ M$ où M, N sont des opérateurs dans $\mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|)$, qui induisent N_η et M_η dans la restriction à $\mathcal{R}_\eta$.*

La démonstration de ce théorème est l'analogue de la démonstration de Dwork-Robba ([DW-RO, § 3, § 4]) On va de toute facon l'esquisser.

Soit donc comme avant $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$, et soit $\varrho \leqslant \eta$. On considère une fonction analytique

$$F : \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|) \times D(0, \varrho^+)^{2s} \to \mathcal{H}(t_\eta)^m$$

Si on note $X = (X_1, \ldots, X_s)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_s)$, alors $F(X, Y) = \sum c_{v, \nu} X^v Y^\nu$ et $c_{v,\nu} \in A_{r_1, r_2}(a_i,\ |\bar{a}_i|)$. On a donc

$$\varrho^{|v+\nu|} |c_{v,\nu}|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i, \bar{a}_i)} \leqslant M .$$

Soit maintenant $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_s) \in \mathcal{H}(t_\eta)^s$ une solution du système $F(X, (dX/dx)) = 0$, telle que $|\boldsymbol{u}| \leqslant \varrho\eta$. On peut donc définir la flèche tangentielle

$$L_{\boldsymbol{u}}(z_1, \ldots, z_s) = \sum z_i \frac{\partial F}{\partial X_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') + \sum z_i' \frac{\partial F}{\partial Y_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}')$$

$$L_{\boldsymbol{u}} : \mathcal{H}(t_\eta)^s \to \mathcal{H}(t_\eta)^m .$$

THÉORÈME 2.2. *Si $L_{\boldsymbol{u}}$ est injectif sur $\mathcal{A}_{t_\eta}^\eta$, alors $\boldsymbol{u} \in A_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|)$, où $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|) \subset \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$.*

Pour prouver l'assertion, on considère alors $X \in A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)^s$ et si $|X|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)} \leqslant \varrho r_1$ alors $G(X) = F(X, (dX/dx))$ existe, $G(X) \in \mathcal{H}(t_\eta)^m$.

Dans $A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)^s$ on peut prendre le dévelopement de Taylor de G

$$G(X+\zeta) = G(X) + L_X(\zeta) + N_X(\zeta)$$

où $L_X(\zeta) = \sum \zeta_i(\partial F/\partial X_i)(X, (dX/dx)) + \sum \zeta_i'(\partial F/\partial Y_i)(X, (dX/dx))$.

PROPOSITION 2.3. *Soit L un opérateur défini sur $\mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i, |\bar{a}_i|)$ (espace associé à l'algèbre $A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$); alors pour chaque $\varepsilon > 0$, et pour chaque $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$ il existe un sous domaine affinoïde $\mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|)$ (lié à A'), tel que $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|) \subset \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i;$ $|\bar{a}_i|)$ où on a*

$$|L|_{\varrho, A_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|)} < |L|(t_\eta) + \varepsilon\,.$$

DÉMONSTRATION. Comme on a vu

$$|L|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i; \bar{a}_i)} \leq \sup_i |c_i|_{\varrho, A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)} \frac{1}{r_1^{n-i}}\,.$$

Par définition de l'espace de Berkovich, si $f \in A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|)$ alors la fonction «valutation» $|f|(\xi)$, $\xi \in \mathcal{M}(A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|))$ est continue. En particulier, si on considère t_η alors pour chaque $\bar{\varepsilon} \in \boldsymbol{R}^{\geq 0}$ il existe un intervalle $[c_1, c_2]$, $\eta \in [c_1, c_2]$ et $t_\nu \in \mathcal{M}(A_{r_1, r_2}(a_i;\ |\bar{a}_i|))$ si $\nu \in [c_1, c_2]$ tel que pour chaque t_ν, $\nu \in [c_1, c_2]$

