Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Alessandro Tiero

Il teorema del trasporto per un'interfaccia in moto attraverso una regione di controllo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 92 (1994), p. 91-125
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__92__91_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 92 (1994)

Il teorema del trasporto per un'interfaccia in moto attraverso una regione di controllo.

ALESSANDRO TIERO (*)

ABSTRACT - In this paper the kinematics of interfaces is studied by means of methods and tools taken from the geometry of manifolds. An interfacial motion, *i.e.*, a time-family of embedded submanifolds, is represented by means of an isotopy of a parameter manifold in the ambient space. The notion of superficial form is used to formalize the concept of density of extensive physical quantities; for superficial forms, a normal derivative operator is defined in terms of the Lie derivative operator. With this machinery, the proof of a transport theorem for interfaces that evolve across a fixed region of the ambient space turns out to be completely analogous to the classical proof of Reynolds Transport Theorem.

1. Introduzione.

Si dice *interfaccia* una superficie che modella la regione di separazione tra coppie di corpi materiali: ad esempio, la superficie di separazione tra le fasi liquida e solida di una stessa sostanza. La peculiare difficoltà di descrizione della cinematica e, più in generale, della termomeccanica delle interfacce nasce dall'impossibilità di considerarle come corpi materiali; infatti, i fenomeni interfacciali tipici sono indifferenti a trasformazioni dell'interfaccia in sé. Obiettivo di questo lavoro è lo studio della cinematica delle interfacce con gli strumenti e i metodi della geometria delle varietà differenziabili.

Nella Sezione 2 si introducono i concetti di spazio ambiente, interfaccia e moto interfacciale. Lo spazio ambiente e l'interfaccia si pensano

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Roma «Tor Vergata», Roma, Italy.

dotati della struttura di varietà di volume, più debole e di più immediata interpretazione fisica rispetto a quella solitamente adottata di varietà riemanniana. L'usuale nozione di moto, basata sull'applicazione (isotopia) che istante per istante associa ad ogni punto materiale la sua posizione nello spazio ambiente, viene sostituita con quella di moto come famiglia ad un parametro di sottovarietà dello spazio ambiente. Sotto ipotesi di regolarità abituali in meccanica dei continui, il moto può essere sempre rappresentato mediante un'isotopia definita su di una varietà differenziabile che prende il nome di varietà dei parametri. In questo caso però, al contrario del moto dei corpi materiali, viene a cadere la corrispondenza biunivoca tra moto e sua rappresentazione. (Data una isotopia, la sua composizione con un qualsiasi diffeomorfismo della sua varietà dei parametri descrive lo stesso moto interfacciale.) Introdotta allora un'ovvia relazione di equivalenza tra rappresentazioni del moto, la corrispondenza è tra moti e classi di equivalenza di rappresentazioni di moto mediante isotopie; al fine di descrivere il moto la scelta di una particolare isotopia non è che la selezione di un rappresentante in una classe di equivalenza, e lo studio della cinematica delle interfacce consiste nell'analisi delle grandezze cinematiche ben definite sulla collezione di tali classi (1).

Nelle Sezioni 3 e 4 si introduce la nozione di velocità di un moto interfacciale. Le proprietà istantanee del moto vengono dedotte da quelle di una sua generica rappresentazione, per la quale la nozione di velocità è quella usuale. Scelto un rappresentante della forma di volume dell'interfaccia (cioè, una forma definita sullo spazio ambiente tale che il suo pull-back sull'interfaccia sia la forma di volume fissata), risulta definito il campo della normale secondo Weyl ed è possibile decomporre la velocità nelle sue componenti normale e tangenziale all'interfaccia. (La normale secondo Weyl coincide con la normale in senso metrico se la forma superficiale dell'interfaccia e la forma di volume dello spazio ambiente sono quelle indotte dalla metrica.) Si dimostra che la componente nor-

(1) Il moto delle interfacce può essere anche descritto pensando all'interfaccia come superficie di livello di una funzione scalare definita sullo spazio-tempo ambiente, cfr. [8], [9]. Almeno nel caso regolare tale rappresentazione non risulta conveniente sia perchè al pari della rappresemtazione mediante isotopie non è unica sia soprattutto, in vista di una teoria dinamica delle interfacce, per le difficoltà che pone all'introduzione del concetto chiave in dinamica di *parte* dell'interfaccia. Infatti, la descrizione del moto di una porzione dell'interfaccia, se quest'ultima è pensata come superficie di livello, non discende direttamente da quella dell'interfaccia; nella rappresentazione mediante isotopie, invece, la descrizione del moto di una porzione si ottiene semplicemente restringendo l'isotopia ad un sottoinsieme del suo insieme di definizione.

male della velocità, al contrario di quella tangenziale, è indipendente dalla rappresentazione del moto scelta e quindi, a meno della scelta del rappresentante della forma di volume dell'interfaccia, è una caratteristica intrinseca del moto. Si stabiliscono altresì le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una rappresentazione normale, cioè, di una rappresentazione del moto con velocità tangenziale nulla.

Nella termomeccanica dei mezzi continui si richiede che le grandezze estensive che intervengono nella teoria abbiano una rappresentazione integrale in termini di associate densità. Il concetto di densità viene formalizzato nella Sezione 5 mediante la nozione di forma interfacciale: dato un moto, una forma interfacciale è una famiglia ad un parametro di forme differenziali definite sulle interfacce del moto.

L'operazione di derivazione secondo la normale, introdotta in [2] e [4] per le funzioni scalari, viene ridefinita in termini di derivazione alla Lie rispetto alla velocità normale ed estesa alle forme interfacciali nella Sezione 6. Nel caso di spazio ambiente dotato di struttura riemanniana, si trova così l'interessante risultato che la derivata normale della forma di volume indotta dalla metrica è data dal prodotto della velocità normale per la curvatura media dell'interfaccia, un costrutto che ricorre di frequente nello studio delle interfacce.

Il lavoro si conclude con un teorema di trasporto per interfacce «ritagliate», cioè, per le superficie con bordo che risultano dall'intersezione di una interfaccia in moto con una regione di controllo dello spazio ambiente (Sezione 7). Il risultato in sé è noto [4], [6]. Il confronto tra la dimostrazione del teorema data nella Sezione 8, che si dispiega sostanzialmente come quella del classico teorema di trasporto dovuto a Reynolds, e le dimostrazioni contenute nei lavori di Gurtin, Struthers e Williams [4] e di Moeckel [6] mette in luce quanto l'armamentario metrico, facendo velo alla struttura del problema, ne conduca alla soluzione con inevitabile impaccio. Infatti, l'individuazione dei costrutti significativi (flussi su varietà, integrazione di forme differenziali, differenziazione alla Lie) a partire da quelli propri della struttura metrica risulta, se non ardua, sicuramente alquanto laboriosa.

2. Superfici di separazione in moto.

Sia $\mathcal{A}$ una varietà differenziabile di dimensione n, orientata con forma di volume μ, alla quale ci riferiremo come allo *spazio ambiente*. Una sottovarietà $(n-1)$-dimensionale $\mathcal{S}$ di $\mathcal{A}$ si dice una *superficie di* (*netta*) *separazione* in $\mathcal{A}$ se

(i) esistono due insiemi aperti e non vuoti $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{A}_-$ di $\mathcal{A}$ tali che

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{S} = \mathcal{A}_+ \cup \mathcal{A}_-, \qquad \text{con } \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{A}_- = \emptyset; \tag{2.1}$$

(ii) qualora $\mathcal{A}$ abbia bordo $\partial\mathcal{A}$, $\mathcal{S}$ non è tangente a $\partial\mathcal{A}$ (2).

Dalla definizione segue che una superficie di separazione è una varietà chiusa e orientabile; segue anche che, se A ha bordo $\partial\mathcal{A}$, allora anche $\mathcal{S}$ ha bordo $\partial\mathcal{S}$ e $\partial\mathcal{S} = \partial\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$. Converremo di dotare $\mathcal{S}$ della forma di volume $\tilde{\nu}$ e l'eventuale bordo $\partial\mathcal{S}$ della forma di volume $\tilde{\rho}$. Diremo che una $(n-1)$-forma ν e una $(n-2)$-forma ρ definite su $\mathcal{A}$ sono *rappresentanti in* $\mathcal{A}$ delle forme di volume $\tilde{\nu}$ e $\tilde{\rho}$ se (3)

$$\tilde{\nu} = \iota^* \nu, \qquad \tilde{\rho} = \iota_\partial^* \rho, \tag{2.2}$$

dove ι e ι_∂ sono le immersioni canoniche di $\mathcal{S}$ e $\partial\mathcal{S}$ in $\mathcal{A}$. È immediato verificare l'esistenza e la non unicità dei rappresentanti in $\mathcal{A}$ delle forme di volume $\tilde{\nu}$ e $\tilde{\rho}$.

OSSERVAZIONE 2.1. Questa nozione di superficie di separazione è costruita per modellare matematicamente le *interfacce* che si incontrano in varie applicazioni, tra le quali sono tipiche le interfacce solido-liquido nei problemi bifasi. ■

Un *moto interfacciale* è una famiglia ad un parametro $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$ di superfici di separazione in $\mathcal{A}$ tale che

$$\mathcal{S}_{t_1} \text{ sia diffeomorfa a } \mathcal{S}_{t_2} \qquad (\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}). \tag{2.3}$$

Assegnato un moto $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$, da (2.3) segue l'esistenza di una varietà differenziabile M, la *varietà dei parametri* (4), e di una famiglia $\{\tilde{\varphi}_t, t \in \mathbb{R}\}$ di diffeomorfismi definiti su M, tali che

$$\tilde{\varphi}_t(M) = \mathcal{S}_t \qquad (\forall t \in \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Nel seguito considereremo soltanto moti *regolari*, intendendo con questo che sia regolare (ad esempio, di classe C^1) l'isotopia $\varphi: M \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}$

(2) *Cf.* la nozione di sottovarietà *neat* in Hirsch [5], p. 28.

(3) Aderiamo qui all'uso di indicare con asterisco in alto l'operazione di *pull-back*; in seguito indicheremo l'operazione di *push-forward* con un asterisco in basso.

(4) Come varietà dei parametri si può prendere la superficie $\mathcal{S}_\tau$ ad un istante fissato τ, o una qualsiasi varietà a questa diffeomorfa.

definita da

$$\varphi(x, t) = \iota_t \circ \tilde{\varphi}_t(x) \qquad (\forall x \in M)(\forall t \in \mathbb{R}), \tag{2.5}$$

dove $\iota_t\colon \mathcal{S}_t \to \mathcal{A}$ è l'immersione canonica nello spazio ambiente all'istante t. Ricordiamo che un'applicazione $\varphi\colon M \times \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ si dice un'isotopia di M in $\mathcal{A}$ se, indicata con $j_{M,t}$ l'immersione canonica al tempo t di M in $M \times \mathbb{R}$, l'applicazione

$$\varphi_t = \varphi \circ j_{M,t} \tag{2.6}$$

è un'immersione (*embedding*) di M in $\mathcal{A}$.

Dato un moto $\{\mathcal{S}_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ e scelta una varietà dei parametri M, diremo che la coppia (M, φ) fornisce una *rappresentazione* del moto mediante il *posizionamento* φ. Due coppie (M, φ), (N, θ) sono rappresentazioni equivalenti di uno stesso moto $\{\mathcal{S}_t,\, t \in \mathbb{R}\}$ se

$$\varphi_t(M) = \theta_t(N) \qquad (\forall t \in \mathbb{R}) \tag{2.7}$$

ovvero, come si può provare, se esiste un *cambiamento di parametrizzazione* da M a N, cioè, un'isotopia $\psi\colon N \times \mathbb{R} \to M$ di N su M, tale che

$$\theta(y, t) = \varphi(\psi(y, t), t) \qquad (\forall y \in N)(\forall t \in \mathbb{R}).$$

Per descrivere un moto nello spazio-tempo $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$, è utile considerare l'applicazione

$$\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to \mathcal{A} \times \mathbb{R}, \qquad \Phi(x, t) = (\varphi(x, t), t), \tag{2.8}$$

alla quale si dà il nome di *posizionamento esteso* associato alla rappresentazione (M, φ) del moto in esame. Si dimostra che Φ è un diffeomorfismo sulla propria immagine $\Phi(M \times \mathbb{R})$

In [4] la cinematica delle superfici di separazione è descritta in termini di un loro posizionamento esteso Φ, cioè, di un loro posizionamento nello spazio-tempo. In questo lavoro proponiamo una descrizione differente, basata sul posizionamento φ nello spazio ambiente. L'equivalenza tra queste descrizioni è messa in evidenza nel diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R} \arrow[r, "p_M"] \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & M \arrow[d, "\varphi_t"] \\ \mathcal{A} \times \mathbb{R} \arrow[r, "p_A"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}, \tag{2.9}$$

dove $p_{\mathcal{A}}$, p_M sono le proiezioni di $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ e di $M \times \mathbb{R}$ su M. Notiamo che anche in [6], sebbene in modo implicito, si usa il posizionamento nello spazio ambiente per descrivere il moto. Ci si convince facilmente, infatti, che le «fictitious particles» di cui si immagina sia costituita l'interfaccia e le «transformations» che istante per istante forniscono la posizione di tali particelle (cfr. [6], p. 259, l. +18 e l. +23) possono essere identificate, rispettivamente, con i punti di una non specificata (in [6]) varietà dei parametri e con il posizionamento nello spazio ambiente.

