RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BERNARD LE STUM

La structure de Hyodo-Kato pour les courbes

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 94 (1995), p. 279-301

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1995__94__279_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 94 (1995)

La structure de Hyodo-Kato pour les courbes.

BERNARD LE STUM (*)

RÉSUMÉ - Dans cet article, nous décrivons la structure de Hyodo-Kato sur le premier espace de cohomologie d'une courbe projective non singulière sur $\mathbb{C}_p$ en utilisant les notions d'intégration le long d'un cycle analytique et de hauteur d'intersection de tels cycles. Comme conséquence, nous obtenons un scindage de la filtration par le poids.

Introduction.

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps de fractions K de caractéristique zéro et de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$. Si W est l'anneau des vecteurs de Witt de k et si Y est un schéma propre semi-stable sur $\mathcal{V}$, il existe un W-module D muni d'un Frobenius φ et d'un opérateur de monodromie N tel que $D \otimes_W K \cong H^1_{dR}(Y_K)$. C'est la structure de Hyodo-Kato sur $H^1_{dR}(Y_K)$ (voir [H-K]). Nous nous proposons dans cet article de décrire cette structure dans le cas d'une courbe en donnant une construction totalement différent de celle de O. Hyodo et K. Kato. Notre description de la monodromie est construite à partir d'un accouplement dont l'idée originale semble due à A. Grothendieck et notre interprétation de l'action du Frobenius est dérivée de celle de R. Coleman (voir [C3]).

C'est la lettre de J.-M. Fontaine à U. Jannsen [F] qui est à l'origine de ce travail. Dans cette lettre, J.-M. Fontaine conjecture l'existence de la structure de Hyodo-Kato et démontre cette conjecture dans certains cas comme par exemple dans celui d'une courbe. Il pose alors la question de l'interprétation géométrique de cette structure («on voudrait

(*) Indirizzo dell'A.: Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.

bien comprendre *géométriquement* tout cela») et c'est ce qui nous intéresse ici. Les résultats qui suivent on fait l'objet d'un exposé au Mathematisches Forschungsinstitut à Oberwolfach en février 1992.

Cet article fait suite à [LS] qui était consacré à l'étude, lorsque C est une courbe projective non singulière sur $\mathbb{C}_p$, de la filtration par le poids sur $H^1_{dR}(C)$. Nous construisons un foncteur qui à toute courbe projective X sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ associe un module gradué $D(X)$ sur $W := W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ muni d'un Frobenius et d'un accouplement de Poincaré. Lorsque X est une réduction à croisement normaux de C, nous construisons un isomorphisme d'espaces vectoriels filtrés $H^1_{dR}(C) \cong D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p$ compatible à la dualité de Poincaré. En particulier, on obtient un scindage de la filtration par le poids et on munit $H^1_{dR}(C)$ d'un Frobenius. Nous donnerons aussi une construction de l'opérateur de monodromie. Toutes ces structures seront obtenues à partir d'un accouplement d'intégration entre $H_1(X)$ et $H^1_{dR}(C)$, $(\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega$ et d'un accouplement d'intersection de cycles sur $H_1(X)$, $(\gamma, \gamma') \mapsto \gamma . \gamma'$.

1. Module de Hyodo-Kato d'une courbe.

On fixe un nombre premier p, on note $W := W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ l'anneau des vecteurs de Witt de $\overline{\mathbb{F}}_p$ et σ le Frobenius de W. Nous allions construire le module de Hyodo-Kato associé à une courbe (schéma séparé de typez fini de pure dimension 1) propre X sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Il s'agit d'un W-module de type fini $D(X)$ muni

i) d'une graduation à trois crans $D(X) = \mathrm{Gr}^0 \oplus \mathrm{Gr}^1 \oplus \mathrm{Gr}^2$ par des sous-W-modules, dite *graduation par le poids*,

ii) d'un endomorphisme σ-linéaire $\varphi : D(X) \to D(X)$, appelé *(endomorphisme de) Frobenius*,

iii) d'un accouplement antisymétrique parfait

$$D(X) \times D(X) \to W, \qquad (\omega, \eta) \mapsto \int_X \omega \wedge \eta,$$

appelé *accouplement de Poincaré*.

On demande que la graduation soit stable par Frobenius (c'est à dire que $\varphi(\mathrm{Gr}^i) \subset \mathrm{Gr}^i$ pour tout i) et autoduale pour l'accouplement de Poincaré (c'est à dire qu'elle induise une dualité parfaite entre Gr^i et Gr^{2-i} pour tout i). On demande aussi que l'accouplement de Poincaré soit compatible avec le Frobenius (c'est à dire que $\int_X \varphi(\omega) \wedge \varphi(\eta) = p\sigma\left(\int_X \omega \wedge \eta\right)$ si $\omega, \eta \in D(X)$).

Nous allons traiter d'abord le cas où X est lisse puis celui où X est rationnelle avant de voir le cas général. Si X est une courbe propre et lisse sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors pour tout i, $H^i_{\text{cris}}(X/W)$ est un W-module de type fini muni d'un Frobenius σ-linéaire φ. On dispose d'un accouplement de Poincaré, qui est une dualité parfaite, et qui est composé du cup produit

$$H^1_{\text{cris}}(X/W) \times H^1_{\text{cris}}(X/W) \to H^2_{\text{cris}}(X/W), \qquad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta$$

et du morphisme trace

$$H^2_{\text{cris}}(X/W) \to W, \qquad \omega \mapsto \int_X \omega .$$

Remarquons aussi que ces applications sont compatibles avec les Frobenius dans le sens où on a toujours $\varphi(\omega) \wedge \varphi(\eta) = \varphi(\omega \wedge \eta)$ et $\int_X \varphi(\omega) = p\sigma\left(\int_X \omega\right)$. On pose alors tout simplement $D(X) = H^1_{\text{cris}}(X/W)$. Comme ce W-module est muni d'un Frobenius et d'un accouplement de Poincaré, il suffit de préciser la graduation par le poids et on prend tout simplement $\mathrm{Gr}^1 := H^1_{\text{cris}}(X/W)$.

Si A un groupe abélien, nous noterons $H^1(X_{\text{et}}, A)$ le premier groupe de cohomologie du faisceau constant $\underline{A}$ sur le topos étale de X. Il résulte de ([LS], 2.3.7) que $H^1(X_{\text{et}}, \mathbb{Z})$ est un groupe abélien libre de rang fini et on a un accouplement parfait.

$$H_1(X) \times H^1(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}, \qquad (\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega ,$$

où $H_1(X)$ est un groupe abélien libre de rang fini dont nous rappellons la définition plus tard. Le Frobenius absolu de X induit l'identité sur $H^1(X_{\text{et}}, \mathbb{Z})$ et on définit le Frobenius sur $H_1(X)$ comme étant la multiplication par p.

Puisque $H^1(X_{\text{et}}, A) \cong H^1(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} A$ lorsque A est sans torsion, on peut munir $H^1(X_{\text{et}}, W)$ du Frobenius induit par semi-linéarité à partir de l'identité sur $H^1(X_{\text{et}}, \mathbb{Z})$. On peut aussi prolonger par linéarité l'accouplement ci dessus en un accouplement

$$H_1(X) \times H^1(X_{\text{et}}, W) \to W, \qquad (\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega,$$

et on a alors $\int_\gamma \varphi(\omega) = \sigma\big(\int_\gamma \omega\big)$ et $\int_{\varphi(\gamma)} \omega = p \int_\gamma \omega$ pour $\gamma \in H_1(X)$ et $\omega \in H^1(X_{\text{et}}, W)$.

Si X est une courbe rationnelle, on pose $D(X) = H_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} W \oplus \oplus H^1(X_{\text{et}}, W)$. C'est bien un W-module de type fini que l'on munit de la graduation $\mathrm{Gr}^0 := H_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} W$ et $\mathrm{Gr}^2 := H^1(X_{\text{et}}, W)$. On définit le Frobenius composante par composante. On définit ensuite l'accouplement de Poincaré en demandant que $H_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} W$ et $H^1(X_{\text{et}}, W)$ soient orthogonaux à eux même et en posant $\int_X (\gamma \otimes \alpha) \Lambda \omega = \alpha \int_\gamma \omega$ si $\gamma \in H_1(X)$, $\alpha \in W$ et $\omega \in H^1(X_{\text{et}}, W)$.

