RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAKHDAR HAMMOUDI

Exemples de nil-algèbres et de groupes infinis

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 102 (1999), p. 219-232

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1999__102__219_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 102 (1999)

Exemples de Nil-Algèbres et de Groupes Infinis.

LAKHDAR HAMMOUDI (*)

1. Introduction.

For any field $\mathbb{K}$ and for every integer $d \geq 2$, Golod has constructed a non nilpotent d-algebra (i.e. algebra with d generators) A such that every $(d-1)$-subalgebra is nilpotent. These algebras are called Golod-algebras. The analogous results for the Lie algebra $A\mathcal{L}$ which is generated by fixed generators $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_d$ of A and for the subgroup $G = \langle 1 + \overline{X}_1, \ldots, 1 + \overline{X}_d \rangle$ of the p-group $1 + A$, where 1 is the unit of $\mathbb{K}$, hold [1]. $A\mathcal{L}$ and G are called the Golod-Lie algebra and Golod group respectively.

We shall say that an algebra is nil (respectively n-nilpotent) if every element is nilpotent (respectively every set of n elements generate a nilpotent subalgebra). We define the minimum degree of a polynomial as the degree of its monomial of least degree and the maximum degree as the degree of its monomial of greatest degree.

By using Golod's technique in [1], Sozutov constructed for every k in a fixed finite set of integers, and for any finite field a non nilpotent nil-d-algebra such that any $(d^k - 1)$ elements of minimum degree k generate a nilpotent subalgebra [8]. In this work, we generalize both Golod's and Sozutov's results by constructing for any field a non nilpotent d-algebra which is related to a set $\boldsymbol{M}$ (not necessarily finite) such that for every $\alpha_t \in \boldsymbol{M}$, any α_t elements of minimum degrees at least $t \geq 1$ generate a nilpotent subalgebra (Théorème 2.2). This enables us to distinguish the different classes of groups with (a, b)-nilpotency. For example, we con-

(*) Indirizzo dell'A: Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1409 W. Green St. Urbana, Illinois 61801, USA.
E-mail: lakhdar@math.uiuc.edu

struct conjugate biprimitively nilpotent groups which are not biprimitively nilpotent. We give a more precise statement of other examples of this type below. Thus our results applied to periodic groups distinguish also Šunkov's classes of groups with (a, b)-finiteness. So, we solve in the positive Sozutov's problem [7, Problem 8.66]. Finally, we deal with some theorems on decompositions. Firstly, for any integer $n \geqslant 2$ the sum of two n-nilpotent ideals of associative algebras may be not n-nilpotent. We deduce analogous results for Lie algebras and groups. Secondly, the product of two (a, b)-nilpotent (finite) normal subgroups may be not (a, b)-nilpotent (finite).

Acknowledgments. This paper is the first part of the unpublished work «Exemples de nil-algèbres et d'algèbres d'Engel de dimension infinie» written by the author some years ago and which has already been cited in 1995 in [2] (see also MR. 96m: 16032 and [3, 4]). Independently, by using a similar construction to ours, Sozutov proved that the sum of two n-nilpotent ideals may be not n-nilpotent [9]. However, his construction is based on enumeration and a finite set $\boldsymbol{M}$ as he has done in [8].

The author would thank the referee for his valuable suggestions. Also, we thank Professor D. J. S. Robinson for making some corrections and Professor O. H. Kegel for supervising this work.

2. Exemples de nil-algèbres non nilpotentes.

2.1. Soit $F^{(1)}$ l'algèbre libre des polynômes sans terme constant en les indéterminées non commutantes $X_1, \ldots, X_d$ $(d \geqslant 2)$ sur un corps quelconque $\mathbb{K}$. Notons par F_i le sous-espace de $F^{(1)}$ des polynômes homogènes de degré $i \geqslant 1$, et posons $F^{(k)} = \bigoplus_{i \geqslant k} F_i$. Signalons que cette graduation est conservée dans tout quotient de $F^{(1)}$ par un idéal homogène.

Golod a démontré ce qu'on désigne par «lemme de Golod»; si un idéal I de $F^{(1)}$ est engendré par une famille de polynômes homogènes $f_1, f_2, \ldots$ tous de degré supérieur ou égal à 2, et si les nombres r_i de polynômes de degré i dans cette suite vérifient $r_i \leqslant \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{i-2}$ pour tout $i \geqslant 2$ où, ε est un réel fixé vérifiant $0 < \varepsilon < 1/2$ alors, l'algèbre $A = F^{(1)}/I$ est de dimension infinie [1].

Soit $\boldsymbol{M} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\}$ un ensemble d'entiers positifs pour lequel il existe un réel ε, $0 < \varepsilon < 1/2$ tel que $\alpha_{i-1} \leqslant \alpha_i < (d - 2\varepsilon)^i$ $\forall i \geqslant 1$ où, $\alpha_0 = 1$.