Per quanto utile possa essere una rappresentazione parametrica del moto interfacciale, rimane l'esigenza di prescinderne, almeno per le manipolazioni concettuali, e descrivere un moto interfacciale direttamente in termini degli oggetti geometrici che lo eseguono, le superfici di separazione. Questa esigenza si soddisfa rappresentando le applicazioni φ_t e Φ nelle forme $\varphi_t = \iota_t \circ \tilde{\varphi}_t$ e $\Phi = \iota \circ \tilde{\Phi}$, dove $\tilde{\varphi}_t$ è un diffeomorfismo di M su $\mathcal{S}_t$ mentre $\tilde{\Phi}$ è un diffeomorfismo di $M \times \mathbb{R}$ su $\mathcal{T}$, la sottovarietà che costituisce la preimmagine di $\Phi(M \times \mathbb{R})$ rispetto all'immersione canonica ι. Chiameremo $\mathcal{T}$ la *traiettoria* del moto, per quanto questo termine sia di solito usato per $\iota(\mathcal{T}) = \Phi(M \times \mathbb{R})$. Le relazioni tra le applicazioni Φ, $\tilde{\Phi}$, φ, $\tilde{\varphi}_t$ e φ_t sono riassunte nel diagramma commutativo che segue

$$
(2.10) \qquad
\begin{tikzcd}
M\times\mathbb{R} \arrow[r, shift right, "p_M"'] \arrow[d, "\tilde{\Phi}"] & M \arrow[l, shift right, "j_{M,t}"'] \arrow[d, "\tilde{\varphi}_t"] \\
\mathcal{T} \arrow[d, "\iota"] & \mathcal{S}_t \arrow[l, "\tilde{j}_t"'] \arrow[d, "\iota_t"] \\
\mathcal{A}\times\mathbb{R} \arrow[r, shift right, "p_A"'] & \mathcal{A} \arrow[l, shift right, "j_{A,t}"']
\end{tikzcd}
,
$$

dove

$$
(2.11) \qquad \tilde{\Phi} \circ j_{M,t} = j_t \circ \tilde{\varphi}_t\,, \qquad \iota \circ \tilde{j}_t = j_{A,t} \circ \iota_t\,,
$$

e dove $j_{A,t}$, $\tilde{j}_t$ sono le immersioni all'istante t di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ e di $\mathcal{S}_t$ in $\mathcal{T}$.

OSSERVAZIONE 2.2. Ricordiamo che l'applicazione Φ associata ad una isotopia φ dalla definizione (2.8) prende il nome di *track* di φ; nel seguito, come si è fatto per φ e Φ in (2.8), ci atterremo alla pratica di indicare con lettera maiuscola corrispondente il *track* di un'isotopia. Date due rappresentazioni equivalenti (M, φ), (N, θ) di uno stesso moto, e indicato con Ψ il *track* del cambiamento di parametrizzazione da M in N, i diffeomorfismi $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Theta}$ associati alle due rappresentazioni verificano la relazione

$$\Psi = \tilde{\Theta}^{-1} \circ \tilde{\Phi} . \quad \blacksquare \tag{2.12}$$

3. Velocità. Rappresentazione normale del moto.

Fissato un rappresentante ν_t in $\mathcal{C}$ per la forma di volume della superficie di separazione $\mathcal{S}_t$ e uno ρ_t per la forma di volume dell'eventuale frontiera $\partial\mathcal{S}_t$, è possibile costruire i campi della normale a $\mathcal{S}_t$ e della normale a $\partial\mathcal{S}_t$. Ogni campo vettoriale v definito su $\mathcal{S}_t$ si può allora decomporre in modo unico nella somma di una componente tangenziale $v_\parallel$ a valori nel fibrato $T\mathcal{S}_t$ tangente a $\mathcal{S}_t$ e di una componente normale $v_\perp$; a sua volta $v_\parallel$ si può ulteriormente decomporre sulla frontiera $\partial\mathcal{S}_t$ nella somma di una componente tangenziale $(v_\parallel)_\parallel$ a valori in $T(\partial\mathcal{S}_t)$ e di una componente normale $(v_\parallel)_\perp$ a valori in $T\mathcal{S}_t$. Procediamo di seguito ad eseguire queste due decomposizioni.

i) Indicata con $T\mathcal{C}|_{\mathcal{S}_t}$ la restrizione del fibrato tangente dello spazio ambiente $\mathcal{C}$ alla superficie di separazione al tempo t, sia $\tilde{\alpha}$ una delle forme caratteristiche di $T\mathcal{S}_t$ in $T\mathcal{C}|_{\mathcal{S}_t}$, cioè una forma tale che $\langle\tilde{\alpha}, v\rangle = 0$ per ogni campo vettoriale v in $T\mathcal{S}_t$ (5); inoltre, sia n la *normale* a $\mathcal{S}_t$ nel senso di Weyl, cioè, il campo vettoriale in $T\mathcal{C}|_{\mathcal{S}_t}$ immagine di ν_t sotto l'isomorfismo di Weyl (6) associato alla forma di volume μ di $\mathcal{C}$. Per ogni scelta di $\tilde{\alpha}$ risulta $\langle\tilde{\alpha}, n\rangle \neq 0$; sia α la forma caratteristica *normale*, cioè, l'unica forma caratteristica di $\mathcal{S}_t$, tale che $\langle\alpha, n\rangle = 1$. Allora, ogni campo vettoriale v in $T\mathcal{C}|_{\mathcal{S}_t}$ ammette la rappresentazione unica $v = v_\perp + v_\parallel$, con $v_\perp = \langle\alpha, v\rangle n$ la componente normale e $v_\parallel = (v - v_\perp) \in T\mathcal{S}_t$ la componente tangenziale.

ii) Indicata con m la normale a $\partial\mathcal{S}_t$ nel senso di Weyl, sia $\tilde{\beta}$ l'unica 2-forma caratteristica di $T(\partial\mathcal{S}_t)$ in $\mathcal{C}$ tale che $\tilde{\beta}(n, m) = 1$, e sia β la forma definita in termini di $\tilde{\beta}$ dalla relazione $\langle\beta, u\rangle = \tilde{\beta}(n, u)$, dove u è un generico campo vettoriale in $T\mathcal{C}|_{\partial\mathcal{S}_t}$. Allora, su $\partial\mathcal{S}_t$, $(v_\parallel)_\perp = \langle\beta, v\rangle m = \langle\beta, v_\parallel\rangle m$ e $(v_\parallel)_\parallel = v_\parallel - (v_\parallel)_\perp$.

Possiamo a questo punto introdurre la nozione di velocità per

(5) Qui abbiamo per brevità confuso $\mathcal{S}_t$ con la sua immersione $\iota_t(\mathcal{S}_t)$ in $\mathcal{C}$.

(6) Questa nozione, così come quella usata più avanti di normale nel senso di Weyl, è descritta con dettaglio, per comodità del lettore, nell'Osservazione posta alla fine di questa sezione.

un moto interfacciale e le nozioni derivate di velocità caratteristica e di velocità di efflusso.

Dato un moto interfacciale e una sua rappresentazione (M, φ), si dice *velocità*, relativamente alla varietà dei parametri M e al posizionamento φ, l'applicazione definita da

$$\dot{\varphi}\colon M \times \mathbb{R} \to T\mathcal{A}\,, \qquad \dot{\varphi}(x, t) = \frac{d}{d\tau}\varphi(x, \tau)\big|_{\tau = t}\,. \tag{3.1}$$

Ricordando la definizione di φ è facile convincersi che, per ogni $t \in \mathbb{R}$, $\dot{\varphi}(x, t)$ appartiene in realtà a $T\mathcal{A}|_{S_t}$ per $x \in M$, e a $T\mathcal{A}|_{\partial S_t}$ per $x \in \partial M$; ha dunque senso considerarne le decomposizioni

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{\perp} + \dot{\varphi}_{\parallel} \quad \text{in } M\,, \tag{3.2$_1$}$$

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_{\perp} + (\dot{\varphi}_{\parallel})_{\parallel} + (\dot{\varphi}_{\parallel})_{\perp} \quad \text{in } \partial M\,. \tag{3.2$_2$}$$

La componente tangenziale $\dot{\varphi}_{\parallel}$ determina univocamente la *velocità caratteristica* W_φ e la *velocità di efflusso* Z_φ relativamente alla varietà dei parametri M, cioè, i campi vettoriali su M e su ∂M rispettivamente, in generale dipendenti dal tempo, definiti da

$$\dot{\varphi}_{\parallel}(\cdot, t) = T\varphi_t[W_\varphi(\cdot, t)]\,, \tag{3.3$_1$}$$

$$(\dot{\varphi}_{\parallel})_{\perp}(\cdot, t) = T\varphi_t[Z_\varphi(\cdot, t)] \tag{3.3$_2$}$$

(dove si intende che l'applicazione tangente $T\varphi_t$ agisce linearmente su W_φ).

PROPOSIZIONE 3.1. *Siano (M, φ), (N, θ) due rappresentazioni di uno stesso moto, e sia ψ il cambiamento di parametrizzazione da M a N. Allora, le componenti normali $\dot{\theta}_{\perp}$, $\dot{\varphi}_{\perp}$ e le componenti normali alla frontiera $(\dot{\theta}_{\parallel})_{\perp}$ $(\dot{\varphi}_{\parallel})_{\perp}$ della velocità, così come le velocità di efflusso Z_θ, Z_φ, sono indipendenti dalla parametrizzazione, nel senso che verificano le relazioni*

$$\dot{\theta}_{\perp}(y, t) = \dot{\varphi}_{\perp}(\psi(y, t), t) \qquad (\forall y \in N)\,, \tag{3.4$_1$}$$

$$(\dot{\theta}_{\parallel})_{\perp}(y, t) = (\dot{\varphi}_{\parallel})_{\perp}(\psi(y, t), t) \qquad (\forall y \in \partial N)\,, \tag{3.4$_2$}$$

$$T\psi_t[Z_\theta] = Z_\varphi\,; \tag{3.4$_3$}$$

invece le velocità caratteristiche W_θ, W_φ non hanno carattere intrinseco, e vale la relazione

$$T\psi_t[W_\theta] = W_\theta + \dot{\psi}\,. \tag{3.5}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché le rappresentazioni (M, φ), e (N, θ) sono equivalenti per ogni $t \in \mathbb{R}$, $x \in M$ e $y \in N$ tali che

$$x = \psi(y, t), \tag{3.6}$$

si ha che

$$\theta(y, t) = \varphi(x, t). \tag{3.7}$$

Allora, con la notazione introdotte in (3.1)

$$\dot{\theta}(y, t) = \dot{\varphi}(x, t) + T\varphi_t(y)[\dot{\psi}(y, t)], \tag{3.8}$$

e, tenendo conto di (3.2),

$$\dot{\theta}_\perp(y, t) + \dot{\theta}_\parallel(y, t) = \dot{\varphi}_\perp(x, t) + \dot{\varphi}_\parallel(x, t) + T\varphi_t(y)[\dot{\psi}(y, t)]. \tag{3.9}$$

Se ora si osserva che l'applicazione tangente $T\varphi_t(y)$ muta $\dot{\psi}(y, t)$ in un elemento di $T\mathcal{S}_t$ per $y \in N$ e in un elemento di $T(\partial\mathcal{S}_t)$ per $y \in \partial N$, si trae da (3.9), sottacendo per brevità gli argomenti, che

$$\dot{\theta}_\perp = \dot{\varphi}_\perp, \qquad \dot{\theta}_\parallel = \dot{\varphi}_\parallel + T\varphi_t[\dot{\psi}]; \tag{3.10$_1$}$$

$$(\dot{\theta}_\parallel)_\perp = (\dot{\varphi}_\parallel)_\perp, \qquad (\dot{\theta}_\parallel)_\parallel = (\dot{\varphi}_\parallel)_\parallel + T\varphi_t[\dot{\psi}]. \tag{3.10$_2$}$$

La prima delle (3.10_1) e la prima delle (3.10_2) sono rispettivamente (3.4_1) e (3.4_2). Quanto alla seconda di (3.10_1), per la definizione (3.3_1) di velocità caratteristica, la si può scrivere nella forma

$$T\theta_t[W_\theta] = T\varphi_t[W_\varphi + \dot{\psi}], \tag{3.11}$$

e quindi la (3.5) segue subito, poiché T_{φ_t} è iniettiva e poiché

$$T\theta_t = T\varphi_t \circ T\psi_t. \tag{3.12}$$

In modo analogo dalla prima delle (3.10_2), tenendo conto della definizione di velocità di efflusso, segue la (3.4_3). ■

Una rappresentazione del moto (M, φ) si dice *normale* se, ad ogni istante, la velocità $\dot{\varphi}$ è ortogonale alla superficie di separazione:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_\perp \tag{3.13}$$

(quindi, in particolare, se un moto ha una rappresentazione normale, la velocità di efflusso è nulla). Dato un moto, è abituale ricorrere ad una sua rappresentazione normale (7); la proposizione seguente stabilisce le condizioni piuttosto generali sotto le quali questo è possibile.