En général, il faut panacher ces deux constructions. On note $\widetilde{X}$ la normalisée de X et on pose

$$D(X) = H_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} W \oplus H^1_{\text{cris}}(\widetilde{X}/W) \oplus H^1(X_{\text{et}}, W).$$

C'est bien un W-module de type fini, que l'on munit de la graduation

$$\mathrm{Gr}^0 := H_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} W, \qquad \mathrm{Gr}^1 := H^1_{\text{cris}}(\widetilde{X}/W) \text{ et } \mathrm{Gr}^2 := H^1(X_{\text{et}}, W)$$

et d'un Frobenius défini composante par composante. Celui ci est donc donné par

$$\varphi(\gamma \otimes \alpha, \omega, \eta) = (p\gamma \otimes \sigma(\alpha), \varphi(\omega), \varphi(\eta)).$$

On définit ensuite l'accouplement de Poincaré sur $D(X)$ en prenant l'accouplement de Poincaré sur $H^1_{\text{cris}}(\widetilde{X}/W)$ et l'accouplement canonique entre $H_1(X) \otimes_{\mathbf{Z}} W$ et $H^1_{\text{et}}(X, W)$. Celui ci est donc donné par

$$\int_X (\gamma \otimes \alpha, \omega, \eta) \Lambda (\gamma' \otimes \alpha', \omega', \eta) = \int_X \omega \Lambda \omega' + \alpha \int_\gamma \omega' - \alpha' \int_{\gamma'} \omega.$$

On vérifie aisément que toutes les propriétés sont bien satisfaites.

Pour conclure, remarquons que l'accouplement de Poincaré induit un accouplement

$$H_1(X) \times D(X) \to W, \qquad (\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega := \int_X (\gamma \otimes 1) \Lambda \omega$$

que l'on peut voir comme un accouplement d'intégration le long d'un cycle. Pour tout $\gamma \in H_1(X)$ et $\omega \in D(X)$, on a $\int_\gamma \varphi(\omega) = \sigma\big(\int_\gamma \omega\big)$ et $\int_{\varphi(\gamma)} \omega = p \int_\gamma \omega$.

Dans la suite, nous aurons souvent l'occasion de considérer un module gradué comme module filtré en posant $\mathrm{Fil}^i = \mathrm{Gr}^i \oplus \mathrm{Gr}^{i+1} \oplus \dots$. Pour tout i, Fil^i est alors de manière naturelle un module gradué.

2. Module de Hyodo-Kato et cohomologie rigide.

On garde les hypothèses et notations du paragraphe précédent et on note $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Nous allons décrire lorsque X est une courbe propre, une filtration stable par Frobenius sur $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$. Nous verrons que le gradué associé $\mathrm{Gr}\, H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Fil}^1 D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p$ comme espace vectoriel gradué et que cet isomorphisme est compatible aux Frobenius.

Si X est une courbe propre sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on peut considérer pour tout i, le $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel $H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ qui est de dimension finie. Si on munit $\mathbb{C}_p$ d'un relèvement σ du Frobenius de $\overline{\mathbb{F}}_p$, alors $H^i_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ est muni d'un Frobenius σ-linéaire φ. Si X est lisse, on dispose comme en cohomologie cristalline d'un accouplement de Poincaré parfait (voir par exemple [LS], 5.3), composé du cup produit

$$H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \times H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \to H^2_{\mathrm{rig},\,c}(X/\mathbb{C}_p), \qquad (\omega, \eta) \mapsto \omega \wedge \eta .$$

et de l'application trace

$$H^2_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \to \mathbb{C}_p , \qquad \omega \mapsto \int_X \omega .$$

Ces applications sont compatibles avec les Frobenius dans le sens où on a toujours $\varphi(\omega) \wedge \varphi(\eta) = \varphi(\omega \wedge \eta)$ et $\int_X \varphi(\omega) = p\sigma\left(\int_X \omega\right)$.

On peut construire une application injective $H^1(X_{et}, \mathbb{C}_p) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ comme suit. On sait que $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{C}_p) = H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ et si K_0 désigne le corps de fraction de W, on a aussi $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) = H^1_{\mathrm{rig}}(X/K_0) \otimes_K \mathbb{C}_p$ (voir par exemple ([LS], 4.3)). Il suffit donc de définir une flèche injective $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_p) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}(X/K_0)$. Si on note comme d'habitude

$$H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}_p) := \varprojlim H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/p^n) \text{ et } H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_p) := H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} ,$$

on a des applications canoniques $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}_p) \to H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}_p)$ et $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_p) \to H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_p)$ et il résulte de ([LS], 2.3.7 & 2.3.8) que celles ci sont injectives. D'autre part, J.-Y. Etesse et moi même avons construit dans ([E-LS2], 7.2 et 7.3) une application injective $H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_p) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}(X/K_0)$. Il suffit alors de composer les deux flèches $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Q}_p) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_p)$ et $H^1_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_p) \hookrightarrow H^1_{\mathrm{rig}}(X/K_0)$.

Dans la suite, nous identifierons $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{C}_p)$ avec son image dans $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$. Ceci nous permet de munir $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ d'une filtration, dite *filtration par le poids*, compatible avec l'action de Frobenius

$$\mathrm{Fil}^1 := H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p), \qquad \mathrm{Fil}^2 := H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{C}_p) \text{ et } \mathrm{Fil}^3 = 0.$$

On dispose d'un homomorphisme canonique $H^1_{\mathrm{rig}}(X/K) \to$ $\to H^1_{\mathrm{cris}}(X/W) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et c'est un isomorphisme compatible avec la dualité de Poincaré lorsque X est lisse. D'autre part, il résulte de [LS], 5.4.3 & 2.3.7) que la suite

$$0 \to H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{C}_p) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p) \to 0$$

est exacte. Nous avons donc un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Fil}^1 D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p = (H^1_{\mathrm{cris}}(\widetilde{X}/W) \oplus H^1(X_{\mathrm{et}}, W)) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong H^1_{\mathrm{cris}}(\widetilde{X}/W) \otimes_W \mathbb{C}_p \oplus$$

$$\oplus H^1(X_{\mathrm{et}}, W) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p) \oplus H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{C}_p) = \mathrm{Gr}\, H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$$

qui est compatible aux Frobenius et aux graduations.

3. Intégration des formes différentielles rigides.

Nous allons voir que l'isomorphisme que nous venons de construire sur les gradués se relève de manière unique en un isomorphisme d'espaces vectoriels filtrés compatible avec les Frobenius. La méthode s'inspire du principe de Dwork utilisé par R. Coleman pour prolonger analytiquement à l'aide du Frobenius. On obtient d'ailleurs une méthode pour intégrer une différentielle rigide, c'est à dire un élément de $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ le long d'un cycle topologique, c'est à dire un élément de $H_1(X)$.

PROPOSITION 1. *Si X est une courbe propre sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, la suite exacte*

$$0 \to H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{C}_p) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p) \to 0$$

possède un unique scindage compatible avec l'action de Frobenius.

On peut bien sûr supposer que X est réduite. Soient K un sous-corps fermé de $\mathbb{C}_p$ de corps résiduel k et X une courbe propre sur k. On peut construire une application canonique $H^1(X_{\mathrm{et}}, K) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X/K)$ exactement comme dans le cas où $K = \mathbb{C}_p$ mais celle ci n'est plus injective en général. Nous allons montrer que si X est géométriquement réduite et si la suite

$$0 \to H^1(X_{\mathrm{et}}, K) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X/K) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/K) \to 0\,,$$

où $\widetilde{X}$ est la normalisée de X, est exacte, alors celle ci possède un unique scindage compatible avec l'action de Frobenius. La proposition sera alors démontrée.

On peut écrire notre courbe X, qui est de type fini sur $k \subset \overline{\mathbb{F}}_p$, sous la forme $X := X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ où X_0 est une courbe sur $\mathbb{F}_q$ et $q = p^s$. Comme $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z})$ est libre de rang fini, on peut supposer, quitte à faire une extension finie de $\mathbb{F}_q$, que $H^1(X_{0\mathrm{et}}, \mathbb{Z}) = H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z})$. Si K_0 désigne le corps de Fractions de $W(\mathbb{F}_q)$, la suite

$$0 \to H^1(X_{0\mathrm{et}}, K_0) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X_0/K_0) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}_0/K_0) \to 0$$

est alors exacte car la cohomologie rigide des courbes commute aux extensions isométriques de la base (voir par exemple [LS], 4.3)) et la normalisation aussi car X_0 est géométriquement réduit. Nous pouvons donc supposer que $k = \mathbb{F}_q$ et que $K = K_0$.