$$|f|(t_\nu) < |f|(t_\eta) + \bar{\varepsilon}\,.$$

En particulier á partir de $[c_1, c_2]$ on peut choisir les a_i' de sorte que $a_i' =$ $= a_j$ avec $|a_j| \in [c_1, c_2]$, le même argument que avant est alors valable pour $E(a_i, |\bar{a}_i'|)$. On peut donc supposer, quitte à choisir de nouveaux r_1', r_2' et $|\bar{a}_i'|$ et a_i' que dans $\mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i';\ |\bar{a}_i'|)$ (associé à l'algèbre $A_{r_1', r_2'}(a_i',$ $|\bar{a}_i'|)$) on ait

$$|f|_{\varrho, A_{r_1', r_2'}(a_i;\ |\bar{a}_i'|)} < |f|(t_\eta) + \bar{\varepsilon}\,.$$

On peut alors appliquer cette construction aux a_i pour obtenir

$$|L|_{\varrho, A_{r_1', r_2'}(a_i;\ |\bar{a}_i'|)} \leq \sup_i (|c_i|(t_\eta) + \bar{\varepsilon}) \frac{1}{r_1'^{\,n-i}}\,.$$

On voit tout de suite qu'on obtient la formule désirée. Q.E.D.

On rappelle que l'image de $K(x)$ dans $\mathcal{H}(t_\eta)$ est dense. Un élément sûr $\mathcal{R}_\eta$ peut être vu comme un opérateur dans $\mathcal{H}(t_\eta)[X - x(t_\eta)]_\eta^b$; on peut donc considérer sa norme comme opérateur sur l'espace de Banach $\mathcal{H}(t_\eta)[X - x(t_\eta)]_\eta^b = \mathcal{W}_{t_\eta}^\eta$. On démontre:

LEMME 2.4. *Si M est une matrice d'ordre n à coefficients dans $\mathcal{R}_\eta$ qui est injective comme endomorphisme de $(\mathcal{A}_{t_\eta}^\eta)^n$, alors il existe une matrice Q à coefficients dans $\mathcal{R}_0$ telle que*

$$|QM - I_n|(t_\eta) < 1 .$$

De plus Q est injective dans $\mathcal{H}(t_\eta)[\![X - x(t_\eta)]\!]_\eta^b$.

DÉMONSTRATION La démonstration se déroule exactement comme dans [DR], avec les changements de notations qu'on vient d'indiquer. Q.E.D.

Par hypothèses L_u est injectif comme opérateur sur $\mathcal{A}_{t_\eta}^\eta$, alors grâce á la proposition précédente, on peut trouver Q dans $\mathcal{R}_0$ tel que

$$|QL_u - I_n|(t_\eta) < 1 .$$

Soit maintenant $|\boldsymbol{u}|(t_\eta) < \varrho\eta$, on pose

$$\sigma > |Q|(t_\eta)$$

$$q < \varrho\eta \min\left(1, \frac{\varrho\eta}{\sigma M}\right)$$

et, finalement,

$$\omega < q \min\left(1, \frac{\varrho\eta}{\sigma M}\right).$$

Etant $K(x)$ dense dans $\mathcal{H}(t_\eta)$, on peut choisir $\boldsymbol{v} \in K(x)^s$ tel que

$$|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}|(t_\eta) < \omega$$

et

$$|L_v - L_u|(t_\eta) < \frac{1}{\sigma} .$$

Il existe alors ([DW-RO]) une algèbre affinoïde $A_{r_1', r_2'}(a_i'; |\bar{a}_i'|)$, $t_\eta \in \mathcal{M}_{r_1', r_2'}(a_i'; |\bar{a}_i'|) \subset \mathcal{M}_{r_1, r_2}(a_i; |\bar{a}_i|)$, (où les pôles de $\boldsymbol{v}$ vont ajouter des

a_i), pour laquelle on a (lemma 2.4)

$$|Q|_{\varrho, A_{r_1', r_2'}(a_i'; |\bar{a}_i'|)} < \sigma$$

$$|QL_v - I|_{\varrho, A_{r_1', r_2'}(a_i'; |\bar{a}_i'|)} < 1$$

et

$$|v|_{\varrho, A_{r_1', r_2'}(a_i'; |\bar{a}_i'|)} < \varrho r_1'$$

($r_1' \leq \eta \leq r_2'$). En effet la condition $|v - u|(t_\eta) < \omega$ implique que $|v - u|(t_\eta) < \varrho\eta$ et en étant $|u|(t_\eta) < \varrho\eta$, on peut conclure que $|v|(t_\eta) < \varrho\eta$. A ce point il suffit de recopier la démonstration de Dwork et Robba.