On se propose de construire des algèbres de Golod de la forme $A = F^{(1)}/I$ où, I est un idéal vérifiant le lemme de Golod. Dans ce cas, A hérite la graduation de $F^{(1)}$. On pose alors $A^{(k)} = (F^{(k)} + I)/I$, $\forall k \geqslant 1$. Sous ces notations, on construit une nil-d-algèbre A non-nilpotente telle que α_k polynômes de degrés minimums supérieurs ou égaux à k (c.à.d. appartennant à $A^{(k)}$) engendrent une sous-algèbre nilpotente, pour tout $\alpha_k \in \boldsymbol{M}$. En faisant varier l'ensemble $\boldsymbol{M}$, on généralise ainsi les nil-algèbres construites dans [1, 8, 9]. Une des caractéristiques des exemples traités ici est la *résiduelle finitude*. Une algèbre est dite résiduellement de dimension finie et par abus de language, résiduellement finie si et seulement si, l'intersection de toutes ses sous-algèbres de codimension finie est la sous-algèbre triviale. On sait que le quotient d'une algèbre graduée, résiduellement finie, par un idéal homogène donne une algèbre résiduellement finie. Les algèbres libres étant résiduellement finies, les algèbres construites ici le sont donc aussi.

On définit le degré de nilpotence d'une algèbre, comme étant le plus petit entier h tel que tout produit de longueur h de toute collection de polynômes soit nul.

2.2. THÉORÈME. *Soit $\boldsymbol{M}$ l'ensemble défini ci-dessus. Pour tout entier $d \geqslant 2$ et sur tout corps, il existe une nil-d-algèbre résiduellement finie de dimension infinie telle que pour tout $\alpha_t \in \boldsymbol{M}$ on a: pour toute famille de α_t polynômes de degrés minimums supérieurs ou égaux à t, il existe un entier h (dépendant seulement de t et des degrés maximums de ces éléments) tel que tout produit de longueur h de ces α_t polynômes soit nul.*

DÉMONSTRATION. On fixe une fois pour toute un réel ε, $0 < \varepsilon < 1/2$ vérifiant pour tout $\alpha_i \in \boldsymbol{M}$, $\alpha_i < (d - 2\varepsilon)^i$.

Conformément au lemme de Golod, il est suffisant de construire un idéal I de $F^{(1)}$ engendré par des polynômes homogènes $f_1, f_2, \ldots, f_k, \ldots$ de $F^{(2)}$, vérifiant la condition $r_i \leqslant \varepsilon^2 (d - 2\varepsilon)^{i-2}$ $\forall i \geqslant 2$ et tels que pour tout $\alpha_t \in \boldsymbol{M}$, tout α_t polynômes de $(F^{(t)} + I)/I$ engendrent une sous-algèbre nilpotente de degré de nilpotence dépendant seulement de t et du degré maximum des α_t éléments.

On construit cette suite par induction sur les degrés des polynômes. Supposons que le résultat soit obtenu pour les polynômes de degrés minimum $k \leqslant t - 1$ et de degrés maximum au plus $t' - 1$. On suppose donc construit un idéal $I_{(t-1, t'-1)}$ engendré par des polynômes homogènes f_1,

$f_2, \ldots, f_{n_{(t-1,t'-1)}}$ satisfaisant le lemme de Golod et tels que pour tout $\alpha_k \in \in \boldsymbol{M}$, tout α_k éléments de $F^{(1)}/I_{(t-1,t'-1)}$ de degré minimum $k \leqslant t-1$ et de degrés maximum au plus $t'-1$ engendrent une sous-algèbre nilpotente de degré de nilpotence dépendant uniquement de k et $t'-1$.

Montrons qu'on peut étendre cette suite au système de polynômes homogènes $f_1, f_2, \ldots, f_{n_{(t-1,t'-1)}}, \ldots, f_{n_{(t,t')}}$ qui vérifient le lemme de Golod avec la condition $r_i \leqslant \varepsilon^2(d-2\varepsilon)^{i-2}$ $\forall i \geqslant 2$ et qui engendrent un idéal $I_{(t,t')}$ ayant la propriété suivante: pour tout $\alpha_k \in \boldsymbol{M}$, tout α_k polynômes de $F^{(1)}/I_{(t,t')}$ de degrés minimum $k \leqslant t$ et de degrés maximum au plus t' engendrent une sous-algèbre nilpotente de degré de nilpotence dépendant seulement de t et t'.