On note alors F la puissance s-ième du Frobenius et χ le polynôme caractéristique de F^* sur $H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/K)$. Comme F^* est l'identité sur $H^1(X_{\mathrm{et}}, K)$, on a un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(X_{\mathrm{et}}, K) \arrow[r] \arrow[d, "\chi(1)"] & H^1_{\mathrm{rig}}(X/K) \arrow[r] \arrow[d, "\chi(F^*)"] & H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/K) \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1(X_{\mathrm{et}}, K) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{rig}}(X/K) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/K) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Grâce à l'interprétation rigide de la fonction zêta ([E-LS1], 6.3), il résulte des conjectures de Weil pour les courbes ([W]), et plus précisément de l'analogue de l'hypothèse de Riemann, que 1 n'est pas une valeur propre de F^* sur $H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/K)$. On a donc $\chi(1) \neq 0$, ce qui implique qu'il y a un unique scindage compatible avec $\chi(F^*)$. Puisque $F^* = \varphi^s$ et que φ est σ-linéaire, le polynôme χ est à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$. Il suit que φ commute avec $\chi(F^*)$ et notre scindage est donc compatible avec l'action de φ. Réciproquement, tout scindage compatible avec l'action de φ est bien sûr aussi compatible avec $\chi(F^*)$. ∎

COROLLAIRE. *L'isomorphisme* $\mathrm{Fil}^1 D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}\, H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ *se relève de manière unique en un isomorphisme* $\mathrm{Fil}^1 D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong$ $\cong H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ *(strictement) compatible aux filtrations et aux Frobenius.* ∎

COROLLAIRE. *Il existe un unique accouplement*

$$H_1(X) \times H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \to \mathbb{C}_p\,, \qquad (\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega\,.$$

qui prolonge l'accouplement canonique entre $H_1(X)$ *et* $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z})$ *et qui est compatible à l'action de Frobenius* (*i.e. tel que* $\int_\gamma \varphi(\omega) = \sigma(\int_\gamma \omega)$). ■

4. Module de Hyodo-Kato et cohomologie de de Rham.

Lorsque C est une courbe projective non singulière sur $\mathbb{C}_p$, on dispose par [LS] de la filtration par le poids sur $H^1_{dR}(C)$ et l'accouplement de Poincaré passe au gradué. De plus, si X est une réduction de C à singularités ordinaires, on a isomorphisme canonique entre $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ et $\mathrm{Fil}^1 H^1_{dR}(C)$. Nous allons voir que l'isomorphisme qui est induit sur les gradués se prolonge de manière unique en un isomorphisme de modules gradués $D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C)$ compatible avec les accouplements de Poincaré.

Si C est une courbe projective non singulière sur $\mathbb{C}_p$ et si C^{rig} est la variété analytique rigide associée, alors l'application canonique $H^1_{dR}(C) \to H^1_{dR}(C^{\mathrm{rig}})$ est un isomorphisme et nous identifierons ces deux espaces dans la suite. Il résulte de ([LS], 6.1.3) que l'application canonique $H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z}) \to H^1_{dR}(C)$ est injective et nous considérerons $H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z})$ comme contenu dans $H^1_{dR}(C)$. Soit maintenant $\mathcal{X}$ un modèle formel plat et géométriquement réduit de C^{rig} sur l'anneau $\mathcal{V}$ des entiers de $\mathbb{C}_p$. Si X désigne la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, la proposition 6.3.1 de [LS] nous fournit une injection canonique $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \hookrightarrow H^1_{dR}(C)$, dite spécialisation, qui nous permet d'identifier $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ avec un sous-espace de $H^1_{dR}(C)$. De plus, nous vu dans la proposition 6.1.3 de [LS], que $H^1(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}) \subset H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z})$ avec égalité si et seulement si X n'a que des singularités ordinaires (à croisements normaux). Enfin, il résulte du théorème 6.4 de [LS] que, sous cette hypothèse, $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ est la partie orthogonale à $H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{C}_p)$ pour la dualité de Poincaré sur $H^1_{dR}(C)$. En particulier, ce sous-espace ne dépends pas de $\mathcal{X}$ mais seulement de C.

Nous avons défini en 6.3.5 dans [LS], la *filtration par le poids* sur $H^1_{dR}(C)$ par

$$\mathrm{Fil}^0 := H^1_{dR}(C), \quad \mathrm{Fil}^1 = H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p), \quad \mathrm{Fil}^2 := H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{C}_p) \text{ et } \mathrm{Fil}^3 = 0$$

où X est une réduction à singularités ordinaires. Il résulte du théorème 6.4 de [LS] que la dualité de Poincaré induit un accouplement parfait

$$\mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C) \times \mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C) \to \mathbb{C}_p$$

Plus précisément, la dualité de Poincaré induit des accouplements parfaits entre $\mathrm{Gr}^i H^1_{dR}(C)$ et $\mathrm{Gr}^{2-i} H^1_{dR}(C)$ pour tout i. D'autre part, $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ (avec sa filtration par le poids) s'identifie à un sous-espace filtré strict de $H^1_{dR}(C)$ et on a donc une injection canonique $\mathrm{Gr}\, H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \hookrightarrow \mathrm{Gr}\, H^1_{fR}(C)$ de modules gradués. En particulier, on a un isomorphisme $H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p) \cong \mathrm{Gr}^1 H^1_{dR}(C)$.

PROPOSITION 2. *L'injection canonique* $\mathrm{Gr}\, H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \hookrightarrow \mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C)$ *se prolonge de manière unique en un isomorphisme* $D(X) \otimes_W \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C)$ *compatible avec la dualité de Poincaré.*

L'isomorphisme $\mathrm{Gr}^0 D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}^0 H^1_{dR}(C)$ provient nécessairement par dualité de l'isomorphisme $\mathrm{Gr}^2 D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}^2 H^1_{dR}(C)$ et il reste à vérifier la compatibilité avec la dualité de Poincaré. Par construction, c'est clair sur les Gr^0 et Gr^2. Nous devons donc vérifier que l'isomorphisme $H^1_{\mathrm{cris}}(\widetilde{X}/W) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}^1 H^1_{dR}(C)$ est compatible aux dualités de Poincaré et on peut bien sûr substituer $H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p)$ à $H^1_{\mathrm{cris}}(\widetilde{X}) \otimes_W \mathbb{C}_p$. On choisit alors un ouvert lisse dense U de X et on utilise la proposition 6.5.2 de [LS] qui nous dit que $\mathrm{Fil}^1 H^1_{dR}(C)$ est l'image de l'homomorphisme de spécialisation $H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) \to H^1_{dR}(C)$. Il résulte de la proposition 4.3 de [LS] que les applications de spécialisation $H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) \to H^1_{dR}(C)$ et de cospécialisation $H^1_{dR}(C) \to H^1_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$ sont compatibles avec la dualité de Poincaré. D'autre part, les applications canoniques $H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) \to H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p)$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p) \to \to H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p)$ sont elles aussi compatibles à la dualité de Poincaré. Enfin, il résulte de ([LS], 4.2) que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) & \longrightarrow & H^1_{dR}(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1_{\mathrm{rig}}(\widetilde{X}/\mathbb{C}_p) & \longrightarrow & H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) \end{array}$$

est commutatif. La conclusion est alors immédiate. ∎

En particulier, on voit que l'espace $\mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C)$ est naturellement muni d'un endomorphisme de Frobenius.

5. Courbe contractile, ouvert simplement connexe.

Nous allons rappeler la notion de variété simplement connexe en géométrie rigide et étudier le cas d'un ouvert analytique d'une courbe. Afin de voir le lien avec la réduction de la courbe, nous étudions d'abord la notion de courbe contractile.

Dans ([LS], 2.1.2), nous avons montré comment associer à toute courbe X sur un corps algébriquement clos k un objet semi-simplicial $\Delta(X)$: pour chaque point multibranche x de X, on considère le simplexe standard Δ_x dont les sommets correspondent aux points y au dessus de x dans $\widetilde{X}$. On obtient $\Delta(X)$ en identifiant le sommet y de Δ_x et le sommet y' de $\Delta_{x'}$ chaque fois que y et y' sont sur la même composante de $\widetilde{X}$. Si les seules singularités de X sont des points doubles, on retrouve le graphe de X. Lorsque X est connexe, nous dirons que X est *contractile* si $\Delta(X)$ est contractile. En général, nous dirons par commodité que X est *contractile* si toutes ses composantes connexes le sont.

Par définition, $H_1(X)$ est le premier groupe d'homologie de $\Delta(X)$ et nous avons décrit en 2.1.3 dans [LS], un complexe $C(X)$ qui calcule cette homologie. On définit $C_0(X)$ comme le groupe libre sur l'ensemble des composantes irréductibles de X et pour $i > 0$, $C_i(X)$ comme le quotient du groupe libre sur les $[y_0, \ldots, y_i]$, avec $y_0, \ldots, y_i \in \widetilde{X}$ distincts au dessus du même point x de X, par les relations $[y_{\sigma(0)}, \ldots, y_{\sigma(i)}] = (-1)^{\sigma}[y_0, \ldots, y_i]$. On pose

$$d_1[y_0, y_1] = Y_0 - Y_1 \text{ si } y_0 \in \widetilde{Y}_0 \text{ et } y_1 \in \widetilde{Y} \text{ et}$$

$$d_i[y_0, \ldots, y_i] = \sum(-1)^j[y_0, \ldots, \widehat{y}_j, \ldots, y_i] \text{ si } i > 1\,.$$

Remarquons que si X n'a que des points doubles, alors $C_i(X) = 0$ pour $i > 1$ et on a donc tout simplement $H_1(X) = Z_1(X) := \operatorname{Ker} d_1 \subset C_1(X)$.

PROPOSITION 4. *Une courbe X sur k est contractile si et seulement si $H_1(X) = 0$.*

On peut bien sûr supposer X connexe. La condition est clairement nécessaire et pour montrer qu'elle est ruffisante, on procède par récurrence sur le nombre de composantes irréducibles. Pour cela, nous allons d'abord montrer que si X n'est pas irréducible, il existe au moins une composante irréductible Y qui rencontre l'union X' des autres composantes en un seul point. Supposons le contraire. Comme l'ensemble des composantes irréductibles est fini et que X est connexe, on peut trouver une suite finie $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ avec $n > 1$ de composantes irréductibles distinctes de X et des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distincts de X tels que $x_i \in Y_i \cap Y_{i+1 \bmod n}$. Il est alors clair que si on choisit des points y_i et z_i de $\widetilde{Y}_i$ au dessus de x_i et $x_{i+1 \bmod n}$, respectivement, alors $\Sigma\,[y_i, z_i]$ définit un élément non nul de $H_1(X)$.