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia dato un moto interfacciale che ammetta tna rappresentazione* (M, φ) *con velocità caratteristica* W_φ *limitata. Allora, il moto ha una rappresentazione normale se (e soltanto se) la velocità di efflusso è nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che un campo vettoriale su M si dice *limitato* se esiste una metrica riemanniana completa rispetto alla quale abbia modulo limitato. Se la velocità di efflusso è nulla, il campo vettoriale $X = -W_\varphi$ risulta completamente integrabile poiché per ipotesi W_φ è limitata e tangente alla frontiera di M (cfr. Hirsch [5], pp. 149-155, in particolare l'Esercizio 1 a p. 155). Indicato con $\psi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ il flusso associato a X

$$\dot{\psi}(x, t) = -W_\varphi(\psi(x, t), t)\,, \tag{3.14}$$

si consideri la rappresentazione del moto (M, θ) ottenuta da (M, φ) con ψ come cambiamento di parametrizzazione, sicché

$$\theta(x, t) = \varphi(\psi(x, t), t)\,. \tag{3.15}$$

È immediato verificare che (M, θ) è una rappresentazione normale; infatti, ricordando anche (3.3),

$$\dot{\theta} = \dot{\varphi} + (T\varphi_t)\dot{\psi} = \dot{\varphi} - (T\varphi_t)W_\varphi = \dot{\varphi}_\perp\,. \qquad \blacksquare \tag{3.16}$$

OSSERVAZIONE 3.3. Indicati con Λ^r e W_r gli spazi delle r-forme e dei r-multivettori su una varietà differenziabile Q di dimensione k, dotata di forma di volume μ, l'isomorfismo di Weyl tra Λ^{k-r} e W_r l'applicazione ι_μ definita dalla relazione

$$\lambda \wedge \beta = \langle \lambda, \iota_\mu \beta \rangle_\mu \qquad (\forall \lambda \in \Lambda^r)(\forall \beta \in \Lambda^{k-r})\,. \tag{3.17}$$

dove $\wedge$ è il prodotto esterno tra forme. Si noti che l'isomorfismo di Weyl sta alla *Hodge star* come la dualità sta al prodotto interno, nel senso che la sostituzione del prodotto interno alla dualità $\langle \cdot, \cdot \rangle$ riduce la definizione (3.17) alla definizione dell'isomorfismo di Hodge (*modulo* un'ovvia identificazione dei codomini).

(7) Anche se ciò non è necessariamente utile; ad esempio, non sembra esserlo ai fini di una trattazione numerica del problema del moto interfacciale, cfr. Osher e Sethian [8], Sethian [9].

Il campo della normale m alla frontiera nel senso di Weyl è l'unico campo vettoriale in $T\mathcal{C}|_{\partial S_t}$ tale che, per ogni forma γ in $T^*\mathcal{C}|_{\partial S_t}$, $\langle \gamma, m \rangle = \iota_\mu \rho(\alpha, m)$, dove $\iota_\mu \rho$ è il 2-vettore immagine di ρ sotto l'isomorfismo di Weyl associato alla forma di volume μ dello spazio ambiente, e dove α è la forma normale di S_t. Si verifica immediatamente che $\langle \alpha, m \rangle = 0$ cioè, che m è tangente a S_t. Considerando ∂S_t come sottovarietà di S_t, si può dare una diversa, equivalente definizione di normale a ∂S_t: indicati con $\tilde{\rho}_t$ e con $\tilde{\nu}$ il *pull-back* di ρ_t e di ν_t sotto l'inclusione canonica ι_t di S_t in $\mathcal{C}$, si prende come normale alla frontiera il campo vettoriale $\tilde{m} = \iota_{\nu_t} \tilde{\rho}_t$ immagine di $\tilde{\rho}_t$ sotto l'isomorfismo di Weyl associato alla forma di volume $\tilde{\nu}_t$ di S_t. Dalle relazioni $\alpha \wedge \gamma \wedge \rho_t = \langle \iota_\mu \rho_t, \alpha \wedge \gamma \rangle \mu$ e $\iota_t^* \gamma \wedge \tilde{\rho}_t = \langle \tilde{m}, \iota_t^* \gamma \rangle \tilde{\nu}_t$, tenendo conto che $\mu = \alpha \wedge \nu_t$, segue la relazione $(\iota_t)_* \tilde{m} = m$; da quest'ultima, per l'iniettività di ι_t e la tangenzialità di m a S_t, segue la corrispondenza biunivoca tra $\tilde{m}$ e m. ∎

4. Campi di velocità.

Premettiamo alcune considerazioni volte ad introdurre la notazione che useremo. La struttura di prodotto della varietà $M \times \mathbb{R}$, consente di associare ad ogni campo tensoriale dipendente dal tempo definito su M un campo tensoriale su $M \times \mathbb{R}$, il suo *corrispondente*; ad ogni campo tensoriale su $M \times \mathbb{R}$ un campo tensoriale dipendente dal tempo su M, la sua *proiezione* (*v.* Appendice A1). Se p è la proiezione di $M \times \mathbb{R}$ su M e ι_t è l'immersione canonica all'istante $t \in \mathbb{R}$ di M in $M \times \mathbb{R}$, indicheremo con $\hat{p}$ e con $\hat{\iota}$ gli operatori che hanno per valori, rispettivamente, il corrispondente di un campo su M e la proiezione di un campo su $M \times \mathbb{R}$. Nel caso dei campi vettoriali il corrispondente di un campo vettoriale X su M è dato dal campo $(X, 0)$ su $M \times \mathbb{R}$ la proiezione del campo (X, Y) su $M \times \mathbb{R}$ è il campo X su M. Come d'uso, indichiamo con le stesse notazioni tanto il vettore e e il covettore dt sulla varietà monodimensionale $\mathbb{R}$ quanto i loro corrispondenti su $M \times \mathbb{R}$. Nel seguito indicheremo con $\mathbb{L}$ l'operazione di differenziazione alla Lie delle forme esterne dipendenti dal tempo: per ogni un campo vettoriale X, eventualmente dipendente dal tempo, e per ogni forma α dipendente dal tempo su M

$$\mathbb{L}_X \alpha = \hat{p} \mathcal{L}_{(X, 1)} \hat{\iota} \alpha \,, \qquad \mathbb{L}_X \alpha(\cdot, t) = \dot{\alpha}(\cdot, t) - \mathcal{L}_{X(\cdot, t)} \alpha_t \,,$$

do v e $\mathcal{L}$ è l'operatore di differenziazione alla Lie dei campi non dipendenti dal tempo.

Dati un moto interfacciale e una sua rappresentazione (M, φ), la componente tangenziale $\dot{\varphi}_{\parallel}$ della velocità può, istante per istante, essere riguardata come un campo vettoriale in $T\mathcal{C}|_{S_t}$; poiché S_t è chiusa, tale campo può essere esteso per partizione dell'unità ad un campo vettoriale W sullo spazio ambiente $\mathcal{A}$, dipendente dal tempo:

$$W(\varphi(x, t), t) = \dot{\varphi}_{\parallel}(x, t). \tag{4.1}$$

In vista delle premesse poste all'inizio di questa sezione, al campo W risulta associato un campo su $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ il corrispondente di W, che indicheremo con $\hat{W}$. Indicato con $\hat{W}_\varphi$ il corrispondente in $M \times \mathbb{R}$ della velocità caratteristica W_φ, la formula

$$\tilde{W}_\varphi = \tilde{\Phi}_* \hat{W}_\varphi \tag{4.2}$$

definisce un campo vettoriale sulla traiettoria $\hat{W}_\varphi$, cui ci riferiremo come al campo della *velocità tangenziale*. Notiamo che valgono le relazioni

$$\Phi_* \hat{W}_\varphi(x, t) = \iota_* \tilde{W}_\varphi(\tilde{\Phi}(x, t)) = \hat{W}(\varphi(x, t), t) = (\dot{\varphi}_{\parallel}(x, t), 0). \tag{4.3}$$

Analogamente, all'applicazione $\dot{\varphi}_\perp$ che assegna la componente normale della velocità è possibile associare un campo vettoriale V su $\mathcal{A}$, un campo $\hat{V}$ su $M \times \mathbb{R}$, un campo $\hat{V}_\varphi$ su $M \times \mathbb{R}$, e uno $\tilde{V}$ sulla traiettoria: ci riferiremo a quest'ultimo come al campo della *velocità normale*. Il campo V è un'estensione ad $\mathcal{A}$ di $\dot{\varphi}_\perp$:

$$V(\varphi(x, t), t) = \varphi_\perp(x, t); \tag{4.4}$$

i campi $\hat{V}$ e $\hat{V}_\varphi$ sono le *sospensioni* (8), rispettivamente in $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ e $M \times \times \mathbb{R}$, dei campi V e $-W_\varphi$; infine, $\tilde{V}$ è il *push-forward* di $\hat{V}_\varphi$ sotto $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{V} = \tilde{\Phi}_* \hat{V}_\varphi. \tag{4.5}$$

Dalle relazioni

$$\Phi_* \hat{V}_\varphi(x, t) = \iota_* \tilde{V}(\tilde{\Phi}(x, t)) = \hat{V}(\varphi(x, t), t) = (\dot{\varphi}_\perp(x, t), 1), \tag{4.6}$$

tenendo conto della iniettività di Φ_* e di ι_*, segue che $\tilde{V}$ è ben definita in termini di $\dot{\varphi}_\perp$; per la Proposizione (3.1), $\tilde{V}$ è indipendente dalla rappresentazione del moto.

Nella terminologia corrente in tema di moti interfacciali, si intende per velocità normale il campo interfacciale scalare

$$V^n = \langle \alpha, V \rangle; \tag{4.7}$$

(8) Un campo vettoriale $\hat{X}$ su $M \times \mathbb{R}$ si dice la *sospensione* di un campo X su M, dipendente dal tempo, se $\hat{X} = (X, 1)$.

ci riferiremo a V^n con il termine di velocità normale *scalare*. La definizione mostra che la velocità normale scalare è la componente della velocità nella direzione della normale; se poi lo spazio ambiente è dotato di una metrica g, e si indica con n il versore della normale, si può conferire alla relazione (4.7) l'aspetto usuale

$$V^n = (n, V)_g \,, \tag{4.8}$$

in termini del prodotto scalare associato alla metrica.

Infine, alla velocità di efflusso Z_φ in M si associa il campo vettoriale $\tilde{Z}$ definito sulla frontiera della traiettoria dal *push-forward* sotto $\tilde{\Phi}$ del corrispondente $\hat{Z}_\varphi$ in $\partial M \times \mathbb{R}$ di Z_φ:

$$\tilde{Z} = \tilde{\Phi}_* \hat{Z}_\varphi \,; \tag{4.9}$$

a $\tilde{Z}$ si dà il nome di velocità di efflusso *sulla traiettoria*; con argomenti analoghi a quelli usati per la velocità normale, si dimostra che $\tilde{Z}$ è indipendente dalla rappresentazione del moto.

5. Forme interfacciali.

Assegnato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$, una *forma interfacciale* è una famiglia ad un parametro $\{\tilde{\omega}_t, t \in \mathbb{R}\}$ di forme differenziali $\tilde{\omega}_t$ su $\mathcal{S}_t$.

Diremo che una forma ω definita sullo spazio ambiente $\mathcal{A}$ è un *rappresentante* della forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t, t \in \mathbb{R}\}$ se, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\omega}_t = \iota_t^* \omega \,. \tag{5.1}$$

L'ipotesi che la superficie di separazione $\mathcal{S}_t$ sia dotata di forma di volume consente di associare alla forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t, t \in \mathbb{R}\}$ un rappresentante canonico in $\mathcal{A}$. Per ogni t fissato, si consideri la forma $\omega(\cdot, t)$, unicamente definita su $T\mathcal{A}|_{\mathcal{S}_t}$, tale che

$$\iota_t^* \omega(\cdot, t) = \tilde{\omega}_t \,, \qquad n \lrcorner \omega(\cdot, t) = 0 \,, \tag{5.2}$$

dove n è il campo della normale, ed il simbolo $\lrcorner$ denota la contrazione di n ed $\omega(\cdot, t)$. Dal momento che la superficie di separazione è una sottovarietà chiusa, si può istante per istante estendere $\omega(\cdot, t)$ all'intero spazio ambiente, ottenendo una forma dipendente dal tempo definita su $\mathcal{A}$, che indicheremo ancora con ω. È immediato verificare che la forma ω così costruita verifica (5.1), e dunque è un rappresentante *nello spazio ambiente* di $\{\tilde{\omega}_t, t \in \mathbb{R}\}$. Detta con $\hat{\omega}$ la forma su $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ che corrisponde ad ω, chiameremo rappresentante *sulla traiettoria* il *pull-back* di $\hat{\omega}$ sotto l'immersione canonica ι della traiettoria $\mathcal{T}$ in $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$: $\tilde{\omega} = \iota^* \hat{\omega}$. Nel seguito considereremo esclusivamente forme interfacciali *regolari*, dotate, cioè di un rappresentante nello spazio ambiente regolare.