Soit alors, un système de Golod de α_t ($\alpha_t \in \boldsymbol{M}$) polynômes généraux de degré minimum t et de degré maximum t'

$$g_j = c_{1,j}^{(1)} X_1^t + \ldots + c_{d^t,j}^{(1)} X_d^t + c_{1,j}^{(2)} X_1^{t+1} + \ldots + \\ + c_{d^{t+1},j}^{(2)} X_d^{t+1} + \ldots + c_{d^{t'},j}^{t'} X_d^{t'},\ j = 1, \ldots, \alpha_t.$$

On considère les α_t^N produits possibles $g_{j_1} \ldots g_{j_N}$ de longueur N. Le polynôme $g_{j_1} \ldots g_{j_N}$ a pour coefficients $c_{1,1}^{(1)}, \ldots, c_{d^{t'},\alpha_t^{t'}}^{t'}$ qui sont considérés comme des inconnues. Les coefficients des monômes $c_{1,1}^{(1)}, \ldots, c_{d^{t'},\alpha_t^{t'}}^{t'}$ sont alors les polynômes homogènes de degré i en $X_1, \ldots, X_d$, avec $tN \leqslant i \leqslant \leqslant t'N$. On rajoute ces polynômes au segment $f_1, f_2, \ldots, f_{n_{(t-1,t'-1)}}$ afin d'obtenir un nouveau système $f_1, \ldots, f_{n_{(t-1,t'-1)}}, \ldots, f_{n_{(t,t')}}$ vérifiant la condition $r_i \leqslant \varepsilon^2(d-2\varepsilon)^{i-2}$. Pour N assez grand (N étant supérieur au degré de chaque polynôme $f_1, f_2, \ldots, f_{n_{(t-1,t'-1)}}$), le nombre de polynômes homogènes de chaque degré supérieur ou égal à tN dans $f_1, \ldots, f_{n_{(t-1,t'-1)}}, \ldots, f_{n_{(t,t')}}$ est égal au nombre de monômes commutants de degré tN en $q = \alpha_t(d^t + d^{t+1} + \ldots + d^{t'})$ inconnues, multiplié par α_t^N, le nombre de monômes non commutant dans $g_{j_1} \ldots g_{j_N}$ de degré tN en α_t inconnues.

Le nombre de polynômes homogènes est alors égal à:

$$\alpha_t^N \binom{N+q-1}{q-1} \leqslant \alpha_t^N (N+q-1)^{q-1} \leqslant \alpha_t^N (tN+Q-1)^{Q-1}$$

où, $Q = \alpha_t(d + d^2 + \ldots + d^{t'})$. Pour N suffisamment grand et pour $i \geqslant tN$ on a:

$$r_i \leqslant \alpha_t^N (tN+Q-1)^{Q-1} \leqslant \varepsilon^2 (d-2\varepsilon)^{tN-2}.$$

Pour $i < tN$, cette propriété est déjà vérifiée dans le segment $f_1, \dots, f_{n(t-1,t'-1)}$.

On a donc construit le système $f_1, \dots, f_{n(t-1,t'-1)}, \dots, f_{n(t,t')}$ tel que chaque polynôme a un coefficient égal à 1. Par conséquent, les suites de polynômes homogènes ainsi construites ne dépendent pas des coefficients des polynômes généraux mis en jeu. On en déduit que le degré de nilpotence N ne dépend que de t et t'.

La réunion de tous ces segments donne une suite infinie de polynômes homogènes $f_1, f_2, \dots$ qui engendrent un idéal I tels que $F^{(1)}/I$ soit l'algèbre voulue.

2.3. Remarque. *On constate que la construction de l'idéal I est indépendante du choix du corps, l'algèbre A prise comme espace vectoriel sur toute extension du corps de base reste donc nil.*

La construction suivante montre que l'on peut avoir des algèbres de Golod à centre non trivial sans avoir recour aux annihilateurs, comme il a été fait dans [12]. Ceci étant évidement, lié à la question, encore ouverte, de Timofeyenko sur l'existence de p-groupe de Golod à centre fini [7, Problem 11.101; 12].

2.4. Soit $\overline{A} = F^{(1)}/I$ une nil-d-algèbre du Théorème 2.2 construite sous la condition $r_i \leqslant \varepsilon^2(d-2\varepsilon)^{i-2}$ $\forall i \geqslant 2$ où, ε est un nombre qui n'est pas algébrique. D'après [3, Lemme 1.6], il existe un réel ε', $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ tel que pour un certain rang i_0 on a $r_i \leqslant \varepsilon'^2(d-2\varepsilon')^{i-2}$ $\forall i \geqslant 2$, $i < i_0$ et, $r_i \leqslant$ $\leqslant \varepsilon'^2(d-2\varepsilon')^{i-2} - d$ $\forall i \geqslant i_0$. On peut donc construire une image homomorphe A de $\overline{A}$, de dimension infinie, en considérant un idéal engendré par I et un nombre fini, inférieur ou égal à d, de polynômes homogènes de degrés supérieurs à i_0. Montrons que l'on peut choisir A ayant un centralisateur $a \neq 0$, $ax = xa$, $\forall x \in A$. En effet, soit g un polynôme non nul de degré minimum $m' > i_0$ dans $\overline{A}$. Soit alors, J l'idéal engendré par I et les polynômes homogènes de $[g, \overline{X}_1], \dots, [g, \overline{X}_d]$ où, $\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_d$ sont les générateurs de $\overline{A}$. Les polynômes homogènes que l'on rajoute à I sont de degrés supérieurs à i_0 et on en a pas plus que d de chaque degré. Donc, le critère de Golod est respecté. L'algèbre $A = F^{(1)}/J$ est alors une image homomorphe de $\overline{A}$ de dimension infinie telle que $g + J \neq 0$ est un centralisateur de A. Il est clair que A est une nil-d-algèbre du théorème 2.2 assujettie au même ensemble $\boldsymbol{M}$ que $\overline{A}$. En faisant le même travail avec d'autres éléments g de degrés assez élevés, on obtient donc, 2.5. THÉORÈME. *Les algèbres du Théorèrme 2.2 peuvent être choisies ayant un centre non trivial, voire même de dimension infinie.*