On peut donc écrire $X = X' \cup Y$ avec Y irréductible, et donc contractile par récurrence, et $X' \cap Y = \{x\}$. L'inclusion $\Delta(X') \hookrightarrow \Delta(X)$ est alors clairement une équivalence d'homotopie et X' est connexe. Par récurrence, on peut donc supposer X irréductible. Montrons alors que X est unibranche: sinon, on pourrait trouver deux points distincts y et z de $\widetilde{X}$ au dessus d'un même point x de X et la classe de $[y, z]$ dans $H_1(X)$ serait non nulle. Il est alors clair que $\Delta_{(X)}$ est contractile. ∎

Soit K un corps ultramétrique complet algébriquement clos de corps résiduel k. Si V est une variété analytique rigide connexe sur K, P. Ulrich définit dans [U] le *groupe fondamental* $\pi_1(V)$ de V et son premier *groupe d'homologie* $H_1(V)$. Il considère pour chaque recouvrement admissible $\mathcal{C} := \{V_i\}$ de V, le complexe d'intersection $\Delta_{\mathcal{C}}$ des V_i et pose $\pi_1(V) := \varprojlim \pi_1(\Delta_{\mathcal{C}})$ et $H_1(V) := \varprojlim H_1(\Delta_{\mathcal{C}})$ si bien que $H_1(V)$ est l'abélianisé de $\pi_1(V)$. On dit que V est *simplement connexe* si $\pi_1(V) = 0$. Lorsque V n'est pas connexe, nous dirons par commodité que V est *simplement connexe* si ses composantes connexes le sont. Remarquons que l'on peut aussi étendre la définition de $H_1(V)$ par additivité au cas non connexe. Si A est un groupe abélien et $H^*(V, A)$ désigne comme d'habitude la cohomologie du faisceau constant A, on a toujours $H^1(V, A) \cong \cong \mathrm{Hom}(H_1(V), A)$.

Nous dirons qu'une variété analytique rigide (quasi-compacte et quasi-séparée) a *bonne rèduction* si elle possède un modèle formel lisse. La seconde partie de la proposition suivante généralise l'exemple 3.1 de [vdP].

PROPOSITION 5. *Soit C une courbe projective non singulière sur K et V un ouvert admissible de C^{rig}. Pour que V soit simplement connexe, il faut et suffit que $H^1(V, \mathbb{Z}) = 0$ et c'est le cas si C^{rig} a bonne réduction.*

La condition est clairement nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante et qu'elle est satisfaite si C^{rig} a bonne réduction. On peut supposer V connexe et comme V possède un recouvrement admissible croissant par des ouverts quasi-compacts, on peut aussi supposer V quasi-compact. On se donne alors un recouvrement admissible $\mathcal{C} := \{V_i\}$ de V. Quitte à raffiner ce recouvrement, on peut supposer que les V_i sont en nombre fini, quasi-compacts et connexes. On peut alors trouver un modèle formel $\mathcal{X}$ de C et des ouverts $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_i$ de $\mathcal{X}'$ tels que $\mathcal{U} = \cup \mathcal{U}_i$ et $V_i = = \mathcal{U}_{iK}$ (voir par exemple [LS, 3.1]). Quitte à modifier $\mathcal{X}$, on peut supposer que la fibre spéciale X de $\mathcal{X}$ est réduite avec pour seules singularités des points doubles ordinaires (voir par exemple [L.S., 3.3.7]). Alors, si l'on désigne par U (resp. U_i) la fibre spéciale de $\mathcal{U}_i$, on peut, quitte à raffiner le recouvrement, supposer que le complexe d'intersection de

$\{U_i\}$ est un graphe et il en va donc de même de $\Delta_{\mathcal{C}}$. On sait alors que $H_1(\Delta_{\mathcal{C}})$ est libre de rang fini et que si $H_1(\Delta_{\mathcal{C}}) = 0$, alors $\Delta_{\mathcal{C}}$ est simplement connexe. On voit donc que V est simplement connexe si $H^1(V, \mathbb{Z}) = 0$. Lorsque C^{rig} a bonne réduction, on peut supposer que $\mathcal{X}$ est obtenu en modifiant un modèle formel lisse de C^{rig} et il résulte donc de la proposition 3.3.6 de [LS] et de la proposition 4 que X est contractile. Il en va donc de même de U et il est alors clair que $\Delta_{\mathcal{C}}$ est simplement connexe. Il suit que V aussi est simplement connexe. ■

Le même genre d'argument permet de retrouver le fait [U], Exemple 2.12) que $\pi_1(C^{\text{rig}})$ (et donc aussi $H_1(C^{\text{rig}})$) est un groupe libre. D'autre part, on déduit des propositions 3 et 4 et de ([L.S.], 6.1.3), le résultat suivant.

COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{X}$ un modéle formel géométriquement réduit d'une courbe projective non singulière C et X sa fibre spéciale. Si C^{rig} est simplement connexe alors X est contractile et la réciproque est vraie si les singularités de X sont ordinaires. En fait, sous cette dernière hypothèse, on a toujours $H_1(X) = H_1(C^{\text{rig}})$.* ■

6. Description de l'intégration sur les formes rigides.

Nous allons décrire l'accouplement d'intégration entre $H_1(X)$ et $H^1_{\text{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ (second corollaire de la proposition 1) lorsque X est une réduction à singularités ordinaires d'une courbe projective non singulière C sur $\mathbb{C}_p$.

Soit donc C une courbe projective non singulière sur $\mathbb{C}_p$. On dit qu'un ouvert W de C^{rig} est *sans bord* ou *béant* si son complémentaire est un ouvert quasi-compact de C^{rig}. On choisit maintenant un modèle formel plat et géométriquement réduit $\mathcal{X}$ de C dont on note X la fibre spéciale. On rappelle que si Z est un fermé de X, alors $]Z[$ désigne le tube ouvert de rayon 1 de Z dans C^{rig}. Localement, si $Z = \{\bar{x}, \forall i, \bar{f}_i(\bar{x}) = 0\}$, alors $]Z[= \{x, \forall i, |f_i(x)| < 1\}$. Il est clair que $]Z[$ est un ouvert sans bord de C^{rig} et que celui-ci est quasi-Stein lorsque Z est affine. De même, pour $\varepsilon < 1$, on désignera par $[Z]_\varepsilon$ le tube fermé de rayon ε de Z dans C^{rig} qui est localement défini par $[Z]_\varepsilon = \{x, \forall i, |f_i(x)| \leqslant \varepsilon)\}$. Rappelons enfin qu'un point fermé x de X est un point singulier ordinaire (resp. un point double ordinaire, resp. un point non singulier) de X si et seulement si $]x[$ est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{P}^{1\,\text{rig}}_{\mathbb{C}_p}$ (resp. une couronne, resp. un disque). Il résulte donc de la proposition 5 que si Z est un ensemble fini de points ordinaires de X, alors $]Z[$ est simplement connexe.

Précisons un peu la situation dans le cas d'un point non singulier x de X. Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de x dans $\mathcal{X}$ et un morphisme étale $\mathcal{U} \to \widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathcal{V}}$ qui envoie x sur l'origine dans $\widehat{\mathbb{P}}^1_{\mathcal{V}}$. Cette application induit un isomorphisme entre $]x[$ et $D(0, 1^-)$ que nous utiliserons pour plonger $]x[$ dans $\mathbb{P}^{1\mathrm{rig}}_{\mathbb{C}_p}$. Nous noterons $D_x := \mathbb{P}^{1\mathrm{rig}}_{\mathbb{C}_p} \setminus]x[$ et $D_x^{+\varepsilon} := \mathbb{P}^{1\mathrm{rig}}_{\mathbb{C}_p} \setminus [x]_\varepsilon$ si bien que $]x[$ et $D_x^{+\varepsilon}$ forment un recouvrement (admissible) de $\mathbb{P}^{1\mathrm{rig}}_{\mathbb{C}_p}$ par des ouverts sans bord et leur intersection R_x^ε est une couronne sans bord.