Data una forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$, per ogni rappresentazione $(M,\ \varphi)$ del moto cui la forma è associata, e per ogni istante $t \in \mathbb{R}$, si consideri la forma ω_φ su M definita istante per istante dal *pull-back* di $\tilde{\omega}_t$ sotto $\tilde{\varphi}_t$

$$\omega_\varphi(\cdot,\ t) = \tilde{\varphi}_t^* \tilde{\omega}_t\,; \tag{5.3}$$

questa forma, in generale dipendente dal tempo, è il rappresentante di $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ *rispetto alla rappresentazione del moto* (M, φ). Risulta allora possibile associare ad una data forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ due forme su $M \times \mathbb{R}$: $\Phi^* \hat{\omega}$, il *pull-back* di $\hat{\omega}$ secondo Φ, e $\hat{\omega}_\varphi$, il corrispondente in $M \times \mathbb{R}$ di ω_φ. Si trova che

$$\Phi^* \hat{\omega} = \hat{\omega}_\varphi + dt \wedge \hat{\beta}\,, \tag{5.4}$$

dove $\hat{\beta}$ è la forma corrispondente in $\mathcal{A} \times \mathbb{R}$ della forma $\beta(\cdot,\ t) = \varphi_t^* (W \lrcorner\, \omega_t)$ e W la velocità tangenziale; la dimostrazione della (5.4) è riportata nell'appendice A1. È immediato verificare dalla (5.4) che le due forme coincidono se e solo se W è nulla, cioè, se la rappresentazione è normale, e che

$$\mathbb{L}_{-W} \omega_\varphi = \hat{p}\mathcal{L}_{(-W,\,1)} \hat{\omega} = \hat{p}\mathcal{L}_{(-W,\,1)} \Phi^* \hat{\omega}\,. \tag{5.5}$$

Siano (M, φ), (N, θ) due rappresentazioni dello stesso moto interfacciale. Due forme differenziali dipendenti dal tempo ω_φ, ω_θ si dicono equivalenti se e solo se sono i rappresentanti, relativamente all'una o all'altra delle rappresentazioni (M, φ) e (N, θ) del moto, di una stessa forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$; cioè, se e solo se

$$\omega_\varphi(\cdot,\ t) = \omega_t^* \tilde{\omega}_t\,, \qquad \omega_\theta(\cdot,\ t) = \theta_t^* \tilde{\omega}_t \qquad (\forall t \in \mathbb{R})\,. \tag{5.6}$$

Dalla definizione segue immediatamente che due forme sono equivalenti se e solo se

$$\omega_\theta(\cdot,\ t) = \psi_t^* \omega_\varphi(\cdot,\ t)\,, \tag{5.7}$$

dove ψ è il cambiamento di parametrizzazione da M in N.

OSSERVAZIONE 5.1. Le relazioni tra le forme associate ad una forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$, ω_φ, ω, $\hat{\omega}$ e $\tilde{\omega}$ sono riassunte nel diagramma commutativo che segue

$$
(5.8)\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{\Phi}^*\omega \arrow[r, shift right, mapsto, "\hat{p}_M"'] & \omega_\varphi \arrow[l, shift right, mapsto, "\hat{j}_{M,t}"'] \\
\tilde{\omega} \arrow[u, mapsto, "\tilde{\Phi}^*"] \arrow[r, mapsto, "\tilde{j}_t^*"] & \tilde{\omega}_t \arrow[u, mapsto, "\hat{\varphi}_t^*"'] \\
\hat{\omega} \arrow[u, mapsto, "\iota^*"] \arrow[r, shift right, mapsto, "\hat{p}_A"'] & \omega \arrow[u, mapsto, "\iota_t^*"'] \arrow[l, shift right, mapsto, "\hat{j}_{A,t}"']
\end{tikzcd}
\; .
$$

OSSERVAZIONE 5.2. La nozione di forma interfacciale non è che un caso particolare della più generale nozione di campo tensoriale interfacciale, nozione che però non vale la pena introdurre ai fini di stabilire il risultato che ci interessa. Infatti, né la velocità tangenziale $\tilde{W}$ né la velocità normale $\tilde{V}$ né la velocità di efflusso $\tilde{Z}$ risultano associate a campi interfacciali, per ragioni diverse: $\tilde{W}_\varphi$ non è indipendente dalla rappresentazione del moto; $\tilde{V}$ e $\tilde{Z}$, lo sono, ma l'immagine di $\tilde{V}$ nello spazio ambiente non è tangente alla superficie di separazione e Z_φ non è un campo sulla traiettoria. ■

6. Derivata normale di forme interfacciali.

Fissato un moto interfacciale, diremo *derivata normale* della forma interfacciale $\{\tilde{\alpha}_t,\, t \in \mathbb{R}\}$, la forma interfacciale

$$
(6.1)\qquad \{\tilde{\alpha}_t^\bullet,\, t \in \mathbb{R}\}, \qquad \tilde{\alpha}_t^\bullet = \tilde{j}_t^* \,\mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{\alpha}\,,
$$

dove il simbolo $\mathcal{L}_{\tilde{V}}$ denota l'operazione di differenziazione secondo Lie rispetto alla velocità normale $\tilde{V}$, e dove $\tilde{j}_t^*$ è il *pull-back* secondo l'immersione canonica di $\mathcal{S}_t$ in $\mathcal{T}$.

La proposizione che segue fornisce, per la derivata normale di una forma interfacciale, l'aspetto di un rappresentante nello spazio ambiente e del rappresentante in una rappresentazione del moto.

PROPOSIZIONE 6.1. *Scelti una rappresentazione del moto interfacciale (M, φ) e una forma interfacciale $\{\tilde{\omega}_t,\, t \in \mathcal{R}\}$, siano W_φ e V la velocità caratteristica della rappresentazione e la velocità normale nello spazio ambiente $\mathcal{A}$, e siano ω e ω_φ un rappresentante in $\mathcal{A}$ e il rappresentante rispetto a (M, φ) di $\{\tilde{\omega}_t,\, t \in \mathcal{R}\}$. Allora, un rappresentante $\omega^\bullet$ in $\mathcal{A}$ e il rappresentante $\omega_\varphi^\bullet$ rispetto a (M, φ) della forma interfacciale*

$\{\tilde{\omega}_t^\bullet, t \in \mathbb{R}\}$ *sono dati da*

$$\omega^\bullet = \mathbb{L}_V \omega , \qquad \omega_\varphi^\bullet = \mathbb{L}_{-W_\varphi} \omega_\varphi , \tag{6.2}$$

dove $\mathbb{L}$ *à l'operatore di differenziazione alla Lie sulle forme dipendenti dal tempo.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di rappresentante nello spazio ambiente di una forma interfacciale, la prima delle (6.2) risulta dimostrata se si prova che $\tilde{\omega}_t = \iota_t^* \mathbb{L}_V \omega$. Dalla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} \tilde{\omega} \arrow[r, mapsto, "\tilde{j}_t^*"] & \tilde{\omega}_t \\ \hat{\omega} \arrow[u, mapsto, "\iota^*"] \arrow[r, mapsto, "j^*_{A,t}"] & \omega \arrow[u, mapsto, "\iota_t^*"'] \end{tikzcd} , \tag{6.3}$$

segue, tenendo conto delle definizioni di velocità normale e di rappresentante,

$$\tilde{\omega}_t^\bullet(\cdot, t) = \tilde{j}_t^* \mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{\omega} = \tilde{j}_t \iota^* \mathcal{L}_{\hat{V}} \hat{\omega} = \iota_t^* j^*_{\mathfrak{a},t} \mathcal{L}_{\hat{V}} \hat{\omega} = \iota_t^* \hat{p} \mathcal{L}_{\hat{V}} \hat{\omega} = \iota_t^* \mathbb{L}_V \omega , \tag{6.4}$$

e quindi la prima delle (6.2).

Analogamente, dalla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} \hat{\Phi}^* \hat{\omega} \arrow[r, mapsto, "j^*_{M,t}"] & \omega_\varphi \\ \tilde{\omega} \arrow[u, mapsto, "\tilde{\Phi}^*"] \arrow[r, mapsto, "\tilde{j}_t^*"] & \tilde{\omega}_t \arrow[u, mapsto, "\tilde{\varphi}_t^*"'] \end{tikzcd}$$

e dalla relazione $\hat{p} \mathcal{L}_{\hat{V}_\varphi} \Phi^* \tilde{\omega} = \mathbb{L}_{-W_\varphi} \omega_\varphi$ segue la seconda delle (6.2):

$$\omega_\varphi^\bullet(\cdot, t) = \tilde{\varphi}_{t*} \tilde{j}_t^* \mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{\omega} = \tilde{j}_{M,t} \tilde{\Phi}^* \mathcal{L}_{\tilde{V}} \tilde{\omega} = \tag{6.5}$$

$$= j^*_{M,t} L_{\hat{V}_\varphi} \Phi^* \tilde{\omega} = \hat{p} \mathcal{L}_{\hat{V}_\varphi} \hat{\omega}_\varphi(\cdot, t) = \mathbb{L}_{-W_\varphi} \omega_\varphi(\cdot, t) . \qquad \blacksquare$$

Calcoliamo ora la derivata normale delle forma di volume della superficie di separazione nell'importante caso particolare in cui lo spazio ambiente sia dotato di struttura riemanniana.

Supponiamo dunque di scegliere la forma di volume μ dello spazio ambiente $\mathcal{A}$ in modo compatibile con la metrica g; inoltre, dato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$, ad ogni istante scegliamo per la superficie di separazione $\mathcal{S}_t$ la forma di volume ν_t indotta da g; infine, indichiamo con

H_t la curvatura media di $\mathcal{S}_t$ in $\mathcal{C}$. Con i termini *campo della forma di volume* e *campo della curvatura media*intenderemo la $(n-1)$-forma interfacciale $\{\tilde{\nu}_t, t \in \mathbb{R}\}$ e il campo scalare interfacciale $\{\tilde{H}_t, t \in \mathbb{R}\}$ costruiti, istante per istante, mediante il *pull-back* di ν_t e H_t secondo l'immersione canonica ι_t di $\mathcal{S}_t$ in $\mathcal{C}$.

Proposizione 6.2. *La derivata normale* $\{\tilde{\nu}_t^\bullet, t \in \mathbb{R}\}$ *del campo della forma di volume* $\{\tilde{\nu}_t, t \in \mathbb{R}\}$ *è data da*

$$\tilde{\nu}_t^\bullet = \tilde{V}_t^n \tilde{H}_t \tilde{\nu}_t \,, \tag{6.6}$$

dove $\{\tilde{V}_t^n, t \in \mathbb{R}\}$ *è il campo della velocità normale scalare.*

Dimostrazione. Dato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$ e fissato un istante t, continuiamo ad indicare con n un'estensione ad $\mathcal{C}$ del campo su $\mathcal{S}_t$ della normale. Allora, $n \lrcorner \mu$ fornisce un'estensione ad $\mathcal{C}$ del campo della forma di volume, che ancora indicheremo con ν. Vale la relazione

$$\tilde{\nu}_t^\bullet = \iota_t^* \nu^\bullet \,. \tag{6.7}$$

Si può cominciare il calcolo del secondo membro della (6.7) ricordando che, per definizione di *pull-back*, è sufficiente valutare, per ogni istante t, $\nu^\bullet = \mathbb{L}_V \nu$ sull'immagine $\iota_t(\mathcal{S}_t)$ della superficie di separazione in $\mathcal{C}$, mentre, per definizione di derivata di Lie di un campo dipendente dal tempo,

$$\nu^\bullet = \dot{\nu} + \mathcal{L}_V \nu \,, \qquad \dot{\nu} = (\dot{n}) \lrcorner \mu \tag{6.8}$$

A questo punto conviene procedere al calcolo di $\dot{\nu}$ e di $\mathcal{L}_V \nu$, nell'ordine.

i) Osserviamo che su $\iota_t(\mathcal{S}_t)$, la derivata parziale $\dot{n}$ si può esprimere in termini della derivata totale lungo il moto $D_t n$, mediante la relazione

$$\dot{n} = D_t n - D_{(V+W)} n \,, \tag{6.9}$$

dove D è il simbolo di differenziazione covariante; ma n è su $\iota_t(\mathcal{S}_t)$ un campo vettoriale unitario, dunque

$$(D_W n, n)_g = 0 \,, \qquad (D_t n, n)_g = 0 \,, \tag{6.10}$$

e vale per la componente normale di $\dot{n}$ l'espressione

$$(\dot{n}, n)_g = -(D_V n, n)_g = -V^n (D_n n, n)_g \,. \tag{6.11}$$

Quindi, indicando con $(\dot{n})_{\|}$ la parte di $\dot{n}$ ortogonale ad n, si ha

$$\dot{\nu} = -V^n (D_n n, n)_g \nu + (\dot{n})_{\|} \,. \tag{6.12}$$

ii) Per la nota relazione di Cartan tra le operazioni di derivazione secondo Lie e di derivazione esterna (*v.* appendice A2), e tenendo conto del fatto che $n \lrcorner (n \lrcorner \mu) = 0$ si ha che

$$\mathcal{L}_V \nu = d(V \lrcorner \nu) + V \lrcorner d\nu = V^n [n \lrcorner (n \lrcorner \mu) + n \lrcorner d\nu]\,(^9). \tag{6.13}$$