Deux éléments x et y d'une algèbre vérifient la condition d'Engel si et seulement si il existe un entier non nul $n = n(x, y)$ tel que $[x,_n y] = [\ldots[[x, y], \ldots_n, y] = 0$. Une algèbre d'Engel est une algèbre dans laquelle deux éléments quelconque vérifient la condition d'Engel. Il arrive que l'on note $[x, y] = x(ady)$. Dans ce cas, $[x,_n y] = x(ady)^n$. Si pour un élément y dans une algèbre de Lie, il existe un entier n dépendant seulement de y tel que pour tout élément x on a $x(ady)^n = 0$ alors, y est dit nilpotent. Si tous les éléments de l'algèbre de Lie sont nilpotents, on parle alors, de nil-algèbre de Lie.

Soit A une algèbre associative. On note par $A\mathcal{L}$ la sous-algèbre de Lie engendrée par un système de générateurs fixés de A et munie de l'opération $[a, b] = ab - ba$ pour tout a et b dans $A\mathcal{L}$. Un résultat classique montre que si A est une nil-d-algèbre non nilpotente alors, il en est de même pour $A\mathcal{L}$ [13]. Les algèbres du Théorème 2.2 donne donc,

2.6. COROLLAIRE. *Soit $\boldsymbol{M} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\}$ un ensemble d'entiers positifs pour lequel il existe un réel ε, $0 < \varepsilon < 1/2$ tel que $\alpha_{i-1} \leqslant \alpha_i < (d - 2\varepsilon)^i$ $\forall i \geqslant 1$ où, $\alpha_0 = 1$.*

Pour tout $d \geqslant 2$ et sur tout corps, il existe une nil-d-algèbre (d-algèbre d'Engel) de Lie résiduellement finie de dimension infinie telle que pour tout $\alpha_t \in \boldsymbol{M}$ on a: pour toute famille de α_t polynômes de degrés minimums supérieurs ou égaux à t, il existe un entier h (dépendant seulement de t et des degrés maximums de ces éléments) tel que tout produit de Lie de longueur h de ces α_t polynômes soit nul.

Dans la construction 2.4, en choisissant des éléments g de Lie, on obtient:

2.7. COROLLAIRE. *Les algèbres du Corollaire 2.6 peuvent être choisies ayant un centre non trivial, voire même de dimension infinie.*

3. Exemples de groupes de type fini, infinis.

3.1. Soit A une nil-d-algèbre associative engendrée par $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_d$ et notons par 1 l'unité du corps de base. On définit sur l'ensemble $1 + A$ la loi de multiplication $(1 + x)(1 + y) = 1 + x + y + xy$ pour tout x et y dans A qui lui confère une structure de groupe dont l'inverse de tout élément

$1+x$ est $(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i x^i$ où, $n = n(x)$ est le degré de nilpotence de x. Si A n'est pas nilpotente alors le sous-groupe G de $1+A$ engendré par $1+\overline{X}_1, \ldots, 1+\overline{X}_d, (1+\overline{X})^{-1}, \ldots, (1+\overline{X}_d)^{-1}$ est infini (n'est pas nilpotent). Si de plus, la caractéristique du corps de base est $p > 0$ alors $1+A$ est un p-groupe et le sous-groupe G coincide avec le sous-groupe engendré par $1+\overline{X}_1, \ldots, 1+\overline{X}_d$ [5].

3.1.2. REMARQUE. *Pour les groupes périodiques de type fini associés à des nil-d-algèbres, la finitude et la nilpotence sont équivalentes.*

On définit le degré minimum (maximum) d'un élément $1+x \in 1+A$ comme étant le degré minimum (maximum) de x.

Un groupe est dit résiduellement fini si l'intersection de tous ses sous-groupes d'indice fini est l'unité.