En général, on peut toujours trouver un relèvement $\widetilde{\mathcal{X}}$ de $\widetilde{X}$ et une courbe projective non singulière $\widetilde{\mathcal{C}}$ sur $\mathbb{C}_p$ tels que $\widetilde{\mathcal{X}}$ soit un modèle pour $\widetilde{C}^{\mathrm{rig}}$. On choisit alors un ouvert affine lisse U dense dans X de complémentaire Z et on note V^ε le complémentaire de $[Z]_\varepsilon$ dans C^{rig}. C'est un ouvert sans bord quasi-Stein de C^{rig}. Si $\widetilde{Z}$ est le complémentaire de $\widetilde{U}$ dans $\widetilde{X}$ et $\widetilde{V}^\varepsilon$ le complémentaire de $[\widetilde{Z}]_\varepsilon$ dans $\widetilde{C}^{\mathrm{rig}}$, on sait (voir par exemple [LS], 3.4.6) que l'isomorphisme $\widetilde{U} \cong U$ se prolonge en un isomorphisme $\widetilde{V}^\varepsilon \cong V^\varepsilon$ pour ε suffisamment proche de 1. En particulier, il résulte de la proposition 5 que V^ε est simplement connexe. Remarquons enfin que l'intersection R^ε de $]Z[$ et V^ε est isomorphe à l'union disjointe des couronnes R_y^ε pour $y \in \widetilde{Z}$.

Soit A un groupe abélien. Comme $V^\varepsilon,]Z[$ et $R^\varepsilon = V^\varepsilon \cap]Z[$ sont simplement connexes, on peut toujours calculer $H^1(C^{\mathrm{rig}}, A)$ à la Čech en utilisant le recouvrement $\{V^\varepsilon,]Z[\}$. Autrement dit, $H^1(C^{\mathrm{rig}}, A)$ est le premier groupe de cohomologie du complexe

$$\Gamma(V^\varepsilon, A) \oplus \Gamma(]Z[, A) \underset{(a,b) \to a_{|R^\varepsilon} - b_{|R^\varepsilon}}{\longrightarrow} \Gamma(R^\varepsilon, A).$$

D'autre part, nous avons, lorsque les singularités de X sont ordinaires, un accouplement parfait entre $H_1(X)$ et $H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z})$. Celui ci admet la description suivante (voir [LS], 6.2): si $a \in \Gamma(R^\varepsilon, A)$, on écrit $a = :(a_y)$ avec $a_y \in \Gamma(R_y^\varepsilon, A) = A$. On pose alors $\int_y^z a = a_z - a_y$ et on définit ensuite additivement $\int_\gamma$ pour tout $\gamma \in C_1(X)$. On obtient ainsi une application

$$C_1(X) \times \Gamma(R^\varepsilon, A) \to A, \qquad (\gamma, a) \mapsto \int_\gamma a$$

qui induit notre accouplement en cohomologie lorsque $A = \mathbb{Z}$. Remarquons en particulier que si $a \in \Gamma(]Z[, A)$ ou $\Gamma(V^\varepsilon, A)$ et si $\gamma \in Z_1(X)$, alors $\int_\gamma a_{|R^\varepsilon} = 0$.

Avant de poursuivre, il est nécessaire de rappeler quelques constructions en cohomologie rigide. Par définition, $H^*_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$ est l'hypercohomologie du complexe $\varinjlim j_* \Omega^*_{V^{\varepsilon'}}$ où j parcourt les inclusions $V^{\varepsilon'} \hookrightarrow V^{\varepsilon}$ pour $\varepsilon' > \varepsilon$. En fait, comme C^{rig} est quasi-compact, on a

$$H^*_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p) = \varinjlim H^*_{dR}(V^{\varepsilon'}) = H^*_{dR}(V^{\varepsilon})$$

car $H^*_{dR}(V^{\varepsilon'}) = H^*_{dR}(V^{\varepsilon})$. Comme V^{ε} est quasi-Stein, on voit donc que $H^*_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$ est la cohomologie du complexe

$$\Gamma(V^{\varepsilon}, \mathcal{O}) \to \Gamma(V^{\varepsilon}, \Omega^1_C), \qquad f \mapsto df.$$

Venons en maintenant à $H^*_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p)$. Par définition, c'est l'hypercohomologie du complexe associé au bicomplexe $\Omega^*_{V^{\varepsilon}} \to i_* \Omega^*_{R^{\varepsilon}}$ où $i\colon R^{\varepsilon} \hookrightarrow V^{\varepsilon}$ désigne l'inclusion canonique. Comme V^{ε} et R^{ε} sont quasi-Stein, on voit que $H^*_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p)$ est la cohomologie du complexe

$$\Gamma(V^{\varepsilon}, \mathcal{O}) \underset{g \mapsto (dg,\, g_{|R^{\varepsilon}})}{\longrightarrow} \Gamma(V^{\varepsilon}, \Omega^1_C) \oplus \Gamma(R^{\varepsilon}, \mathcal{O}) \underset{(\omega, f) \mapsto \omega_{|R^{\varepsilon}} - df}{\longrightarrow} \Gamma(R^{\varepsilon}, \Omega^1_C),$$

Remarquons aussi que comme V^{ε} et $]Z[$ sont quasi-Stein, $H^*_{dR}(C)$ est la cohomologie du complexe

$$\Gamma(V^{\varepsilon}, \mathcal{O}) \oplus \Gamma(]Z[, \mathcal{O}) \underset{(g,h) \mapsto (dg,\, g_{|R^{\varepsilon}} - h_{|R^{\varepsilon}},\, dh_{|R^{\varepsilon}})}{\longrightarrow} \Gamma(V^{\varepsilon}, \Omega^1_C) \oplus \Gamma(]Z[, \Omega^1_C) \oplus \Gamma(R^{\varepsilon}, \mathcal{O}) \underset{(\omega, f, \eta) \mapsto \omega_{|R^{\varepsilon}} - df - \eta_{|R^{\varepsilon}}}{\longrightarrow} \Gamma(R^{\varepsilon}, \Omega^1_C).$$

On a donc une interprétation évidente des flèches de cospécialisation $H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) \to H^1_{dR}(C)$ et de spécialisation $H^1_{dR}(C) \to H^1_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$ en termes de cocycles. En particulier, comme on peut identifier $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ avec l'image de la cospécialisation, on obtient une description à la Cech de cet espace. En fait, on peut voir que le noyau de la flèche (surjective) de cospécialisation $H^1_{\mathrm{rig},c}(U/\mathbb{C}_p) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ est engendré par les cocycles de la forme $(0, a_{|R^{\varepsilon}})$ où $a \in \Gamma(]Z[, \mathbb{C}_p)$.

Comme X est de type fini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ et que Z est fini, on peut toujours trouver $q = p^s$ et X_0 sur $\mathbb{F}_q$ tels que les points de Z soient $\mathbb{F}_q$-rationnels et que $X = X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_p$. On note F la puissance s-ième du Frobenius sur X_0 et on désigne par la même lettre son extension à X. On sait (voir par exemple [LS], 3.4.6), qu'il existe pour ε' suffisamment proche de 1, un morphisme $F\colon V^{\varepsilon'} \to V^{\varepsilon}$ dont la restriction à $]U[$ relève le Frobenius de U. On peut aussi supposer que $F(R^{\varepsilon'}) \subset R^{\varepsilon}$ (voir [C2], 2.2, théorème, (i)). En fait, on demandera non seulement que F soit défini sur $V^{\varepsilon'}$ mais que tous ses itérés jusqu'a un certain rang (la dimension de $H^1_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$) le soient. Dans ce qui suit, on notera χ le polynôme caractéristique de F^* sur $H^1_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$. Grâce à l'interpretation rigide de la fonction zêta ([E-LS1], 6.3), il résulte de l'hypothèse de Riemann pour les courbes ([W]), que 1 n'est pas une valeur propre de F^* sur $H^1_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$ et on a donc $\chi(1) \neq 0$.

Avec la description ci dessus de $H^1_{\mathrm{rig}}(U/\mathbb{C}_p)$, on voit que si $\omega \in \Gamma(V^\varepsilon, \Omega^1_C)$, on peut écrire $\chi(F^*)(\omega) = dg$ avec $g \in \Gamma(V^{\varepsilon'}, \mathcal{O})$. Si on se donne en plus $f \in \Gamma(R^\varepsilon, \mathcal{O})$ tel que $\omega_{|R^\varepsilon} = df$, alors $dg_{|R^{\varepsilon'}} = \chi(F^*)(\omega)_{|R^\varepsilon} = d\chi(F^*)(f)$ et on a donc $g_{|R^{\varepsilon'}} = \chi(F^*)(f) + a$ avec $a \in \Gamma(R^{\varepsilon'}, \mathbb{C}_p)$. On pose alors pour $\gamma \in Z_1(X)$,

$$\int_\gamma (\omega, f) = \frac{1}{\chi(1)} \int_\gamma a\,.$$

Si on remplace g par $g + b$, avec $b \in \Gamma(V^{\varepsilon'}, \mathbb{C}_p)$ alors on ajoute $1/\chi(1) \int_\gamma b_{|R^{\varepsilon'}}$ à $\int_\gamma (\omega, f)$. Or puisque $\gamma \in Z_1(X)$ et $b \in \Gamma(V^{\varepsilon'}, \mathbb{C}_p)$, on sait que $\int_\gamma b_{|R^{\varepsilon'}} = 0$. On voit donc que $\int_\gamma (\omega, f)$ ne dépend pas du choix de g et on a donc une application bien définie

$$Z_1(X) \times \mathrm{Ker}\,[\Gamma(V^\varepsilon, \Omega^1_C) \oplus \Gamma(R^\varepsilon, \mathcal{O}) \to \Gamma(R^\varepsilon, \Omega^1_C)] \to \mathbb{C}_p\,.$$
$$(\gamma, (\omega, f)) \mapsto \int_\gamma (\omega, f)$$

Si $g \in \Gamma(V^\varepsilon, \mathcal{O})$, alors $\chi(F^*)(dg) = d(\chi(F^*)(g))$ si bien que $\int_\gamma (dg, g_{|R^\varepsilon}) = 0$. De même, si $a \in \Gamma(]Z[, \mathbb{C}_p)$, alors $\chi(F^*)(a_{|R^\varepsilon}) = \chi(1)\, a_{|R^\varepsilon}$ et $\int_\gamma (0, a_{|R^\varepsilon}) = \int_\gamma a_{|R^\varepsilon} = 0$. On obtient donc un accouplement $H_1(X) \times H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \to \mathbb{C}_p$. Par construction, celui ci respecte l'action de Frobenius sur $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ et prolonge l'accouplement canonique entre $H_1(X)$ et $H^1(C^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z})$. On retrouve donc bien l'accouplement du second corollaire de la proposition 1.