Ora

$$d\nu = (\operatorname{div} n)\mu \,, \tag{6.14}$$

e quindi

$$\mathcal{L}_V \nu = V^n (\operatorname{div} n)(n \lrcorner \mu) = V^n (\operatorname{div} n)\, \nu \,; \tag{6.15}$$

ma per definizione di curvatura media

$$H = \operatorname{div} n - (D_n n, n)_g \,, \tag{6.16}$$

e quindi, in definitiva,

$$\mathcal{L}_V \nu = V^n [H + (D_n n, n)_g]\, \nu \,. \tag{6.17}$$

Possiamo adesso combinare le relazioni (6.12) e (6.17) con la (6.8_1), ottenendo

$$\nu^{\bullet} = V^n H \nu + (\dot{n})_{\|} \lrcorner \mu \,. \tag{6.18}$$

La tesi segue compiendo il *pull-back* di entrambi i membri della (6.18), dal momento che, come facilmente si verifica, $\iota_t^* ((\dot{n})_{\|} \lrcorner \mu)$ è la forma nulla. ■

OSSERVAZIONE 6.1. In un senso che si può rendere preciso la definizione (6.1) e la rappresentazione data dalla seconda delle (6.2) possono essere scambiate di ruolo: dati due rappresentanti ω_φ, ω_θ di una stessa forma interfacciale, si può intendere $\omega_\varphi^{\bullet}$, $\omega_\theta^{\bullet}$ come definiti dalla seconda delle (6.2), mostrare che si tratta di forme equivalenti, e quindi intendere la derivata normale come classe di equivalenza. Infatti, se si indica con ψ il cambiamento di parametrizzazione da (M, φ) a (N, Θ) e si tiene

(9) Qui d è il simbolo di derivazione esterna.

conto della relazione $T\psi_t W_\theta = W_\varphi + \dot{\psi}$ tra le velocità caratteristiche delle due rappresentazioni, si ha

$$\omega_\theta^\bullet = \mathbb{L}_{-W_\theta}\omega_\theta = \tag{6.19}$$

$$= \widehat{p}\mathcal{L}_{(-W_\theta,\,1)}\widehat{\omega}_\theta = \widehat{p}\mathcal{L}_{(-W_\varphi,\,1)}\Psi^*\widehat{\omega}_\varphi = \widehat{p}\Psi^*\mathcal{L}_{(-W_\varphi,\,1)}\widehat{\omega}_\varphi\,,$$

cioè, $\omega_\theta^\bullet(\cdot, t) = \psi_t^*\mathbb{L}_{-W}\omega_\varphi = \psi_t^*\omega_\varphi^\bullet$ e quindi l'equivalenza dei campi $\omega_\theta^\bullet$ e $\omega_\varphi^\bullet$. ■

Osservazione 6.2. Nella letteratura che ha per tema il moto di interfacce, si trovano definizioni di derivata normale a prima vista diverse da (6.1) e comunque valide, a stretto rigore, soltanto per campi interfacciali scalari: in [3], si impiega senza menzionarla l'operazione di differenziazione secondo Lie, costruendo ad ogni istante t e in ogni punto x della superficie di separazione S_t una curva $\tau \mapsto c(\tau)$ normale a S_t, e ponendo per il campo scalare f

$$f^\bullet(x, t) = \frac{d}{d\tau}\left(f(c(\tau), \tau)\right)\big|_{\tau = t}\,; \tag{6.20}$$

d'altra parte, per un campo scalare la derivata normale (6.1) si può anche scrivere in termini di derivata direzionale, nella forma

$$\widetilde{f}^\bullet = \langle d\widetilde{f}, \widetilde{V}\rangle, \tag{6.21}$$

e in [2] e [4] si intende per derivata normale il campo sulla traiettoria che corrisponde proprio a $\widetilde{f}^\bullet$. Né (6.20) né (6.21) sono immediatamente generalizzabili al caso di forme esterne; inoltre, il carattere intrinseco della nozione di derivata normale è reso più evidente se si ricorre alla definizione (6.1). Per semplicità di notazione, si considerino le forme interfacciali assegnate mediante un loro rappresentante nello spazio ambiente. Fissato un rappresentante ν della forma di volume $\widetilde{\nu}$ sull'interfaccia, ogni forma interfacciale ω di grado massimo si può esprimere nella forma $\omega = f\nu$, con f una funzione a valore scalare, dipendente dal tempo, che indichiamo con il termine di densità di ω rispetto a ν. Tenendo conto delle proprietà della differenziazione alla Lie, la derivata normale di ω risulta espressa in termini di f da $\omega^\bullet = f^\bullet\nu + f\nu^\bullet$ e quindi, nel caso di spazio ambiente dotato di struttura metrica (v. Prop. 6.2) da $\omega^\bullet = (f^\bullet + KV)\nu$. Risulta allora evidente (cf. ad es. p. 773, [4]) che la derivata normale definita in [2], [3], [4] può identificarsi con la derivata normale (6.1) della densità f pensata come 0-forma. ■

7. Interfacce ritagliate in moto.

Nelle applicazioni un teorema di trasporto è impiegato per esprimere il bilancio di una quantità di interesse in una *regione di controllo*, cioè, una sottovarietà $\mathcal{R}$ dello spazio ambiente $\mathcal{A}$ compatta e di dimensione massimale, di solito semplicemente connessa. È quindi naturale considerare superfici di separazione che intersecano regioni di controllo nel corso del proprio moto.

Fissato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$ e una regione di controllo $\mathcal{R}$, definiamo *interfaccia ritagliata* $\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$ all'istante $t \in \mathbb{R}$, l'intersezione dell'interfaccia $\mathcal{S}_t$ con la regione di controllo, e chiamiamo *moto interfacciale ritagliato* la famiglia ad un parametro $\{\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}, t \in \mathbb{R}\}$ formata dalle interfacce ritagliate. Nel seguito considereremo esclusivamente moti interfacciali ritagliati che siano moti interfacciali in $\mathcal{R}$ secondo la definizione data nella Sezione 2. Ciò implica, in particolare, che la generica interfaccia ritagliata $\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$ sia sempre una varietà con bordo $\partial\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$ non vuoto e che $\partial\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}} = \mathcal{S}_t^{\mathcal{R}} \cap \mathcal{R}$. Conveniamo di dotare $\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$ della forma di volume $\tilde{\nu}^{\mathcal{R}} = \tilde{\nu}|_{\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}}$, dove $\tilde{\nu}$ è la forma di volume dell'interfaccia $\mathcal{S}_t$; inoltre, di dotare $\partial\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$ della forma di volume $\tilde{\rho}^{\mathcal{R}}$; infine, fissato un rappresentante ν in $\mathcal{A}$ per $\tilde{\nu}$ e uno ρ per $\tilde{\rho}$ di indicare con n il vettore della nrmale a $\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$ e con m il vettore della normale a $\partial\mathcal{S}_t^{\mathcal{R}}$.

Siano (M, φ) e $(M^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}})$ una rappresentazione del moto interfacciale dato e una rappresentazione del relativo moto ritagliato da $\mathcal{R}$. Queste rappresentazioni sono *connesse da un'isotopia*, nel senso che si può trovare un'isotopia $\gamma\colon M^{\mathcal{R}} \times \mathbb{R} \to M$, tale che

$$\varphi^{\mathcal{R}}(x, t) = \varphi(\gamma(x, t), t), \qquad (\forall x \in M^{\mathcal{R}})(\forall t \in \mathbb{R}). \tag{7.1}$$

È immediato verificare che tale isotopia è unica e che il suo *track* ha la rappresentazione

$$\Gamma = \tilde{\Phi}^{-1} \circ j \circ \tilde{\Phi}^{\mathcal{R}}, \tag{7.2}$$

in termini delle applicazioni $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Phi}^{\mathcal{R}}$ associate alle due rappresentazioni e dell'immersione canonica j di $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ in $\mathcal{T}$; vale quindi anche la relazione tra i posizionamenti estesi dei due moti

$$\Phi^{\mathcal{R}} = \Phi \circ \Gamma. \tag{7.3}$$

Può essere comodo trovare le relazioni (7.1), (7.2) e (7.3) compendiate nel diagramma seguente:

$$\begin{tikzcd} M^{\mathcal{R}} \times \mathbb{R} \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\tilde{\Phi}^{\mathcal{R}}"] & M \times \mathbb{R} \arrow[d, "\tilde{\Phi}"] \\ \mathfrak{I}_{\mathcal{R}} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\iota^{\mathcal{R}}"] & \mathfrak{I} \arrow[d, "\iota"] \\ \mathcal{A} \times \mathbb{R} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathcal{A} \times \mathbb{R} \end{tikzcd} \tag{7.4}$$

PROPOSIZIONE 7.1. *Date le rappresentazioni* (M, φ) *e* $(M^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}})$ *di un moto interfacciale e di un suo moto ritagliato, i rispettivi campi di velocità sono ad ogni istante* t *tali che*

(i) *per ogni* $x \in M^{\mathcal{R}}$, *le componenti normali verificano la relazione*

$$\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}_{\perp}(x, t) = \dot{\varphi}_{\perp}(\gamma(x, t), t)\,; \tag{7.5}$$

(ii) *per ogni* $x \in \partial M^{\mathcal{R}}$, $\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}(x, t)$ *è tangente alla frontiera del volume di controllo;*

(iii) *ancora, per ogni* $x \in \partial M^{\mathcal{R}}$, *la velocità di efflusso scalare* $Z^{\mathcal{R}, m}$, *definita da*

$$(\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}_{\parallel})_{\perp}(x, t) = Z^{\mathcal{R}, m} m(\varphi(x, t))\,, \tag{7.6}$$

ammette l'espressione

$$Z^{\mathcal{R}, m} = -V^{n} \frac{\langle \alpha, n \rangle}{\langle \alpha, m \rangle}\,, \tag{7.7}$$

dove α *è una qualsiasi forma caratteristica di* $T(\partial\mathcal{R})$ *in* $\mathcal{A}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissato $x \in M^{\mathcal{R}}$, differenziamo (7.1) rispetto a t, ottenendo

$$\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}(x, t) = \dot{\varphi}(\gamma(x, t), t) + T\varphi_t(\gamma(x, t))[\dot{\gamma}(x, t)]\,. \tag{7.8}$$

La prima affermazione della tesi si prova notando che l'applicazione $T\varphi(\gamma(x, t))$ muta $\dot{\gamma}(x, t)$ in un vettore tangente all'interfaccia. La seconda affermazione è una conseguenza immediata del fatto che, per definizione, $\varphi^{\mathcal{R}}(x, t)$ appartiene a $\partial\mathcal{R}$ per ogni $x \in \partial M^{\mathcal{R}}$. Quanto alla terza affermazione, osserviamo che sul bordo di un'interfaccia ritagliata si può decomporre la velocità $\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}$ nella somma della sua componente normale

$\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}_{\perp}$ secondo n e delle sue componenti tangenziali $(\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}_{\parallel})_{\parallel}$ e $(\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}_{\parallel})_{\perp}$, l'una tangente al bordo medesimo, l'altra secondo m (*cf.* (7.6)). D'altra parte, per una qualsiasi forma α caratteristica di $T(\partial\mathcal{R})$ in $\mathcal{C}$, si ha che $\langle \alpha, (\dot{\varphi}^{\mathcal{R}}_{\parallel})_{\parallel} \rangle = 0$, mentre, in vista di (ii), è anche vero che $\langle \alpha, \dot{\varphi}^{\mathcal{R}} \rangle = = 0$. ■.

OSSERVAZIONE 7.1. La formula (7.7) mostra come sul bordo di un'interfaccia la velocità di efflusso scalare dipenda dalla velocità normale scalare e dalla geometria della regione di controllo. Val la pena di notare che il rapporto che appare in (7.7) è sempre ben definito in ragione del fatto che le superfici di separazione da noi considerate sono per definizione *nette*. In [4] (cf. Remark 2, p. 776) la velocità di efflusso si pensa associata al trasporto di porzioni dell'interfaccia attraverso la frontiera del volume di controllo; al contrario, noi preferiamo pensare che la velocità di efflusso sia dovuta alla circostanza che il bordo dell'interfaccia ritagliata è costretto, per definizione, a giacere sul bordo del volume di controllo senza oltrepassarlo.