3. Surconvergence et convergence au disque générique.

On veut donner une généralisation de notre résultat dans [BC], où on avait montré qu'un isocristal sur un ouvert de la droite projective avec des singularités méromorphes est surconvergent si et seulement s'il a la propriété de rayon maximal au point générique. On va montrer la même équivalence sans hypothèse sur les singularités. Voire aussi [BD] pour une généralisation.

Considérons donc $X_k = \boldsymbol{P}^1(k) \backslash S$ où $S = \{\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n\}$ (sans restriction on peut supposer que $\bar{s}_n = \infty \in S$) est un sous ensemble. On peut considérer le relèvement formel de $\boldsymbol{P}^1(k)$ dans le schéma (formel) $P = P^1_{\mathcal{V}}$. Dans la situation envisagée le tube de X_k dans $P = \boldsymbol{P}^1_{\mathcal{V}}$, $]X_k[_P$, est donné par l'espace de Berkovich $]X_k[_P = \mathcal{M}_{0,1}(s_1, \ldots, s_{n-1};\ |s_1|, \ldots, |s_{n-1}|) = \mathcal{M}_{0,1}(s_i, ;\ |s_i|)$ associé à l'algèbre affinoïde

$$\frac{K\{x, Y_1, \ldots Y_{n-1}\}}{((x - s_i)\, Y_i - s_i, i = 1, \ldots, n-1)} = A_{0,1}(s_1, \ldots, s_{n-1}; |s_1|, \ldots, |s_{n-1}|) \tag{3.0}$$

où $s_i \in \mathcal{V}$ et dont la réduction est $\bar{s}_i$. On a donc que les s_i appartiennent à différentes classes résiduelles. Si $s_i = 0$, on définit $(x - s_i)\, Y_i - s_i = xY_i - 1$. On remarque que, si $s_1 = 0$ alors on a, dans cette definition, $\mathcal{M}_{0,1}(0, s_2, \ldots, s_{n-1};\ 0, |s_2|, \ldots, |s_{n-1}|) = \mathcal{M}_{1,1}(s_2, \ldots, s_{n-1};\ |s_2|, \ldots, |s_{n-1}|)$ (ce qui est cohérent avec les notations précédentes). Comme on a vu précédemment pour $\mathcal{M}_{0,1}(s_i;\ |s_i|)$ on a un seul point dans la frontière de Shilov qui est lié au point générique de distance 1 à 0 dans $\mathcal{M}(K\{x\})$: t_1 ($E(s_i, |s_i|)$ coincident avec t_1).

Une base de voisinages stricts de $]X_k[_P$ dans $P^1_{\mathcal{V}}$ est donnée par les espaces de Berkovich V_λ, $\lambda < 1$, $\lambda = |\overline{\lambda}|$, $\overline{\lambda} \in K$,

$$V_\lambda = \mathcal{M}\left(\frac{K\{x, Y_1, \ldots, Y_n\}}{((x - a_i)\, Y_i - \overline{\lambda}\ i = 1, \ldots, n-1;\ Y_n - \overline{\lambda} x)}\right) = \mathcal{M}(A_\lambda).$$

Dans cette situation on considère un module libre $(\mathcal{N}, \nabla)$ avec une connexion ∇, définie sur V_λ. Dans une base de $\mathcal{N}$ on peut définir l'action de ∇ par une matrice G_1 à coefficients dans les fonctions dans A_λ. On va noter G_i, $i \in \boldsymbol{N}$ les matrices itérées. On peut considérer sa restriction à $]X_k[_P$, $(\mathcal{N}_{]X_k[_P}, \nabla_{]X_k[_P})$.