3.1.3. COROLLAIRE. *Soit* $\boldsymbol{M} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\}$ *un ensemble d'entiers positifs pour lequel il existe un réel* ε, $0 < \varepsilon < 1/2$ *tel que* $\alpha_{i-1} \leqslant \alpha_i < (d - 2\varepsilon)^i$ $\forall i \geqslant 1$ *où,* $\alpha_0 = 1$.

Pour tout $d \geqslant 2$ *et tout nombre premier* p (*resp.* $p = 0$), *il existe un* p-*groupe périodique* (*resp. sans torsion*) *à* d *générateurs, infini, résiduellement fini* (*resp. résiduellement nilpotent*) *tel que pour tout* $\alpha_t \in \boldsymbol{M}$, *toute collection de* α_t *éléments de degrés minimums supérieurs ou égaux à* t *engendre un sous-groupe fini* (*resp. nilpotent*).

Dans la construction 2.4, le choix des éléments g tel que $1+g$ soit dans le groupe de Golod donne:

3.1.4. COROLLAIRE. *Les groupes du Corollaire* 3.1.3 *peuvent être choisis ayant un centre non trivial, voire même infini.*

3.2. *Groupes avec* (a, b)-*nilpotence.*

3.2.1. Un groupe est 2-fini si toute paire d'éléments engendre un sous-groupe fini. Un groupe G est dit faiblement (conjugué) p-biprimitivement fini si, toute paire d'éléments (conjugués) d'ordre premier p engendre un sous-groupe fini. Si pour tout sous-groupe fini H, cette propriété est verifiée dans $N_G(H)/H$, où, $N_G(H)$ est le normalisateur de H dans G alors G est appelé (conjugué) p-biprimitivement fini. Si G est [faiblement] (conjugué) p-biprimitivement fini pour tout $p \in \pi(G)$, alors il est dit [faiblement] (conjugué) biprimitivement fini [6, Problem 6.57]. Ces groupes ont été introduits en 1970 par Šunkov comme généralisation des groupes localement finis [10]. On montre ici répondant ainsi par la positive à une question de Sozutov [7, Problem 8.66] que ces différentes classes de groupes sont distinctes. En réalité, on montre un résultat plus géneral en considérant de nouvelles classes de groupes, celles avec (a, b)-nilpotence. Un groupe est 2-nilpotent si toute paire d'éléments engendre un sous-groupe nilpotent. Le groupe G est dit faiblement conjugué biprimitivement nilpotent si, toute paire d'éléments conjugués d'ordre premier engendre un sous-groupe nilpotent. Si pour tout sous-groupe fini H, cette propriété est vérifiée dans $N_G(H)/H$ alors le groupe G est dit conjugué biprimitivement nilpotent. De la même manière on obtient à partir des définitions précédentes des groupes de Šunkov tous les groupes avec (a, b)-nilpotence. Introduisons maintenant la classe de groupes conjugués binairement nilpotent (fini). Un groupe dans cette classe est tel que toute paire d'éléments conjugués engendre un sous-groupe nilpotent (fini).

Il est bien connu que dans un groupe périodique toute paire d'éléments d'ordre 2 engendre un sous-groupe fini. Tout 2-groupe est donc biprimitivement fini. Les groupes de Golod donnent donc,

3.2.2. Proposition. *Il existe un 2-groupe à 2 générateurs, infini, résiduellement fini et biprimitivement fini.*

3.2.3. Proposition. *Pour tout nombre premier $p > 2$, il existe un p-groupe à 2 générateurs, infini, résiduellement fini, conjugué binairement nilpotent (en particulier, (faiblement) conjugué biprimitivement nilpotent, (faiblement) conjugué p-biprimitivement nilpotent) qui n'est pas (faiblement) biprimitivement nilpotent.*

Démonstration. Soit A une nil-2-algèbre sur un corps de caractéristique $p > 2$ vérifiant le Théorème 2.2 et telle que tout 3 éléments de degrés minimums au moins 2 engendrent une sous-algèbre nilpotente. Choisissons A telle que son groupe de Golod G aie un centralisateur $1 + g \neq 1$ (Construction 2.4 et Corollaire 3.1.4).

Montrons que pour tout $a \in A$ et tout $b \in A^{(2)}$, la sous-algèbre $S = \langle a, b \rangle$ est nilpotente. En effet, le produit de deux monômes de S est ou bien un monôme de la sous-algèbre $S' = \langle a^2, ab, b \rangle$, ou bien un monôme de S' multiplié par a. Donc, dans tout produit de polynômes de S on a des produits de polynômes de S' qui est, d'après le choix de A, nilpotente. Il en résulte que S est nilpotente.