Se (t_i) è una base per $T(\partial S^{\mathcal{R}}_t)$, i vettori $(n, m, t_i, \dots)$ costituiscono una base per $T\mathcal{C}|_{\partial\mathcal{R}}$ e, indicata con $(\hat{n}, \hat{m}, \hat{t}_i, \dots)$ la base duale di $(n, m, t_i, \dots)$ la generica forma caratteristica α di $T(\partial\mathcal{R})$ ammette la rappresentazione $\alpha = pn\hat{\alpha} + q\hat{m}$, con $p = \langle \alpha, n \rangle$, $q = \langle \alpha, m \rangle$, $q > 0$. Se lo spazio ambiente è dotato di una metrica riemanniana, le componenti p, q di α si possono scrivere nella forma $p = \|\alpha\| \cos(\widehat{an})$, $q = \|\alpha\| \cos(\widehat{am})$, con a il vettore che corrisponde ad α e $\|\cdot\|$ la norma sullo spazio dei covettori indotta dalla metrica. Vale allora la relazione $p^2 + q^2 = \|\alpha\|$ e la (7.7) si può riscrivere come in [4] (cf. l. -5, p. 773) nella forma

$$Z^{\mathcal{R}, m} = - \frac{V^n p}{\sqrt{1 - p^2}} . \qquad (7.9)$$ ■

OSSERVAZIONE 7.2. Segue dalla relazione (7.5) che le (restrizioni all'immagine di $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ in $\mathcal{T}$ delle) velocità normali di un moto interfacciale e di un suo moto ritagliato sono così correlate:

$$\tilde{V} = j_* \tilde{V}^{\mathcal{R}} . \qquad (7.10)$$

Scelta una forma interfacciale $\tilde{\omega}$ su $\mathcal{T}$, si consideri la forma interfacciale $\{\tilde{\omega}^{\mathcal{R}}\}$ su $\mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ che si ottiene eseguendo il *pull-back* di $\tilde{\omega}$ secondo l'immersione canonica j. Dalla (7.10) segue immediatamente, tenendo conto della definizione di derivata normale e delle proprietà delle derivate di

Lie, che le derivate normali di $\tilde{\omega}$ e $\tilde{\omega}^{\mathscr{R}}$ verificano la relazione

$$(\tilde{\omega}^{\mathscr{R}})^{\bullet} = j^{*}\tilde{\omega}^{\bullet}\,. \qquad \blacksquare \tag{7.11}$$

8. Teorema del trasporto per interfacce ritagliate.

Assegnato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ e una regione di controllo $\mathscr{R}$, siano $\{\mathcal{S}_t{}^{\mathscr{R}},\ t \in \mathbb{R}\}$ il relativo moto ritagliato, $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ una n-forma superficiale, con n pari alla dimensione dell'interfaccia, che pensiamo come la densità di una grandezza scalare Ω, $\{\tilde{\omega}_t^{\mathscr{R}},\ t \in \mathbb{R}\}$ la forma interfacciale sul moto ritagliato *associata* ad $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ cioè, la famiglia di forme definita istante per istante dal *pull-back* secondo l'immersione canonica di $\mathcal{S}_t^{\mathscr{R}}$ in $\mathcal{S}_t$:

$$\tilde{\omega}_t^{\mathscr{R}} (j_t^{\mathscr{R}})^{*}\, \tilde{\omega}_t\,. \tag{8.1}$$

Nell'ambito della meccanica delle interfacce, ai fini della localizzazione dell'equazione di conservazione della grandezza Ω, è determinante saper valutare la derivata temporale della funzione $\Omega^{\mathscr{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\Omega^{\mathscr{R}}(t) = \int_{\mathcal{S}_t^{\mathscr{R}}} \tilde{\omega}_t^{\mathscr{R}}\,,$$

che rappresenta il *contenuto* della grandezza Ω nell'interfaccia ritagliata dalla regione di controllo $\mathscr{R}$. Obiettivo di questo paragrafo è la dimostrazione di un teorema che, come il teorema del trasporto di Reynolds nella meccanica dei corpi continui, consenta di esprimere $\dot{\Omega}^{\mathscr{R}}$ in termini della velocità del moto ritagliato.

8.1 TEOREMA. *Siano $\{\mathcal{S}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ un moto interfacciale, $\mathscr{R}$ una regione di controllo, $\{\mathcal{S}_t^{\mathscr{R}},\ t \in \mathbb{R}\}$ il relativo moto ritagliato, $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ una forma interfacciale, di dimensione n pari alla dimensione dell'interfaccia. La derivata rispetto al tempo $\dot{\Omega}^{\mathscr{R}}$ del contenuto $\Omega^{\mathscr{R}}$ associato ad $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ e al moto ritagliato è data da*

$$\dot{\Omega}^{\mathscr{R}}(t) = \int_{\mathcal{S}_t^{\mathscr{R}}} (\tilde{\omega}_t^{\mathscr{R}})^{\bullet} + \int_{\partial\mathcal{S}_t^{\mathscr{R}}} \tilde{Z}_t^{\mathscr{R}} \lrcorner\, \tilde{\omega}_t^{\mathscr{R}} \qquad (\forall t \in \mathbb{R})\,, \tag{8.2}$$

dove $\{\tilde{\omega}_t^{\mathscr{R}},\ t \in \mathbb{R}\}$ è la forma interfacciale sul moto ritagliato associata ad $\{\tilde{\omega}_t,\ t \in \mathbb{R}\}$ e $\tilde{Z}_t^{\mathscr{R}}$ la velocità di efflusso su $\mathcal{S}_t^{\mathscr{R}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di contenuto,

$$\dot{\Omega}^{\mathcal{R}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{t+\Delta t}} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_{t+\Delta t} - \int_{\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_t \right]. \tag{8.3}$$

Indicato con $F^t_{t_0}\colon \mathcal{T}^{\mathcal{R}} \to \mathcal{T}^{\mathcal{R}}$ il flusso associato al campo vettoriale, dipendente dal tempo, $\tilde{V}^{\mathcal{R}} + \tilde{W}^{\mathcal{R}}$ definito sulla traiettoria ritagliata, dove $\tilde{V}^{\mathcal{R}}$, $\tilde{W}^{\mathcal{R}}$ sono la velocità normale e la velocità tangenziale del moto ritagliato, la (8.3) si riscrive, tenendo conto che, per ogni $\Delta t \in \mathbb{R}$, $F^{t+\Delta t}_t(\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t) = \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{t+\Delta t}$, nella forma

$$\dot{\Omega}^{\mathcal{R}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t} (\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)^* \left[(F^{t+\Delta t}_t)^* \tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_{t+\Delta t} - \tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_t \right], \tag{8.4}$$

e quindi, ricordando la definizione di derivata di Lie, nella forma

$$\dot{\Omega}^{\mathcal{R}}(t) = \int_{\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t} (\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)^* \left(\mathcal{L}_{\tilde{V}^{\mathcal{R}}} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}} + \mathcal{L}_{\tilde{W}^{\mathcal{R}}} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}} \right). \tag{8.5}$$

Il primo addendo del secondo membro di (8.5) è per definizione la derivata normale di $\{\tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_t,\, t \in \mathbb{R}\}$

$$(\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)^* \mathcal{L}_{\tilde{V}^{\mathcal{R}}} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}} = (\tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_t)^{\bullet}\,. \tag{8.6}$$

Il secondo addendo si trasforma, applicando la formula magica di Cartan, in

$$(\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)^* \mathcal{L}_{\tilde{W}^{\mathcal{R}}} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}} = (\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)^* \left[d(\tilde{W}^{\mathcal{R}} \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\mathcal{R}}) + \tilde{W}^{\mathcal{R}} \lrcorner\, d\tilde{\omega}^{\mathcal{R}} \right]. \tag{8.7}$$

Poiché $\tilde{W}^{\mathcal{R}}$ tangente a $\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t(\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t)$ implica l'esistenza di un campo vettoriale $\tilde{W}^{\mathcal{R}}_t$ su $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t$ tale che $\tilde{W}^{\mathcal{R}}\,|_{\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t(\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_t)} = (\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)_* \tilde{W}^{\mathcal{R}}_t$ e il *pull-back* di una $(n+1)$-forma su di una varietà n-dimensionale è nullo, si ha

$$(\tilde{j}^{\mathcal{R}}_t)^* (\tilde{W}^{\mathcal{R}} \lrcorner\, d\tilde{\omega}^{\mathcal{R}}) = \tilde{W}^{\mathcal{R}}_t \lrcorner\, d\tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_t = 0\,, \tag{8.8}$$

che sostituita nella (8.7) fornisce

$$(\tilde{j}^{\mathcal{R}_t})^* \mathcal{L}_{\tilde{W}^{\mathcal{R}}} \tilde{\omega}^{\mathcal{R}} = d(\tilde{W}^{\mathcal{R}}_t \lrcorner\, \tilde{\omega}^{\mathcal{R}}_t). \tag{8.9}$$

Sostituendo (8.6) e (8.9) in (8.5) e applicando il teorema di Stokes si ha infine

$$\dot{\Omega}^{\mathcal{R}}(t) = \int_{S_t^{\mathcal{R}}} (\tilde{\omega}_t^{\mathcal{R}})^{\bullet} + \int_{\partial S_t^{\mathcal{R}}} \tilde{W}_t^{\mathcal{R}} \lrcorner \tilde{\omega}_t^{\mathcal{R}} \qquad (\forall t \in \mathbb{R}). \tag{8.10}$$

La tesi segue ora dal notare che sul bordo la velocità tangenziale $\tilde{W}_t^{\mathcal{R}}$ si può scrivere come somma della velocità di efflusso $\tilde{Z}_t^{\mathcal{R}}$ e di una componente tangenziale al bordo $(\tilde{W}_t^{\mathcal{R}})_{\|}$ e che, come si verifica immediatamente, $(\tilde{W}_t^{\mathcal{R}})_{\|} \lrcorner \tilde{\omega}_t^{\mathcal{R}}$ è su $\partial S_t^{\mathcal{R}}$ la forma nulla. ■

Risulta utile esprimere $\dot{\Omega}^{\mathcal{R}}$ in termini dei rappresentanti sullo spazio ambiente e dei rappresentanti in una rappresentazione del moto ritagliato. Nel primo caso è facile verificare che, se si indica con $\omega^{\mathcal{R}}$ un rappresentante di $\{\omega_t^{\mathcal{R}}, t \in \mathbb{R}\}$ in $\mathcal{A}$ e con $Z^{\mathcal{R}}$ il rappresentante, sempre in $\mathcal{A}$ della velocità di efflusso,

$$\dot{\Omega}^{\mathcal{R}}(t) = \int_{S_t} (\iota_t^{\mathcal{R}})^* (\omega^{\mathcal{R}})^{\bullet} + \int_{\partial S_t} (\iota_t^{\mathcal{R}})^* Z^{\mathcal{R}} \lrcorner \omega^{\mathcal{R}} . \tag{8.11}$$

Nel secondo caso, assegnata una rappresentazione del moto ritagliato $(M^{\mathcal{R}}, \varphi^{\mathcal{R}})$ si ha, tenendo conto delle definizioni di rappresentante $\omega_{\varphi^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$ di una forma interfacciale e di velocità di efflusso $Z_{\varphi^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}}$,

$$\dot{\Omega}^{\mathcal{R}} = \int_{M^{\mathcal{R}}} (\omega_{\varphi^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}})^{\bullet} + \int_{\partial M^{\mathcal{R}}} Z_{\varphi^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} \lrcorner \omega_{\varphi^{\mathcal{R}}}^{\mathcal{R}} . \tag{8.12}$$

OSSERVAZIONE 8.1. Si pensi la dimostrazione appena data come divisa in due parti, la prima delle quali termina con la relazione (8.4). In questa prima parte, si procede sostanzialmente come nella dimostrazione del classico teorema del trasporto di Reynolds (*v.* [1], p. 469): l'operatore differenziale naturale è la differenziazione alla Lie, e la codimensione dell'interfaccia (rispetto allo spazio ambiente) non svolge alcun ruolo (v. ancora [1], es. 7.1B, p. 471. Nella seconda parte della dimostrazione, sebbene l'obiettivo (ripartire la variazione temporale del contenuto nella somma di un contributo sul bordo e di uno all'interno dell'interfaccia) e lo strumento (formula di Cartan) siano gli stessi del teorema di Reynolds, compare una diversità rispetto a quello: nel caso stazionario la variazione non si riduce ad un integrale sul bordo. Infatti, se il contenuto è la misura di Lebesgue dell'interfaccia, il teorema deve restituire il noto fatto che non si può variare il volume di una regione di codimensione nulla senza alterarne la frontiera, mentre si può variare l'area di una superficie o variando la sua curvatura media tenendo il bordo fisso a o alterando questo a curvatura media costante. Si noti infine il cambiamento di operatore differenziale: la derivata di Lie viene sostituita dal differenziale esterno tramite la formula di Cartan. ■

OSSERVAZIONE 8.2. Si possono dare dimostrazioni alternative di (8.1) in cui (apparentemente) non si fa uso della nozione di differenziazione alla Lie. Si può verificare facilmente che, se si scrive il rapporto incrementale relativo al contenuto mediante la formula di omotopia (*v.* A2), si ottiene la (8.2) sia passando al limite e applicando il teorema di Stokes sia applicando il teorema di Stokes e passando al limite. Gurtin, Struthers e Williams in [4] seguono nello spirito le deduzioni alternative suddette. Essi procedono dimostrando una formula di omotopia appropriata al contesto che li interessa, senza individuarla come specializzazione di una struttura matematica generale; tale scelta, combinata con l'uso di densità rispetto alla misura di Lebesgue, appesantisce alquanto la loro prova (cf. [4], p. 775, l. + 13): oltre a ridimostrare una relazione nota, ci si trova costretti al calcolo delle normali esterne. ■

A1. Forma corrispondente e forma proiezione di una forma differenziale.