Proposition 3.1. *L'isocristal* $(\mathcal{N}_{]X_k[_P}, \nabla_{]X_k[_P})$ *est convergent si et seulement si le rayon de convergence au point de la frontière de Shilov est* 1 (*i.e. soluble en ce point*).

Démonstration. L'algèbre affinoïde A qui représente $]X_k[_P = \mathcal{M}_{0,1}(s_1, \ldots, s_n)$ est réduite donc la norme spectrale est équivalente à toutes les autres normes de Banach pour A. Par conséquent, l'hypothèse de convergence se lit, pour chaque $\eta < 1$

$$\lim_i \left| \frac{1}{i!} G_i \right|_{\varrho, A} \eta^i = 0 .$$

Parmi les points, il y a aussi le point de la frontière de Shilov et donc on obtient le résultat. Pour la réciproque, la condition de convergence au seul point de la frontière de Shilov t_1 s'ecrit: pour chaque $\eta < 1$

$$\lim_i \left| \frac{1}{i!} G_i \right| (t_1)\, \eta^i = 0 .$$

Mais par définition de frontière on a $|(1/i!)\, G_i|_{\varrho, A} = |(1/i!)\, G_i|(t_1)$. Q.E.D.

Remarque. En général, un isocristal $(\mathcal{N}', \nabla')$ défini sur $]X_k[_P$ est convergent si et seulement si, il a le rayon maximal dans le seul point de sa frontière de Shilov.

On s'intéresse maintenant à la surconvergence. Soit comme avant $(\mathcal{N}, \nabla)$ un isocristal défini sur V_λ. On sait que la propriété de surconvergence de $(\mathcal{N}, \nabla)$ est une propriété locale sur $\boldsymbol{P}^1_k$ (la compactification). On peut donc recouvrir $\boldsymbol{P}^1_k$ par les ouverts donnés par $X_i = \boldsymbol{P}^1_k \setminus \{\overline{s}_1, \ldots\ldots, \overline{s}_{i-1}, \overline{s}_{i+1} \cdots \infty\}$. On peut, pour chaque X_i, considérer alors la situation locale suivante (s_i sont des relèvements de $\bar{s}_i$):

$$X \cap X_i \to X_i \to Spf \frac{\mathcal{V}\{x, Y_1, \ldots Y_i, \ldots Y_{n-1}\}}{((x - s_j)\, Y_j - s_j, j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots n-1)} = Q\,.$$

Par un autre changement de variable on peut se réduire à $s_i = 0$ et $i = 1$ et donc à:

$$]X_i \cap X[_Q = \mathcal{M}\left(\frac{K\{x, Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}}{(xY_1 - 1, (x - s_j)\, Y_j - s_j, j = 2, \ldots, \ldots n-1)} \right).$$

Finalement la trace d'un voisinage strict dans cette nouvelle situation locale est

$$U_\lambda = \mathcal{M}\left(\frac{K\{x, Y_1, \ldots, \ldots Y_{n-1}\}}{(xY_1 - \bar{\lambda}, (x - s_j)\, Y_j - s_j, j = 2, \ldots, n-1)} \right) = \mathcal{M}_{\lambda,1}(s_2, \ldots, s_{n-1})$$

$|\bar{\lambda}| = \lambda$. Comme on a vu précédemment, il y a deux points dans la frontière de Shilov de U_λ: le point générique à distance 1 de l'origine (i.e. le point générique de $]X_k[_P$) et le point générique à distance λ de 0. On rappelle alors que la condition locale pour la surconvergence, est que pour chaque $\varepsilon < 1$ il existe λ' tel que pour chaque $\lambda > \lambda'$

$$\lim_i \left\| \frac{1}{i!} G_i \right\| \varepsilon^i = 0\,,$$

pour une norme de Banach dans

$$\frac{K\{x, Y_1, \ldots, \ldots Y_{n-1}\}}{(xY_1 - \bar{\lambda}, (x - s_j) Y_j - s_j,\ j = 2, \ldots, n-1)}$$

donc, pour la norme spectrale $| - |_{\varrho, U_\lambda}$, en particulier. On considère maintenant une adaptation du théorème général de Dwork-Robba (cfr. [BD, 4.2] pour la généralité)