Montrons que pour tout $c \in A$ le sous-groupe $\langle 1+a, (1+a)^{(1+c)} \rangle$ engendré par $1+a$ et $(1+a)^{(1+c)} = (1+c)(1+a)(1+c)^{-1}$ est nilpotent. Comme $(1+c)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i c^i$ où, n est le degré de nilpotence de c, on a $(1+a)^{(1+c)} = 1 + a + ca + (a+ca) \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i c^i$. Or, a est un élément quelconque et $ca + (a+ca) \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i c^i$ est un polynôme de degré minimum au moins 2, qui, d'après ce qu'on vient de démontrer, engendrent une sous-algèbre nilpotente. Ceci implique que le sous-groupe $\langle 1+a, (1+a)^{(1+c)} \rangle$ est nilpotent. On a donc démontré que toute paire d'éléments conjugués engendre un sous-groupe nilpotent.

On constate à présent que ni $1+A$, ni G ne sont (faiblement) biprimitivement nilpotent. En effet, l'élément $1+g \in G$ étant dans les centres de $1+A$ et G, le sous-groupe cyclique nilpotent $\langle 1+g \rangle$ engendré par $1+g$ est normal dans $1+A$ et dans G. Or, on peut choisir les générateurs de G d'ordre p. En effet, on peut considérer deux générateurs de A de degré de nilpotence exactement p (voir la démonstration du Théorème 2.2). Il est évident que pour $p \geqslant 5$ le lemme de Golod est respecté, tandisque pour $p = 3$ ce n'est pas le cas. Cependant, on peut monter que l'algèbre est de dimension infinie et par conséquent que le groupe G est infini en effectuant des calculs sur les series formelles qui rappelons le, ont pour but d'assurer l'infinitude de la dimension d'une algèbre [1].

Par soucis de présentation, on désigne chaque classe de groupes avec (a, b)-nilpotence (finitude) par les premières lettres de chaque mot la définissant (e.g. faiblement conjugué p-biprimitivement nilpotent est faib. conj. p-bip. nilp.). Le risque de confusion étant nul.

3.2.4. THÉORÈME. *Les inclusions suivantes sont strictes*

$$\begin{array}{ccccc} \{2 - \mathit{nilpotent}\} & \subset & \{\mathit{faib.\ bip.\ nilp.}\} & \subset & \{\mathit{faib.}\ p-\mathit{bip.\ nilp.}\} \\ & & \cap & & \cap\, (\forall p > 2) \\ & & \{\mathit{faib.\ conj.\ bip.\ nilp.}\} & \subset & (\mathit{faib.\ conj.}\ p-\mathit{bip.\ nilp.}\} . \end{array}$$

DÉMONSTRATION. Les inclusions étant évidentes; montrons qu'elles sont strictes. D'après la Propositions 3.2.2, il existe des groupes faiblement biprimitivement nilpotent qui ne sont pas 2-nilpotents.

Un groupe de Golod engendré par deux éléments d'ordre $p > 2$ est faiblement 2-biprimitivement nilpotent mais n'est pas faiblement p-biprimitivement nilpotent et par conséquent, il n'est pas faiblement biprimitivement nilpotent.

La Proposition 3.2.3 montre que les inclusions suivantes sont strictes:

$$\{\textit{faib. bip. nilp.}\} \subset \{\textit{faib. conj. bip. nilp.}\}$$

et

$$\{\textit{faib. p-bip. nilp.}\} \subset \{\textit{faib. conj. p-bip. nilp.}\}.$$

Enfin, les groupes de Golod construit par Timofeyenko [11] sont faiblement conjugués 2-biprimitivement nilpotent mais ne sont pas faiblement conjugués p-biprimitivement nilpotent ($p > 2$). Ceci achève la démonstration du théorème. Les arguments que nous vennons de développer démontrent:

3.2.5. THÉORÈME. *Les inclusions suivantes sont strictes*

$$\begin{array}{ccccc}
\{2-\textit{nilpotent}\} \subset & \{\textit{bip. nilp.}\} & \subset & \{p-\textit{bip. nilp.}\} & \\
& \cap & & \cap & (\forall p > 2) \\
& \{\textit{conj. bip. nilp.}\} & \subset & (\textit{conj. p}-\textit{bip. nilp.}\}. &
\end{array}$$

3.2.6. REMARQUE. *D'après les constructions de p-groupes de Golod déjà faites et la Remarque* 3.1.2, *on obtient les analogues des deux théorèmes précédents, en remplaçant nilpotent par fini. Ceci resoud le problème cité dans Kourovka Notebook* [7, Problem 8.66].

4. n-Nilpotence et idéaux.