Data una varietà differenziale M siano $\Omega^k(M)$ e $\Omega^k(M, \mathbb{R})$ gli spazi delle k-forme differenziali e delle k-forme differenziali dipendenti dal tempo su M. La struttura di prodotto della varietà $M \times \mathbb{R}$ consente di associare ad ogni k-forma dipendente dal tempo su M una forma *corrispondente* su $M \times \mathbb{R}$; ad ogni forma su $M \times \mathbb{R}$, una forma dipendente dal tempo su M, la sua *forma proiezione*. Sia p la proiezione di $M \times \mathbb{R}$ su M, e sia ι_t è l'immersione canonica all'istante t di M in $M \times \mathbb{R}$; siano inoltre data le forme $\alpha \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ e $\beta \in \Omega(M; \mathbb{R})$. Le applicazioni $\hat{p}: \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \to \Omega^k(M; \mathbb{R})$ e $\hat{\iota}: \Omega^k(M; \mathbb{R}) \to \Omega^k(M \times \mathbb{R})$, che hanno per valore, rispettivamente, la forma proiezione di α e la forma corrispondente di β, sono definite dalle relazioni

$$\text{(A1.1)} \qquad \begin{cases} \hat{p}\alpha(\cdot, t) = \iota_t^* \alpha, \\ \hat{\iota}\beta(\cdot, t) = p^* \beta_t, \end{cases}$$

dove $\beta_t(\cdot) = \beta(\cdot, t)$. Nel seguito, data una forma β su M indichiamo con $\hat{\beta}$ la sua forma corrispondente. Notiamo che in modo analogo si può dare la nozione di corrispondente e di proiezione di un campo tensoriale.

Date due varietà differenziabili M e N, di dimensione m ed n, sia

$\varphi\colon M \times \mathbb{R} \to N$ un'isotopia di M in N. Per gli sviluppi che seguono è utile considerare il diagramma

(A1.2)
$$\begin{tikzcd} M\times\mathbb{R} \arrow[d, "\Phi"'] \arrow[r, shift left, leftarrow, "i_{M,t}"] \arrow[r, shift right, "p_M"'] & M \arrow[d, "\varphi_t"] \\ N\times\mathbb{R} \arrow[r, shift left, leftarrow, "i_{N,t}"] \arrow[r, shift right, "p_N"'] & N \end{tikzcd},$$

dove Φ è il *track* di φ, φ_t l'applicazione di M in N definita da $x \mapsto \varphi(x, t)$, p_M e p_N le proiezioni di $M \times \mathbb{R}$ e $N \times \mathbb{R}$, $\iota_{M,t}$ e $\iota_{N,t}$ le inclusioni all'istante $t \in \mathbb{R}$. Dato un campo vettoriale U su M, eventualmente dipendente dal tempo, la sua *sospensione* (*suspension*) è il campo vettoriale $(U, 1)$ su $M \times \mathbb{R}$. Si controlla facilmente che i flussi locali $\psi_{t_0}^t$ e $\Psi_{t_0}^t$ di U e della sua sospensione $(U, 1)$ verificano la relazione

(A1.3)
$$\psi_{t_0}^t = p_M \circ \Psi_{t_0}^t \circ \iota_{M,t}\,;$$

se i flussi sono globali, segue da (A1.3) che Ψ_0^t è il *track* di ψ_0^t.

LEMMA A1.1. *Data una forma $\omega \in \Omega^k(N; \mathbb{R})$ la forma corrispondente $\hat{\omega}$ verifica le relazioni*

(A1.4)
$$\begin{cases} \Phi^* \hat{\omega} = \hat{\alpha} + dt \wedge \hat{\beta}\,, \\ d\Phi^* \hat{\omega} = \hat{\delta} + dt \wedge \hat{\gamma}\,, \end{cases}$$

dove le forme $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma} \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ sono le forme corrispondenti delle forme α, β, $\gamma \in \Omega^k(M; \mathbb{R})$ definite da

(A1.5)
$$\begin{cases} \alpha(\cdot, t) = \varphi_t^* \omega_t\,, \\ \beta(\cdot, t) = \varphi_t^* (U \lrcorner\, \omega)_t\,, \\ \delta(\cdot, t) = \varphi_t^* d\omega_t\,, \\ \gamma(\cdot, t) = \varphi_t^* (\dot{\omega} + U \lrcorner\, d\omega)_t\,, \end{cases}$$

e dove U è la velocità dell'isotopia, cioè, il campo vettoriale dipendente dal tempo definito, istante per istante su $TN|_{\varphi_t(M)}$, da $U(\varphi_t(x)) = \dot{\varphi}(x, t)$.

DIMOSTRAZIONE. Le (A1.4) seguono immediatamente dal notare che la generica k-forma ε su $M \times \mathbb{R}$ ha la rappresentazione $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_1 + dt \wedge \hat{\varepsilon}_2$, con $\hat{\varepsilon}_1$, $\hat{\varepsilon}_2$ le corrispondenti di forme, dipendenti dal tempo, univocamente definite su M. Le prime due relazioni di (A1.5) seguono dal notare che, per ogni k-upla di vettori $(u_1, \ldots, u_k)$ su M, eventualmente dipendenti dal tempo, si ha

$$\text{(A1.6)} \qquad \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \Phi^* \hat{\omega}(\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k) = \hat{\omega}(\Phi_* \hat{u}_1, \ldots, \Phi_* \hat{u}_k) = \\ = \omega(\varphi_{t*} u_1, \ldots, \varphi_{t*} u_k) = \varphi_t^* \omega(u_1, u_2, \ldots, u_k),$$

$$\text{(A1.7)} \qquad \beta(u_2, \ldots, u_k) = \Phi^* \hat{\omega}(e_t, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_k) = \\ = \hat{\omega}(\Phi_* e_t, \Phi_* \hat{u}_2, \ldots, \Phi_* \hat{u}_k) = \omega(U, \varphi_{t*} u_2, \ldots, \varphi_{t*} u_k) = \\ = \varphi_t^* (U \rfloor \omega)(u_1, u_2, \ldots, u_k),$$

dove e_t è il vettore della base canonica di $\mathbb{R}$ e $\hat{u}_i$, $i = 1, \ldots, k$, i campi vettoriali in $M \times \mathbb{R}$ corrispondenti ai campi u_i. Le ultime due relazioni di (A1.5) si dimostrano in modo analogo notando che

$$\text{(A1.8)} \qquad d\Phi^* \hat{\omega} = \Phi^* d\hat{\omega}, \qquad d\hat{\omega} = dt \wedge (\dot{\omega})\hat{} + (d\omega)\hat{},$$

$$\text{(A1.9)} \qquad \Phi^* (dt \wedge (\dot{\omega})\hat{}) = \Phi^* dt \wedge \Phi^* (\dot{\omega})\hat{} = dt \wedge (\varphi_t^* \dot{\omega})\hat{}. \qquad \blacksquare$$

PROPOSIZIONE A1.2. *La derivata di Lie $\mathbb{L}_X \omega$ di una forma dipendente dal tempo rispetto ad un campo vettoriale X, eventualmente dipendente dal tempo, si può esprimere tramite la derivata di Lie della forma corrispondente $\hat{\omega}$ rispetto alla sospensione di X, mediante la relazione*

$$\text{(A1.10)} \qquad \mathbb{L}_X \omega = \hat{p} \mathcal{L}_{(X,\, 1)} \hat{\omega}.$$

DIMOSTRAZIONE. Dalla definizione di derivata di Lie e dalla relazione (A1.3) tra il flusso locale di un campo vettoriale e il flusso della sua sospensione segue

$$\text{(A1.11)} \qquad (\mathbb{L}_X \omega)_t = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\Delta_\tau} [(\psi_t^\tau)^* \omega_\tau - \omega_t] = \\ = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\Delta_\tau} [\iota_t^* (\Psi_t^\tau)^* p^* \omega_\tau - \omega_t],$$

dove ψ è il flusso di locale di X, Ψ quello della sua sospensione e $\Delta_\tau = \tau - t$. Poiché $\iota_t^* (\Psi_t^\tau)^* p^* \omega_\tau = \iota_t^* (\Psi_t^\tau)^* \hat{\omega}$ e $\omega_t = \iota_t^* \hat{\omega}$, la relazione precedente si può riscrivere nella forma

$$(\mathbb{L}_X \omega)_t = \iota_t^* \frac{1}{\Delta_\tau} [(\Psi_t^\tau)^* \hat{\omega} - \hat{\omega}];$$

la tesi segue passando al limite e tenendo conto della prima delle (A1.1). ■

OSSERVAZIONE A1.1. Dal Lemma A1.1 segue immediatamente che per ogni campo vettoriale X su N, eventualmente dipendente dal tempo,

$$\hat{p}\mathcal{L}_{(X,\,1)}\hat{\alpha} = \hat{p}\mathcal{L}_{(X,\,1)}\Phi^*\hat{\omega}\,; \tag{A1.12}$$

dalla Proposizione A1.2 segue infine, ad esempio esprimendo la derivata di Lie in termini della derivata esterna tramite la formula di Cartan (*v.* A2), che

$$\mathbb{L}_X\omega(\cdot,\, t) = \dot{\omega}(\cdot,\, t) + \mathcal{L}_{X(\cdot,\, t)}\omega_t \qquad (\forall t \in \mathbb{R})\,. \tag{A1.13}$$

A2. Formula di Cartan e formula di omotopia.

Indicati con α una forma differenziale e con X un campo vettoriale su di una varietà differenziabile, è noto che valgono le relazioni

$$\mathcal{L}_X\alpha = d(X \lrcorner\, \alpha) + X \lrcorner\, d\alpha\,, \tag{A2.1$_1$}$$

$$\varphi_t^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = dH\alpha + H\,d\alpha\,, \tag{A2.1$_2$}$$

chiamate in letteratura, rispettivamente, formula di Cartan (10) e formula di omotopia (v. [1], [7]). È noto, inoltre, che la seconda relazione si può ottenere dalla prima per «integrazione», diretta [7] o indiretta [1]; tanto in [1] che in [7] la formula di Cartan viene dimostrata per mezzo delle proprietà delle *derivazioni tensoriali* (11). Qui, visto che farlo risulta utile ai fini di una comprensione piena della dimostrazione del teorema del trasporto per interfacce data da Gurtin, Struthers and Williams in [4], preferiamo dimostrare prima mediante un'applicazione del teorema di Stokes la formula di omotopia, per poi ottenere per derivazione di quella la formula di Cartan.

LEMMA A2.1. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione m,*

(10) — A «magic» formula of Cartan — per Abrahms, Marsden e Ratiu in [1], p. 430.

(11) Lo schema della dimostrazione è il seguente: si prova prima che la formula vale per le funzioni scalari e per le 1-forme, quindi per ricorsione, tenendo conto che la derivata di Lie è una derivazione tensoriale, si mostra che la formula vale per l'intera algebra delle forme esterne.

compatta, orientabile, dotata di bordo ∂M, e sia φ: $M \times \mathbb{R} \to M$ un'isotopia di M in M. Se $\omega \in \Omega^m(M; \mathbb{R})$ e se X è il campo della velocità di φ, vale la relazione

$$\text{(A2.2)} \qquad \int_M [\varphi_t^* \omega - \varphi_{t_0}^* \omega] = \int_M \int_{t_0}^{t} \varphi_\tau^* [\dot{\omega} + d(X \lrcorner\, \omega) + X \lrcorner\, d\omega]\, d\tau\,,$$

per tutti gli istanti t_0, $t \in \mathbb{R}$, $t_0 \leq t$.

Dimostrazione. Si considerino il cilindro $M \times [t_0, t]$ di $M \times \mathbb{R}$ e la sua frontiera $\partial(M \times [t_0, t])$, data dall'unione disgiunta delle varietà $M \times \{t_0\}$, $M \times \{t\}$, $\partial M \times [t_0, t]$. Scelta un'orientazione per M, si consideri $M \times \mathbb{R}$ orientato da $[e_t \wedge \hat{\lambda}]$, con $\hat{\lambda}$ il corrispondente in $M \times \mathbb{R}$ di un multivettore λ appartenente all'orientazione fissata su M (12). L'orientazione indotta sulla frontiera $\partial(M \times [t_0, t])$ si ottiene allora orientando $M \times \{t_0\}$ con $[-\hat{\lambda}]$, $M \times \{t\}$ con $[\hat{\lambda}]$, $\partial M \times [t_0, t]$ con $[-e_t \wedge \hat{\kappa}]$, dove $\hat{\kappa}$ è il corrispondente del multivettore k che orienta ∂M. Indicato con v un vettore esterno a ∂M, è immediato verificare che $-e_t$, e_t, $\hat{v}$ sono vettori esterni rispettivamente su $M \times \{t_0\}$, su $M \times \{t\}$ e su $\partial M \times [t_0, t]$ e, quindi, che l'orientazione scelta per la frontiera è quella indotta dall'orientazione di M. Ne segue che, in ognuna delle regioni in cui risulta decomposta la frontiera, il prodotto *wedge* di un vettore esterno e di un qualsiasi rappresentante dell'orientamento scelto appartiene all'orientamento $[e_t \wedge \hat{\lambda}]$ fissato su tutta la varietà $M \times [t_0, t]$.