7. L'isomorphisme de Hyodo-Kato.

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe précédent et on va montrer que l'isomorphisme $D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \mathrm{Gr}\, H^1_{dR}(C)$ du paragraphe 5 se relève en un isomorphisme d'espace vectoriels filtrés $D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong H^1_{dR}(C^{\mathrm{rig}})$ compatible avec la dualité de Poincaré et qui prolonge l'inclusion $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p) \hookrightarrow H^1_{dR}(C)$. Pour cela, on va construire un accouplement entre $H_1(X)$ et $H^1_{dR}(\mathbb{C}_p)$ qui étend l'accouplement d'intégration entre $H_1(X)$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$. On fixe une branche du logarithme p-adique que l'on note *log*. On peut prendre par exemple $\log(p) = 0$.

Lorsque X a pour seules singularités des points doubles ordinaires et que U est le lieu non singulier de X, la situation est plus simple. Dans ce cas, $]Z[$ est alors une union disjointe de couronnes. Si $\omega \in \Gamma(V^{\varepsilon}, \Omega^1_C)$, on peut toujours écrire $\chi(F^*)(\omega) = dg$ avec $g \in \Gamma(V^{\varepsilon'}, \mathcal{O})$. D'autre part, si $\eta \in \Gamma(]Z[, \Omega^1_C)$, on peut écrire $\eta = dh$ avec $h = h_1 + k \log h_2$ où $h_1 \in \Gamma(]Z[, \mathcal{O})$, $h_2 \in \Gamma(]Z[, \mathcal{O}^\times)$ et $k \in \Gamma(]Z[, \mathbb{C}_p)$. Si on se donne en plus $f \in \Gamma(R^{\varepsilon}, \mathcal{O})$ tel que $\omega_{|R^{\varepsilon}} = \eta_{|R^{\varepsilon}} + df$, on a donc grâce au lemme 2.4 de [C1], $g_{|R^{\varepsilon'}} = \chi(F^*)(H_{|R^{\varepsilon}} + f) + a$ avec $a \in \Gamma(R^{\varepsilon'}, \mathbb{C}_p)$ et on pose pour $\gamma \in Z_1(X)$,

$$\int_\gamma (\omega, \eta, f) = \frac{1}{\chi(1)} \int_\gamma a\,.$$

Il faut vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de g (resp. h). Cela revient à remplacer g par $g + b$ avec $b \in \Gamma(V^{\varepsilon'}, \mathbb{C}_p)$ ou, toujours grâce au lemme 2.4 de [C1], h par $h + c$ avec $c \in \Gamma(]Z[, \mathbb{C}_p)$. On conclut alors comme dans le cas de $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$ et on obtient donc bien une application

$$Z_1(X) \times \operatorname{Ker}(\Gamma(V^{\varepsilon}, \Omega^1_C) \oplus \Gamma(R^{\varepsilon}, \mathcal{O}) \oplus \Gamma(]Z[, \Omega^1_C) \to \Gamma(R^{\varepsilon}, \Omega^1_C)) \to \mathbb{C}_p$$

qui nous donne un accouplement

$$H_1(X) \times H^1_{dR}(C) \to \mathbb{C}_p\,, \qquad (\gamma, \omega) \mapsto \int_\gamma \omega\,.$$

prolongeant l'accouplement d'intégration entre $H_1(X)$ et $H^1_{\mathrm{rig}}(X/\mathbb{C}_p)$.

Si l'on veut décrire cet accouplement lorsque les singularités de X sont des points multiples ordinaires mais pas nécessairement des points doubles, il faut utiliser l'intégration à la Coleman sur $\mathbb{P}^{1\mathrm{rig}}_{\mathbb{C}_p}$. Celui ci a montré dans la fin du paragraphe 5 de [C1] que si S est un ouvert sans bord de $\mathbb{P}^{1\mathrm{rig}}_{\mathbb{C}_p}$, on peut construire un module à connexion $(\mathcal{O}^1_S, d)$ sur S qui contient $(\mathcal{O}_S, d)$ et satisfait les propriété suivante:

i) si $\omega \in \Gamma(S, \Omega^1)$, il existe $f \in \Gamma(s, \mathcal{O}^1)$ telle que $df = \omega$ et

ii) si $f \in \Gamma(S, \mathcal{O}^1)$ est telle que $df = 0$, alors $f \in \Gamma(S, \mathbb{C}_p)$.

On peut donc toujours trouver, pour $\eta \in \Gamma(]Z[, \Omega^1)$, un $h \in \Gamma(]Z[, \mathcal{O}^1)$ tel que $\eta = dh$ et étendre ainsi la construction ci dessus au cas où les singularités de X ne sont pas nécessairement des points doubles.

En fait, les techniques d'integration plus générales de R. Coleman permettent de décrire notre l'accouplement directement, sans utiliser le Frobenius (en fait, il est caché dans ses constructions). Soit W un ouvert simplement connexe sans bord de C^{rig} et $\mathcal{O}_W^{\log}$ le faisceau des fonctions localement analytiques sur W. Alors, Coleman a annoncé, et quasiment démontré dans [C2], qu'il existe une unique application linéaire fonctorielle en W, $\int : \Gamma(W, \Omega^1) \to \Gamma(W, \mathcal{O}^{\mathrm{loc}})/\Gamma(W, \mathbb{C}_p)$ telle que

i) si $\omega \in \Gamma(W, \Omega^1)$ et $\int \omega = f \bmod \Gamma(W, \mathbb{C}_p)$, alors $df = \omega$ et

ii) $\int dt/t = \log t \bmod \mathbb{C}_p$ sur $\mathbb{G}_m^{\mathrm{rig}}$.

On peut alors décrire notre accouplement de manière particulièrement élégante: soient $\omega \in \Gamma(V^\varepsilon, \Omega_C^1)$, $\eta \in \Gamma(]Z[, \Omega_C^1)$ et $f \in \Gamma(R^\varepsilon, \mathcal{O})$ tels que $\omega_{|R^\varepsilon} = \eta_{|R^\varepsilon} + df$. Comme V^ε et $]Z[$ sont des ouverts sans bord simplement connexes, on peut écrire $\int \omega = g \bmod \Gamma(V^\varepsilon, \mathbb{C}_p)$ et $\int \eta = h \bmod \Gamma(]Z[, \mathbb{C}_p)$. On a donc $g_{|R^\varepsilon} = h_{|R^\varepsilon} + f + a$ avec $a \in \Gamma(R^\varepsilon, \mathbb{C}_p)$ et on pose $\int_\gamma (\omega, \eta, f) = \int_\gamma a$ pour tout $\gamma \in Z_1(X)$. Le reste suit comme d'habitude. Remarquons que c'est en utilisant la même méthode que R. Coleman décrit l'action de Frobenius sur $H_{dR}^1(C)$ dans [C3].

Voici enfin comment on relève l'isomorphisme $D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong \cong \mathrm{Gr}\, H_{dR}^1(C)$ en un isomorphisme $D(X) \otimes_W \mathbb{C}_p \cong H_{dR}^1(C)$. Comme on veut que celui ci soit compatible avec la dualité de Poincaré et les filtrations et qu'il prolonge l'inclusion $H_{\mathrm{rig}}^1(X/\mathbb{C}_p) \hookrightarrow H_{dR}^1(C)$, il revient au même de décrire un scindage canonique de la suite exacte

$$0 \to H_{\mathrm{rig}}^1(X/\mathbb{C}_p) \to H_{dR}^1(C) \to H_1(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}_p \to 0\,.$$

et celui ci est induit, en utilisant la dualité de Poincaré, par notre accouplement d'integration entre $H_1(X)$ et $H_{dR}^1(C)$. En particulier, on voit que $H_{dR}^1(C)$ est muni par transport de structure d'une action de Frobenius.