4.1. La n-nilpotence ($n \geqslant 2$) est une notion intermidiaire à la nilpotence locale et la notion de nil. Le Théorème 2.2 montre que ces trois notions ne se confondent pas. L'investigation de la n-nilpotence et notamment des théorèmes de décompositions relative à cette propriété est motivée d'une part, par la propriété suivante: la somme de deux idéaux qui sont nil (respectivement localement nilpotents) est un idéal qui est nil (respectivement localement nilpotent) et d'autre part, par une question de Kemkhadze sur le produit de deux sous-groupes normaux dont toute paire d'éléments engendre un sous-groupe nilpotent [6, Problem 1.39]. Le produit de deux sous-groupes normaux dont tout n-éléments engendrent un sous-groupe nilpotent est un groupe qui peut contenir un sous-groupe à n générateurs qui n'est pas nilpotent [8]. Ces groupes étant dénombrables, les contre-exemples suivants établis pour les algèbres et par conséquent pour les groupes, montrent qu'on peut se débarasser de la dénombrabilité. Cependant, on se demande:

QUESTION. *Est ce que pour tout $n \geqslant 2$, la somme de deux idéaux n-nilpotents peut ne pas être 2-nilpotent (il est évident que la somme est nil)? Le même problème est posé pour le produit de deux sous-groupes normaux tous les deux n-nilpotents.*

Des résultats du paragraphe 3 et de [11], on montre que le produit de deux sous-groupes normaux tous les deux (a, b)-nilpotents (finis) n'est pas toujours (a, b)-nilpotent (fini).

4.2. PROPOSITION. *Soit A une algèbre du Théorème 2.2. Pour tout $k \in \in \mathbb{N}^*$ et tout $\alpha_k \in \boldsymbol{M}$ posons $r = [(\alpha_k - k)/k^2]$. Pour tout $a \in A$, on a: toute famille de r éléments de l'algèbre $\langle a, A^{(k)} \rangle$ engendre une sous-algèbre nilpotente.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour tout r éléments quelconque $b_1, \ldots, b_r$ de $A^{(k)}$, la sous-algèbre $S = \langle a, b_1, \ldots, b_r \rangle$ est nilpotente. Or, la sous-algèbre de S constituée de tous les produits de longueur au moins k est incluse dans la sous-algèbre de $A^{(k)}$ engendrée par: a^k, $a^{k+1}, \ldots, a^{2k-1}, b_l, a^i b_l, b_l a^j, a^i b_l a^j$; $1 \leqslant i, j \leqslant k-1$; $1 \leqslant l \leqslant r$, qui est nilpotente d'après la constructions de A. S est donc nilpotente.

4.3. PROPOSITION. *Pour tout entier $n \geqslant 2$, la somme de deux idéaux n-nilpotents d'une algèbre associative n'est pas toujours n-nilpotente.*

DÉMONSTRATION. Soit A une algèbre du Théorème 2.2 assujetie à l'ensemble $\boldsymbol{M} = \{\alpha_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ où, $\alpha_i = [\alpha^i]$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ et α est un réel vérifiant $1 < \alpha < d - 2\varepsilon$. Soit n un entier compris entre d et r. pour tout $k \geqslant 2$, on choisit parmi les sous-algèbres de l'algèbre A, contenant $A^{(k)}$ et une n-sous-algèbre non-nilpotente une sous-algèbre minimale R. Alors, $R/A^{(k)}$ est une algèbre nilpotente qui d'après la Proposition 4.2 n'est pas engendrée par un seul élément. D'où, $R/A^{(k)} = \overline{B} + \overline{C}$, où $\overline{B}$ et $\overline{C}$ sont des sous-algèbres propres de $R/A^{(k)}$ que nous pouvons choisir comme étant des idéaux maximaux. D'après le choix de R, toute n-sous-algèbre des préimages B et C de $\overline{B}$ et $\overline{C}$ est nilpotente.

L'algèbre de Lie-Golod $A\mathcal{L}$ associée à l'algèbre A de la démonstration de la Proposition 4.3 vérifie la Proposition 4.2. Les arguments servants à démontrer la Proposition 4.3 étant applicables à $A\mathcal{L}$, on obtient donc,

4.4. PROPOSITION. *Pour tout entier $n \geqslant 2$, la somme de deux idéaux n-nilpotents d'une algèbre de Lie n'est pas toujours n-nilpotente.*

En caractéristique $p > 0$ (resp. 0), l'algèbre A citée ci-dessus donne un p-groupe (resp. groupe sans torsion) $1 + A$ dont le sous-groupe $1 + R$ qui n'est pas n-nilpotent est le produit de deux sous-groupes normaux propres, $1 + B$ et $1 + C$ tous les deux n-nilpotents.

4.5. COROLLAIRE. *Pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout nombre premier $p > 0$ (rep. $p = 0$), le produit de deux p-sous-groupes (resp. sous-groupes sans torsion) normaux n-nilpotents n'est pas toujours n-nilpotent.*

Soit $(\mathcal{P})$ l'une des propriétés suivantes: conjugué binairement nilpotent, [faiblement] (conjugué) biprimitivement nilpotent [faiblement] (conjugué) p-biprimitivement nilpotent.