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses précédentes, soit $t_\xi \in U_\lambda$, un point générique à distance ξ de 0: R_ξ est le rayon de convergence à t_ξ si et seulement si*

$$\left| \frac{1}{i!} G_i \right| (\xi) \leq C\{|i|, n-1\}_p R_\xi^{-i}$$

où

$$C = \max_{i<n}\left(\left| \frac{1}{i!} G_i \right| (\xi)\, R_\xi^{-i} \right).$$

En particulier, cela est vrai pour le point générique dont le rayon de convergence est 1. On a aussi le théorème de continuité du rayon de convergence (cfr. [BD, 3.3] pour la généralité), qui pour ce qui nous concerne peut être donné par

THÉORÈME 3.3. *Pour chaque* $\xi \geq \lambda$, $t_\xi \in U_\lambda$, *un point générique à distance* ξ *de* 0. *Alors la fonction*

$$[\lambda, 1] \to \boldsymbol{R}^{\geq 0}$$

$$\xi \mapsto R_\xi$$

est continue.

On a donc le résultat suivant:

THÉORÈME 3.4. *Sous les hypothèses précédentes,* $(\mathcal{N}, \nabla)$ *est surconvergent si et seulement si* $(\mathcal{N}_{]X_k[_P}, \nabla_{]X_k[_P})$ *est convergent.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est immédiate dans un des sens. Afin de démontrer la surconvergence on peut se réduire au cas local. Donc, on peut supposer qu'on est dans U_λ et que l'isocristal est convergent. Mais alors, pour chaque $\varepsilon < 1$, on peut trouver λ' tel que pour chaque $\lambda > \lambda'$, on a que $R_\lambda > \varepsilon$. Pour le théorème de Dwork-Robba, on a alors pour chaque $1 \geq \lambda > \lambda'$:

$$\left| \frac{1}{i!} G_i \right| (t_\lambda) \leq C\{\,|i|\,, n-1\}_p R_\lambda^{-i}$$

avec

$$C = \max_{i<n}\left(\left| \frac{1}{i!} G_i \right| (t_\lambda)\, R_\lambda^{-i} \right).$$

On conclut alors, en rappelant que les points de la frontière de Shilov (i.e. où chaque fonction atteint son maximum) pour U_λ sont t_λ et t_1 et que U_λ est associé à une algèbre réduite. Donc la norme spectrale est une norme de Banach. Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

[BC] F. BALDASSARRI - B. CHIARELLOTTO, *Algebraic versus rigid cohomology with logarithmic coefficients*, in *Barsotti Memorial Symposium*, Perspectives in Math., vol. **15**, Academic Press (1994), pp. 11-50.

[BD] F. BALDASSARRI - L. DI VIZIO, *On arithmetic size of linear differential equations*, A paraître.

[BE] V. BERKOVICH, *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Math. Surveys and Monographs, Number 33, AMS 1990.

[B] P. BERTHELOT, *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, Pre publication, Rennes.

[BGR] S. BOSCH - U. GUNTZER - R. REMMERT, *Non archimedean analysis*, Grundlehren der math. Wissenschaften 261, Springer-Verlag 1984.

[DR-RO] B. DWORK - PH. ROBBA, *On ordinary linear differential equations*, T.A.M.S., **231** (1977), pp. 1-46.

[P] E. PONS, *Modules différentiels non solubles. Rayons de convergence et Indices*, Dans ce volume.

[RO1] PH. ROBBA, *On the index of p-adic differential operators I*, Annals of Math., **101** (1975), pp.280-316.

Manoscritto pervenuto in redazione l'11 settembre 1998.