8. La monodromie.

Nous gardons les hypothèses précédentes et nous allons définir l'opérateur de monodromie N sur $H_{dR}^1(C)$ associé à un modèle à singularités ordinaires $\mathcal{X}$. Celui ci sera induit par un produit scalaire sur $H_1(X)$ à valeurs dans $|\mathbb{C}_p^*|$, c'est à dire un accouplement symétrique $H_1(X) \times \times H_1(X) \to |\mathbb{C}_p^*|$ tel que $\gamma . \gamma < 1$ si $\gamma \neq 0$.

Ici encore, lorsque les singularités de X sont des points doubles ordinaires et que U est le lieu non singulier de X, la situation est particulièrement simple. Si $x \in Z$, alors $]x[$ est une couronne sans bord d'épaisseur r_x, c'est à dire isomorphe à $D(0, 1^-)\backslash D(0, r_x)$. On considère alors l'unique accouplement $C_1(X) \times C_1(X) \to |\mathbb{C}_p^*|$ telle que $[y, z][y, z] = r_x$ si y et z sont les deux points au dessus de x et $[y, z][y', z'] = 1$ si y' et z' sont au dessus d'un autre point. Cet accouplement induit bien un produit scalaire sur $H_1(X)$ à valeurs dans $|\mathbb{C}_p^*|$ comme annoncé. Le cas particulier où $\mathcal{X}$ est à réduction semi-stable, c'est à dire où $r_x = r$ est indépendant de x, est particulièrement remarquable car alors, le produit scalaire est canoniquement associé à X. On retrouve en fait dans ce cas l'accouplement 12.4.5 de [G].

En général, si $x \in Z$ on peut avec les notations du paragraphe 6, recoller $]x[$ avec les $D_y^{+\varepsilon}$ (pour y au dessus de x) le long des R_y^ε afin d'obtenir une courbe C_x^{rig}. On sait alors par ([B-L], théorème 7.5) que x est un point singulier ordinaire si et seulement si C_x est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$. Dans ce cas, on identifiera C_x avec $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$ de telle sorte qu'aucun des disques D_y ne contienne le point à l'infini. Si X n'a que des singularités ordinaires, on peut alors considérer l'unique accouplement $C_1(X) \times C_1(X) \to |\mathbb{C}_p^*|$ tel que

i) $[y, z][y, z] = rs/|b - a|^2$ si y et z sont deux points distincts au dessus de x avec $D_y = D(a, r)$ et $D_z = D(b, s)$,

ii) $[y, z][y, u] = r|d - b|/|d - a|\,|b - a|$ si u est un autre point au dessus de x et $d \in D_u$,

iii) $[y, z][t, u] = |d - b|\,|c - a|/|c - b|\,|d - a|$ si t est encore un autre point au dessus de x et $c \in D_t$, et

iv) $[y, z][y', z'] = 1$ si y' et z' sont au dessus d'un autre point.

On peut remarquer que dans le cas i), on retrouve les mêmes invariants que dans la définition 3.1 de [L]. Il faut maintenant s'assurer que notre définition ne dépend pas des choix (et aussi qu'elle est identique à la précédente dans le cas des points doubles ordinaires). Pour cela, on choisit $g \in \mathbb{C}_p$ tel que $s = |g - b|$ et on considère l'unique automorphisme φ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$ qui envoie a sur 0, b sur ∞ et g sur 1. Celui ci est donc donné par

$$\varphi(\alpha) = \frac{(g - b)(\alpha - a)}{(g - a)(\alpha - b)}.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME. *On a* i) $\alpha \in D_z$ *si et seulement si* $|\varphi(\alpha)| \geq 1$ *et* ii) $\alpha \in D_y$ *si et seulement si* $|\varphi(\alpha)| \leq rs/|b - a|^2$.

Dire que $|\varphi(\alpha)| \geqslant 1$ est équivalent à dire que

$$|\alpha - b| \leqslant |g - b|\,|\alpha - a|/|g - a| = s|\alpha - a|/|b - a|\,.$$

Comme $|b - a| > s$, cette inégalité implique que $|\alpha - b| < |\alpha - a|$ et donc que $|\alpha - a| = |b - a|$ si bien que l'inégalité devient $|\alpha - b| \leqslant s$. Comme on a toujours $|\alpha - a| = |b - a|$ pour $\alpha \in D_z$, on voit que $\alpha \in D_z$ si et seulement si $|\varphi(\alpha)| \geqslant 1$. De même, dire que $|\varphi(\alpha)| \leqslant rs/|b - a|^2$ est équivalent à dire que

$$|\alpha - a| \leqslant rs|g - a|\,|\alpha - b|/|g - b|\,|b - a|^2 = r|\alpha - b|/|b - a|$$

et on conclut de la même façon. ■

On en déduit tout d'abord que si x est un point double, alors $]x[$, qui est le complémentaire de D_y et D_z, est (isomorphe par φ à) une couronne d'épaisseur $rs/|b - a|^2$ et donc que la nouvelle définition coïncide bien avec l'ancienne dans ce cas. On en déduit aussi que $[y, z][y, z]$ est bien défini: en effet, si ψ est un automorphisme de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}_p}$, alors $\varphi' := \varphi \circ \psi^{-1}$ envoie $\psi(a)$ sur 0, $\psi(b)$ sur ∞ et $\psi(g)$ sur 1. Si on pose $s' = |\psi(e) - \psi(b)|$, on voit en apliquant le lemme à φ' que $\psi(\alpha) \in D(b', s')$ si et seulement si $|\varphi(\alpha)| = |\varphi'(\psi(\alpha))| \geqslant 1$ si et seulement si $\alpha \in D_z$ si bien que $\psi(D_z) = D(\psi(b), s')$. Ensuite, en appliquant le lemme à φ, on voit que $|\varphi'(\alpha)| \leqslant rs/|b - a|^2$ si et seulement si $\psi^{-1}(\alpha) = \varphi^{-1}(\varphi'(\alpha)) \in D_y$ ou encore $\alpha \in \psi(D_z)$. On remarque ensuite que $[y, z][y, u]$ aussi est bien défini car

$$\frac{r|c - b|}{|c - a|\,|b - a|} = \frac{rs/|b - a|^2}{|\varphi(c)|}\,.$$

Or on vient de voir que $rs/|b - a|^2$ est indépendant des choix et on a bien sûr $\varphi'(\psi(c)) = \varphi(c)$. Enfin, $[y, z][t, u]$ est bien défini car

$$\frac{(d - b)(c - a)}{(c - b)(d - a)} = \frac{\varphi(c)}{\varphi(d)}\,.$$

Finalement, pour que notre accouplement induise effectivement un produit scalaire sur $H_1(X)$, il faut vérifier que l'on a toujours $([y, v] + [v, z])\cdot[y', z'] = [y, z]\cdot[y', z']$. Si $e \in D_v$, cela résulte des trois calculs ci-dessous:

$$([y, v] + [v, z])\cdot[y, z] = ([y, v]\cdot[y, z])([z, v])\cdot[z, y]) =$$

$$= \frac{r|e - b|}{|e - a|\,|b - a|}\cdot\frac{s|e - a|}{|e - b|\,|b - a|} = \frac{rs}{|b - a|^2} = [y, z]\cdot[y, z],$$

$$([y,v]+[v,z])\cdot[y,z]=([y,v]\cdot[y,u])([v,z])\cdot[y,u])=$$

$$=\frac{r|e-d|}{|e-a|\,|d-a|}\,\frac{|d-b|\,|e-a|}{|e-d|\,|b-a|}=\frac{r|d-b|}{|d-a|\,|b-a|}=[y,z]\cdot[y,u],$$

$$([y,v]+[v,z])\cdot[t,u]=([y,v]\cdot[t,u])([v,z])\cdot[t,u])=$$

$$=\frac{|d-e|\,|c-a|}{|c-e|\,|d-a|}\,\frac{|d-b|\,|c-e|}{|c-b|\,|d-e|}=\frac{|d-b|\,|c-a|}{|c-b|\,|d-a|}=[y,z]\cdot[y,u].$$

Voici enfin comment on construit l'opérateur de monodromie à partir du produit scalaire sur $H_1(X)$. On choisit un isomorphisme $|\mathbb{C}_p^*|\cong$ $\cong\mathbb{Q}$, en envoyant par exemple $|p|$ sur 1, ce qui revient à décrire la valeur absolue de $\mathbb{C}_p$ par une valuation $v\colon \mathbb{C}_p^*\to\mathbb{Q}$. On a donc un produit scalaire $H_1(X)\times H_1(X)\to\mathbb{Q}$. Qui fournit un accouplement symétrique nécessairement parfait $H_1(X)\otimes\mathbb{Q}\times H_1(X)\otimes\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ et donc un isomorphisme $\overline{N}$ entre $\mathrm{Gr}^0 D(X)\otimes\mathbb{Q}$ et son dual que l'on identifie avec $\mathrm{Gr}^2 D(X)\otimes\mathbb{Q}$. On définit alors l'opérateur de monodromie N sur $D(X)\otimes\mathbb{Q}$ comme étant nul sur $\mathrm{Fil}^1 D(X)\otimes\mathbb{Q}$ et valant $\overline{N}$ sur $\mathrm{Gr}^0 D(X)\otimes\mathbb{Q}$. C'est clairement un opérateur nilpotent d'échelon 2 et la filtration associée est la filtration par le poids. Enfin, on peut utiliser l'isomorphisme du paragraphe 7 pour transporter N sur $H^1_{dR}(C)$. En fait, ce n'est pas nécessaire car on peut aussi voir N comme le composé de la projection de $H^1_{dR}(C)$ sur $\mathrm{Gr}^0 H^1_{dR}(C)=H_1(X)\otimes C_p$, de $\overline{N}\otimes\mathbb{C}_p$ en identifiant le dual de $H_1(X)\otimes\mathbb{C}_p$ avec $\mathrm{Fil}^2 H^1_{dR}(C)=H^1(C^{\mathrm{rig}},\mathbb{C}_p)$, et enfin de l'inclusion de $\mathrm{Fil}^2 H^1_{dR}(C)$ dans $H^1_{dR}(C)$. Par construction, la filtration par la monodromie coïncide avec la filtration par le poids et on a bien $N\varphi=p\varphi N$.