4.6. THÉORÈME. *Pour tout nombre premier $p > 2$, il existe un p-groupe qui n'a pas la propriété $(\mathcal{P})$ et qui est le produit de deux sous-groupes normaux propres ayant tous les deux la propriété $(\mathcal{P})$.*

DÉMONSTRATION. Soit A une nil–2-algèbre sur un corps de caractéristique $p > 2$ vérifiant le Théorème 2.2 et telle que tout 3 éléments de degré minimum au moins 2 engendrent une sous-algèbre de dimension finie. Choisissons A telle que G ne soit pas (faiblement) biprimitivement nilpotent (rep. (faiblement) p-biprimitivement nilpotent) (Proposition 3.2.3). Parmi les sous-algèbres de A contenant $A^{(2)}$ et une 2-sous-algèbre non nilpotente engendrée par deux éléments a et b telle que le sous-groupe de G engendré par $1 + a$ et $1 + b$ soit infini et ne soit pas (faiblement) biprimitivement nilpotent (rep. (faiblement) p-biprimitivement nilpotent), choisissons une sous-algèbre minimale R. $R/A^{(2)}$ n'étant pas engendrée par un seul élément (Proposition 4.2), d'après la démonstration de la Proposition 4.3 et son Corollaire 4.5, $1 + R$ est un groupe qui n'est pas (faiblement) biprimitivement nilpotent (rep. (faiblement) p-biprimitivement nilpotent) et qui est le produit de deux sous-groupes normaux propres $1 + B$ et $1 + C$ tous les deux (faiblement) biprimitivement nilpotent (rep. (faiblement) p-biprimitivement nilpotent).

On montre à présent que l'on peut obtenir le même résultat pour les notions: conjugué binairement nilpotent, (faiblement) conjugué biprimitivement nilpotent, (faiblement) conjugué p-biprimitivement nilpotent.

La construction d'algèbres de Golod faite dans [11] montre que l'on peut choisir A ayant deux éléments a et b telle que $1 + a$ et $1 + b$ soient conjugués d'ordre premier (premier p) et engendrent un sous-groupe infini de G. On choisit une sous-algèbre minimale R parmi les sous-algèbres de A contenant $A^{(2)}$ et une 2-sous-algèbre non nilpotente engendrée par deux éléments comme ceux dont on vient de décrire. $1 + R$ est un groupe qui n'est pas conjugué binairement nilpotent, (resp. (faiblement) conjugué biprimitivement nilpotent, resp. (faiblement) conjugué p-biprimitivement nilpotent) et qui est le produit de deux sous-groupes normaux propres tous les deux conjugués binairement nilpotent (rep. (faiblement) conjugués biprimitivement nilpotent, resp. (faiblement) conjugués p-biprimitivement nilpotent).

4.7. REMARQUE. *La Remarque* 3.1.2 *et le Théorème* 4.6 *montrent que l'on peut établir l'analogue de ce théorème en remplaçant nilpotent par fini dans les propriétés* ($\mathcal{P}$).

REFERENCES

[1] E. S. GOLOD, *Some problems of Burnside type*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 84 (1969), pp. 83-88.

[2] L. HAMMOUDI, *On Golod subalgebras*, C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada Vol. XVII, n. 6 (1995), pp. 233-237.

[3] L. HAMMOUDI, *Nil-algèbres non-nilpotentes et groupes périodiques infinis*, Prépublication IRMA (Strasbourg, 1996/08).

[4] L. HAMMOUDI, *Le nombre d'images homomorphes de certains groupes et algèbres de Golod*, Resultate Math., **29**, n. 3/4 (1996), pp. 227-232.

[5] N. JACOBSON, *Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*, Ann. Math., **46**, n. 2 (1945), pp. 695-707.

[6] KOUROVKA NOTEBOOK, *Unsolved problems in group theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **121** (1980).

[7] KOUROVKA NOTEBOOK, *Unsolved problems in group theory*, Novosibirsk (1992).

[8] A. I. SOZUTOV, *Nil-radicals in groups*, Algebra and Logic, **30**, n. 1 (1991), pp. 102-105.

[9] A. I. SOZUTOV, *On examples of associative nil algebras,* Math. Notes, **57**, n. 3-4 (1995), pp. 307-309.
[10] V. P. ŠUNKOV, *A certain class of p-groups*, Algebra and Logic, **9** (1970), pp. 291-297.
[11] A. V. TIMOFEENKO, *2-Generator Golod p-groups*, Algebra and Logic, **24**, n. 2 (1985), pp. 129-139.
[12] A. V. TIMOFEENKO, *The existence of Golod groups with infinite center*, Math. Notes, **39**, n. 5-6 (1986), pp. 353-355.
[13] E. I. ZEL'MANOV, *Nil rings and periodic groups*, The Korean Math. Soc. (1992).

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 dicembre 1997.