Indicato con Φ il *track* di φ, si scriva il teorema di Stokes per la regione $M \times [t_0, t]$ orientata come sopra e per la forma $\Phi^* \hat{\omega}$ su $M \times \mathbb{R}$:

$$\text{(A2.3)} \qquad \int_{[t_0, t] \times M} d\Phi^* \hat{\omega} = \int_{\partial([t_0, t] \times M} \Phi^* \hat{\omega}\,.$$

Tenendo conto di $(A1.4)_1$, della decomposizione e dell'orientamento del-

(12) L'orientazione è una classe di equivalenza di multivettori: due multivettori λ_1, λ_2 sono equivalenti, (cioè, definiscono la stessa orientazione) se e solo se si può trovare un multiplicatore positivo tale che $\lambda_1 = a\lambda_2$. Come d'uso, si indica con $[\lambda_1]$ la classe di equivalenza individuata da λ_1. Sia M è una varietà orientabile dotata di bordo ∂M. Scelta un'orientazione $[\lambda]$ per M, l'orientazione indotta su ∂M è quella $[\kappa]$ unicamente determinata dalla condizione che il suo multivettore rappresentante κ sia tale che $[v \wedge \kappa] = [\lambda]$ per ogni vettore v su ∂M esterno a M.

la frontiera, al membro destro di (A2.3) si può conferire la forma

$$(A2.4)\qquad \int_{\partial([t_0,t]\times M)} \Phi^*\hat{\omega} = \int_{\{t\}\times M} \hat{\omega} + \int_{\{t_0\}\times M} \hat{\omega} + \int_{[t_0,t]\times\partial M} dt\wedge\hat{\beta} =$$

$$= \int_M (\varphi_t^*\omega - \varphi_{t_0}^*\omega) - \int_{\partial M}\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau^*(X\lrcorner\,\varphi)\,d\tau =$$

$$= \int_M (\varphi_t^*\omega - \varphi_{t_0}^*\omega) - \int_M\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau^*\, d(X\lrcorner\,\varphi)\,d\tau\,.$$

D'altra parte, tenendo conto di $(A1.4)_2$, si può dare al membro sinistro la forma

$$(A2.5)\qquad \int_{[t_0,t]\times M} d\Phi^*\hat{\omega} = \int_M\int_{t_0}^{t} \varphi_\tau^*(\dot{\omega} + X\lrcorner\, d\omega)\,d\tau\,.$$

Sostituendo ora (A2.4), (A2.5) nella (A2.3), si ottiene la tesi. ∎

COROLLARIO A2.2 (Formula di omotopia). *Sia* $\psi_{t_0}^t: N\to N$ *il flusso associato al campo vettoriale* X *dipendente dal tempo, e sia* $\omega\in\Omega^k(N;\mathbb{R})$. *Vale la formula di omotopia*

$$(A2.6)\qquad (\psi_{t_0}^t)^*\omega_t - \omega_{t_0} = \int_{t_0}^{t} (\psi_{t_0}^\tau)^*\,\dot{\omega}\,d\tau + dH\omega + H\,d\omega\,,$$

dove $H:\Omega^k(N,\mathbb{R})\to\Omega^{k-1}(N;\mathbb{R})$ *è l'operatore di omotopia definito da*

$$(A2.7)\qquad H\omega = \int_{t_0}^{t} (\psi_{t_0}^\tau)^*(X\lrcorner\,\omega)\,d\tau\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Indicata con α la k- forma differenza tra il primo e il secondo membro di (A2.6), è sufficiente dimostrare che è nullo l'integrale di α per qualsiasi sottovarietà k-dimensionale di N. Infatti, come si verifica facilmente, se la forma α fosse diversa da zero in punto $x\in N$, allora essa sarebbe diversa da zero in un intorno U_x di x, ed esisterebbe una sottovarietà k-dimensionale M_x di U_x tale che $\int_{M_x}\alpha\neq 0$. Ora, se M è una generica sottovarietà k-dimensionale di N, risulta definita l'isotopia di M in N

$$\varphi = \psi_{t_0}^t \circ \iota ,$$

dove ι è l'immersione canonica di M in N. Ma $\int_M \alpha$ è nullo per il Lemma A2.1. ∎

COROLLARIO A2.3 (Formula «magica» di Cartan). *Dato un campo vettoriale X e una k-forma differenziale ω dipendente dal tempo, vale la relazione seguente tra la derivata di Lie e il differenziale esterno:*

$$\mathbb{L}_X \omega = \dot{\omega} + d(X \lrcorner\, \omega) + X \lrcorner\, d\omega . \tag{A2.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissati $t \in \mathbb{R}$ e $x \in N$, si consideri, per $\tau \in I_t$, il flusso locale $\psi_t^\tau : O_x \to O_x$ associato al campo vettoriale X, dove con $I_t \subset \mathbb{R}$ e $O_x \subset N$ si intendono due intorni di t e x, rispettivamente. Applicando la formula di omotopia in O_x si ha

$$\frac{1}{\Delta t} [(\psi_t^\tau)^* \, \omega_\tau - \omega_t] = \frac{1}{\Delta t} \left[\int_t^\tau (\psi_t^\xi)^* \, \dot{\omega} \, d\xi + dH\omega + H\, d\omega \right], \tag{A2.9}$$

con $\Delta t = \tau - t$; passando quindi al limite per $\tau \mapsto t$ e ricordando la definizione di derivata di Lie di una forma dipendente dal tempo e la definizione (A2.7) di operatore di omotopia H, otteniamo

$$(\mathbb{L}_X \omega)(x, t) = (\dot{\omega} + d(X \lrcorner\, \omega) + X \lrcorner\, d\omega)(x, t) \qquad (\forall t \in \mathbb{R})(\forall x \in N),$$

cioè, la tesi. ∎

A3. Rappresentazioni del moto che conservano i rapporti d'area.

Fissato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$, diremo che una sua rappresentazione (M, φ) *conserva i rapporti d'area* se, per ogni coppia di sottovarietà $P, Q \subset M$ di dimensione massima e per ogni istante t, risulta temporalmente costante il rapporto $\mathbb{A}(t, P)/\mathbb{A}(t, Q)$, dove $\mathbb{A}$ è il funzionale dell'area:

$$\mathbb{A}(t, P) = \int_P \mu_\theta(\cdot, t) , \tag{A3.1}$$

con $\mu_\theta(\cdot, t)$ la forma di volume su M all'istante t.

Se una rappresentazione (M, φ) del moto conserva i rapporti d'area, è facile vedere che, per ogni sottovarietà P di dimensione massima, vale la condizione di evoluzione

$$\frac{\dot{\mathbb{A}}(t, P)}{\mathbb{A}(t, P)} = c(t), \tag{A3.2}$$

dove la funzione $c(t)$ è definita da

$$c(t) = \frac{d}{dt} \log \mathbb{A}(t, M); \tag{A3.3}$$

vista l'arbitrarietà di P, la (A3.2) è equivalente a richiedere che

$$\dot{\mu}_\theta = c\mu_\theta . \tag{A3.4}$$

Dato un moto interfacciale $\{\mathcal{S}_t, t \in \mathbb{R}\}$, se ne può sempre costruire una rappresentazione che conserva i rapporti d'area. Val la pena di osservare che, in contrasto con un'aspettativa abbastanza naturale, la rappresentazione normale non necessariamente conserva i rapporti d'area. Sia (M, φ) una rappresentazione del moto scelta ad arbitrio, e sia N una qualunque varietà diffeomorfa a M relativamente al diffeomorfismo $\iota\colon N \to M$. Il problema consiste nel determinare il cambiamento di parametrizzazione $\psi\colon N \times \mathbb{R} \to M$ dalla rappresentazione (M, φ) a quella cercata, che indicheremo con (N, θ).

Sia U la velocità di ψ, cioè, il campo vettoriale su M, dipendente dal tempo, definito da

$$U(\psi(x, t), t) = \dot{\psi}(x, t) \qquad (\forall x \in N)(\forall t \in \mathbb{R}). \tag{A3.5}$$

Notiamo che U è tangente al bordo ∂M; in altre parole, per ogni forma caratteristica β di ∂M in M,

$$(\beta, U) = 0 \qquad \text{in } \partial M . \tag{A3.6}$$

Indicando con $*_\mu$ l'isomorfismo di Weyl associato alla forma di volume μ_φ e con j è l'immersione canonica di ∂N in N, si può conferire a (A3.6) la forma intrinseca

$$j^* *_\mu U = 0 \qquad \text{in } \partial M . \tag{A3.7}$$

D'altra parte, com'è facile verificare, $\mu_\theta(\cdot, t) = \psi_t^* \mu_\varphi(\cdot, t)$ e $\dot{\mu}_\theta(\cdot, t) = \psi_t^* \mu_\varphi(\dot{\mu}_\varphi + \mathcal{L}_U \mu_\varphi)$. Quindi, ricordando (A3.4), la velocità U del cambiamento di parametrizzazione cercato deve soddisfare la condizione

$$-\mathcal{L}_U \mu_\varphi = \dot{\mu}_\varphi - c\mu_\varphi \qquad \text{in } M; \tag{A3.8}$$

in modo equivalente, tenendo conto della formula «magica» di Cartan, si può scrivere

$$-d *_{\mu} U = \dot{\mu}_{\varphi} - c\mu_{\varphi} \quad \text{in } M . \tag{A3.9}$$

PROPOSIZIONE A3.1. *Un campo vettoriale U su M, dipendente dal tempo, è il campo della velocità associato al cambiamento di parametrizzazione ψ che muta una rappresentazione del moto (M, φ) arbitraria in una rappresentazione (N, Θ) che conserva i rapporti d'area se, per una qualche funzione $c(t)$, U è soluzione del problema al bordo formulato accostando la* (A3.7) *alla* (A3.9).

DIMOSTRAZIONE. Scelti (M, φ), N e il diffeomorfismo ι e denotato con $F^t_{t_0}: M \to M$ il flusso associato al campo vettoriale U, sia $\psi: N \times \mathbb{R} \to M$ l'applicazione $F^t_{t_0} \circ \iota$. È facile vedere che (N, θ), con $\theta = \varphi \circ \psi$, è una rappresentazione che conserva i rapporti d'area, controllando che $U(\psi(x, t) = \dot{\psi}(x, t)$ e che $\dot{\mu}_{\theta} = c\mu_{\varphi}$. ■

Notiamo che l'equazione (1.9) si può scrivere in forma di divergenza:

$$-\operatorname{div}_{\mu} U = *_{\mu} \dot{\mu}_{\varphi} - c(t) \quad \text{in } M ; \tag{A3.10}$$

notiamo altresì che condizione necessaria per l'esistenza di (infinite) soluzioni di (A3.10) è che la funzione $c(t)$ sia il valor medio della derivata dell'area di M, cioè, abbia l'espressione (A3.3). Se M è dotata, istante per istante, di una metrica riemanniana, è possibile selezionare tra le infinite soluzioni di (6.18) quell'unica che risulta essere il gradiente di una funzione scalare. Si ha infatti, ponendo $U = \nabla f$ in (A3.10) e in (A3.6) e indicando con n il vettore della normale esterna a ∂N che f deve essere una soluzione del problema di Neumann

$$\begin{cases} -\Delta f = * \dot{\mu}_{\varphi} - c(t) & \text{in } M , \\ (\nabla f, n) = 0 & \text{in } M . \end{cases} \tag{A3.11}$$

Com'è noto, il sistema (A3.11) determina la funzione f a meno di una costante arbitraria e, quindi, il campo U in modo unico.

Ringraziamenti. Desidero ringraziare P. Podio Guidugli per avermi suggerito l'argomento di questa ricerca e per averne seguito con pazienza e interesse tanto lo sviluppo quanto la stesura finale.

Questa ricerca è stata svolta nell'ambito del Progetto Nazionale M.U.R.S.T. 40% «Termomeccanica dei Continui Classici e dei Materiali Nuovi».

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Abraham - J. E. Marsden - T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Applied Mathematical Sciences, Vol. **75**, Springer-Verlag, New York (1988).

[2] S. Angenent - M. E. Gurtin, *Multiphase thermomechanics with interfacial structures, II. Evolution of an isotermal interface*, Arch. Rational Mech. Anal., **108** (1989), pp. 323-391.

[3] M. E. Gurtin - A. Struthers, *Multiphase thermomechanics with interfacial structures, III. Evolving phase boundaries in the presence of bulk deformation*, Arch. Rational Mech. Anal., **112** (1990), pp. 97-160.

[4] M. E. gurtin - A. Struthers - W. O. Williams, *A transport theorem for moving interfaces*, Q. Appl. Math., **47**, N. 4 (1989).

[5] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **33**, Springer-Verlag, New York (1976).

[6] G. P. Moeckel, *Thermodinamics of an interface*, Arch. Rational Mech. Anal., **57** (1975), pp. 255-280.

[7] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. **107**, Springer-Verlag, New York (1986).

[8] Osher - J. A. Sethian, *Front propagating with curvature depending speed: algorithms based on Hamilton-Jacoby formulations*, J. Comp. Phys., **79** (1990), pp. 12-49.

[9] J. A. Sethian, *Curvature and the evolution of fronts*, Comm. Math. Phys., **101** (1985), pp. 487-499.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1993.