9. Exemple: Les courbes de Tate.

Nous allons appliquer nos résultats aux des courbes de Tate et en déduire un critère cohomologique d'isogénie pour ces courbes.

Si $\mathbb{G}_m$ est le groupe multiplicatif et z un générateur de son groupe de caractères, on a $\mathbb{G}_m=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[z,z^{-1}]$. Si $\omega_{\mathbb{G}_m}$ est le groupe des formes différentielles invariantes sur $\mathbb{G}_m$, on a

$$\omega_{\mathbb{G}_m}=\mathbb{Z}d\log z\subset\Gamma(\mathbb{G}_m,\Omega^1)=\mathbb{Z}[z,z^{-1}]\,dz\,.$$

On dispose d'un accouplement naturel parfait entre $\omega_{\mathbb{G}_m}$ et l'algèbre de Lie de $\mathbb{G}_m$ et on identifie $\operatorname{Lie}\mathbb{G}_m$ avec le groupe des caractères de $\mathbb{G}_m$ en envoyant le générateur dual zd/dz de $d\log z$ sur z. Enfin, l'application canonique $\omega_{\mathbb{G}_{m\mathbb{C}_p}}\to H^1_{dR}(\mathbb{G}_{m\mathbb{C}_p})$ est bijective et nous permet donc d'identifier ces deux espaces et de considérer $d\log z$ comme base de $H^1_{dR}(\mathbb{G}_{m\mathbb{C}_p})$.

Si E est une courbe elliptique sur $\mathbb{C}_p$ avec $|j(E)| > 1$, on peut réaliser E^{rig} comme quotient de $\mathbb{G}^{\mathrm{rig}}_{m\mathbb{C}_p}$ par un sous groupe discret $q^{\mathbb{Z}}$ avec $q \in \mathbb{C}_p$ et $0 < |q| < 1$. On dit aussi que E est une *courbe de Tate* sur $\mathbb{C}_p$. Dans ce cas, nous avons

$$H^1_{dR}(E) = H^1(E^{\mathrm{rig}}, \mathbb{C}_p) \oplus \Gamma(E, \Omega^1).$$

Si $\pi\colon \mathbb{C}^{\mathrm{rig}}_{m\mathbb{C}_p} \to E^{\mathrm{rig}}$ est le morphisme canonique, l'application composée

$$\Gamma(E, \Omega^1) \to H^1_{dR}(E) \xrightarrow{\pi^*} H^1_{dR}(\mathbb{G}_{m\mathbb{C}_p})$$

est bijective. Nous identifierons $\Gamma(E, \Omega^1)$ avec $H^1_{dR}(\mathbb{G}_{m\mathbb{C}_p})$ et considérons donc $d\log z$ comme élément de $H^1_{dR}(E)$. La dualité de Poincaré sur $H^1_{dR}(E)$ induit un accouplement parfait entre $H^1(E^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z}) \subset \subset H^1(E^{\mathrm{rig}}, \mathbb{C}_p)$ et $\omega_{\mathbb{G}_m}$. On a donc un isomorphisme naturel entre $H^1(E^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{Lie}\,\mathbb{G}_m$ qui nous permet de considérer z comme générateur de $H^1(E^{\mathrm{rig}}, \mathbb{Z})$. Nous voyons donc que z er $d\log z$ forment une base de $H^1_{dR}(E)$.

Un petit calcul nous donne que $H_1(X)$ est un groupe monogène sur un générateur γ, que $\gamma\cdot\gamma = v(q) \in \mathbb{Q}$, que $\int_\gamma z = 1$ et que $\int_\gamma d\log z = \log q$. On en déduit qu'une base du W-module gradué $D(X)$ vu comme sous- module de $H^1_{dR}(E)$ est $(z, d\log z - \log q\cdot z)$ et que les matrices de N et φ dans cette base sont respectivement

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v(q) & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}.$$

Remarquons aussi que, dans cette base, z a pour coordonnées (1,0) et $d \log z$ a pour coordonnées $(\log q, 1)$.

Le résultat suivant est probablement bien connu (et il résulte de la conjecture C_{st} de Fontaine pour les courbes ou les variétés abéliennes) mais il illustre bien l'efficacité des outils mis en place.

PROPOSITION 6. *Deux courbes de Tate E et E' sont isogènes (i.e. il existe i et $j \in \mathbb{N}\backslash 0$ tels que $q'^i = q^j$) si et seulement si il existe un isomorphisme entre $H^1_{dR}(E)$ et $H^1_{dR}(E')$ qui respecte la monodromie, le Frobenius et la filtration de Hodge.*

On munit $H^1_{dR}(E)$ de la base $(z, d\log z - \log q\cdot z)$ et $H^1_{dR}(E')$ de la base analogue. Se donner un isomorphisme $H^1_{dR}(E) \xrightarrow{\sim} H^1_{dR}(E')$ qui respecte la monodromie, le Frobenius et la filtration de Hodge revient à se donner une matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \qquad ad - bc \neq 0 .$$

telle que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v(q) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ v(q') & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix},$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \log q \\ 1 \end{bmatrix} = e \begin{bmatrix} \log q' \\ 1 \end{bmatrix},$$

avec $e \in \mathbb{C}_p$. Ceci est équivalent à se donner a, b, c, d et $e \in \mathbb{C}_p$ tels que $ad - bc \neq 0, c = 0, av(q) = dv(q'), b = 0, a \log q = e \log q'$ et $d = e$, ce qui revient à se donner deux scalaires non nuls a, $d \in \mathbb{C}_p$ tels que $av(q) = dv(q')$ et $a \log q = d \log q'$. On voit donc que la condition de la proposition est équivalente au fait que $v(q) \log q' = v(q') \log q$. Comme $v(q)$ et $v(q') \in \mathbb{Q}$, on peut toujours trouver $m, n \in \mathbb{N} \backslash 0$ tels que $mv(q) = nv(q')$. La condition de la proposition est équivalente à $m \log q = n \log q'$, soit encore $\log q^n = log\, q'^m$. Comme $v(q^n) = v(q'^m)$, cela revient encore à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N} \backslash 0$ tel que $q'^{mk} = q^{nk}$, et donc finalement qu'il existe i et $j \in \mathbb{N} \backslash 0$ tels que $q'^i = q^j$. ■

RÉFÉRENCES

[B-L] S. BOSCH - W. LÜTKEBOHMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Ann., **270** (1985), pp. 349-379.

[C1] R. COLEMAN, *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math., **69** (1982), pp. 171-208.

[C2] R. COLEMAN, *p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions*, Invent. Math., **93** (1988), pp. 239-266.

[C3] R. COLEMAN, *A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms*, Cont. Math., **165** (1994), pp. 21-51.

[E-LS1] J.-Y. ETESSE - B. LE STUM, *Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I, Interprétation cohomologique*, Math. Ann., **296** (1993), pp. 557-576.

[E-LS2] Y.-Y. ETESSE - B. LE STUM, *Fonctions L associées aux F.-isocristaux surconvergents III, La conjecture de Katz pour les variétés propre*, prépublication de l'IRMAR 94-04 (1994).

[F] J.-M. FONTAINE, lettre à U. Jannsen (1987).

[G] A. GROTHENDIECK, *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie algébrique 7, Tome I, Chap. IX, lecture notes 288 (1973).

[H-K] O. HYODO - K. KATO, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, à paraître dans le séminaire de Bures (1994).

[L] Q. LIU, *Ouverts analytiques d'une courbe algébrique en géométrie rigide*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **37** (3) (1987), pp. 65-84.

[LS] B. LE STUM, *Filtration par le poids sur la cohomologie de de Rham d'une courbe projective non singulière sur un corp ultramétrique complet*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **93** (1995), pp. 43-85.

[vdP] M. VAN DER PUT, *A note on p-adic uniformization*, Mathematics, Proceedings A, **90**, 3, September 28, (1987).

[U] P. ULRICH, *Rigid analytic covering maps*, in *Proceedings of the Conference on p-Adic Analysis, Hengelhoef*, (1986), pp. 159-171.

[W] A. WEIL, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann, Paris (1984).

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 marzo 1995.