RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

KLAUS DOERK

Über die nilpotente Länge maximaler Untergruppen bei endlichen auflösbaren Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 91 (1994), p. 19-21

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__91__19_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 91 (1994)

Über die nilpotente Länge maximaler Untergruppen bei endlichen auflösbaren Gruppen.

KLAUS DOERK (*)

Ist G eine endliche Gruppe, so setzen wir $F_0(G) = 1$, $F_1(G) = F(G)$ (die Fittinguntergruppe von G) und $F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G))$ für $i \geq 1$. Bei einer endlichen auflösbaren Gruppe gibt es stets ein m mit $F_m(G) = G$. Die kleinste nichtnegative Zahl n mit $F_n(G) = G$ heißt die nilpotente Länge $n(G)$ von G. Ist U eine maximale Untergruppe von G, so gilt offensichtlich $n(U) \leq n(G)$. Der folgende Satz zeigt jedoch, daß die nilpotente Länge einer maximalen Untergruppe einer endlichen auflösbaren Gruppe sich höchstens um 2 von der nilpotenten Länge der ganzen Gruppe unterscheiden kann. Alle betrachteten Gruppen seinen endlich und auflösbar.

SATZ 1. Sei U eine maximale Untergruppe der Gruppe G. Dann ist $n(U) = n(G) - i$ mit $i \in \{0, 1, 2\}$.

BEWEIS. Wir beweisen die Behauptung mit Induktion nach $|G|$. Sei U eine maximale Untergruppe von G und N ein minimaler Normalteiler von G. Ist $N \nleq U$, so ist $U \cong G/N$. und es folgt $n(U) = n(G) - i$ mit $i \in \{0, 1\}$. Wir können daher annehmen, daß alle minimalen Normalteiler von G in U liegen. Hat G mindestens zwei minimale Normalteiler, so kann man annehmen, daß für einen, etwa N, $n(G/N) = n(G)$ gilt. Die Induktionsannahme liefert $n(U/N) = n(G/N) - i = n(G) - i$ für $i \in \{0, 1, 2\}$. Wegen $n(G) \geq n(U) \geq n(U/N)$ folgt dann die Behauptung. Also kann man annehmen, daß G genau einen minimalen Normalteiler, etwa N, besitzt. Ist $N \leq \phi(G)$, so ist $n(G) = n(G/N)$, und die Behauptung folgt wie im vorangehenden Fall. Also ist $N \nleq \phi(G)$, und G ist eine primitive Gruppe. Die Induktionsannahme liefert $n(U/N) = {} = n(G/N) - i = n(G) - 1 - i$ für $i \in \{0, 1, 2\}$. Ist $n(U) > n(U/N)$, so er-

(*) Indirizzo dell'A.: Fachbereich Mathematik, Johannes Gutenberg Universität-Mainz, Saarstrasse 21, W-6500 Mainz, Germany.

gibt sich die Behauptung. Also ist $n(U) = n(U/N)$. Sei N eine p-Gruppe. Dann ist $F_2(G)/N$ eine p'-Gruppe. Sei $L = F_2(G) \cap U$. Ist $F_2(G) \not\leq U$, so ist $G = UF_2(G)$. Dann ist $n(U/L) = n(G) - 2$. Also ist $n(U) = n(U/N) = n(G) - 2 + i$ mit $i \in \{0, 1\}$ und die Behauptung ist richtig. Wir können deshalb $F_2(G) \leq U$ annehmen. Da $F(U)$ eine p-Gruppe ist, ist dann $F(U)/N \leq C_{G/N}(F_2(G)/N)$, also $F(U) = N$. Dies widerspricht jedoch der Annahme $n(U) = n(U/N)$.

Beispiel. *a*) Alle drei Fälle aus Satz 1 können vorkommen, wie man leicht sieht. Es ist sogar möglich, daß alle maximale Untergruppen diesselbe nilpotente Länge wie die ganze Gruppe haben (z.B. $1 \neq G$ nilpotent; $G = (\mathrm{Sym}(3))^m$, $m \geq 2$) bzw. alle die nilpotente Länge $n(G) - 1$ haben (z.B. $G = \mathrm{Sym}(3)$). Es ist jedoch nicht möglich, daß alle maximalen Untergruppen von G nilpotente Länge $n(G) - 2$ haben. Denn sei H/K ein komplementierbarer Hauptfaktor einer Gruppe G unterhalb $F(G)$ und sei U ein Komplement zu H/K in G. Dann ist $n(U) \geq n(G/F(G)) = n(G) - 1$.

b) Sei $H = \mathrm{Sym}(4)$ und $U \in \mathrm{Syl}_2(H)$. Dann ist U eine maximale Untergruppe von H mit $n(U) = 1 = n(H) - 2$. Indem man H abwechselnd (mit $GF(3)$ beginnend) mit irreduziblen treuen Moduln über $GF(3)$ bzw. $GF(2)$ erweitert, erhält man Gruppen G mit der Eigenschaft, daß G genau $n(G) - 2$ Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen U besitzt mit $n(U) = n(G) - 2$. Dabei ist $n(G) \geq 3$ beliebig wählbar.

Wir bezeichnen nun mit $\mathcal{N}$ die Klasse der nilpotenten Gruppen und mit $\mathcal{N}^i$ die Klasse der Gruppen von nilpotenter Länge $\leq i$. Die Klasse $\mathcal{N}^i$ ist eine Schunckklasse. Deshalb folgt aus Proposition III, (3.23) aus [1] der folgende Hilfssatz:

Hilfssatz 1. Sei N ein nilpotenter Normalteiler von G und $G/N \in \mathcal{N}^i$. Dann bilden die $\mathcal{N}^i$-maximalen Supplemente zu N in G eine Konjugiertenklasse von G.

Wir benötigen Hilfssatz 1 beim Beweis von

Satz 2. Die Anzahl der Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen U von der Gruppe G mit $n(U) = n(G) - 2$ ist höchstens $n(G) - 2$. (Das obige Beispiel *b*) zeigt, daß diese Schranke für jedes $n(G) \geq 3$ angenommen wird).

Beweis. Sei $n = n(G)$ und sei U eine maximale Untergruppe von G mit $n(U) = n - 2$. Dann ist $F_1(G) \leq U$ und $F_{n-1}(G) \not\leq U$. Sei nun $F_i(G) \leq U$ und $F_{i+1}(G) \not\leq U$ für eine i mit $1 \leq i \leq n - 2$. Dann ist $G = UF_{i+1}(G)$ und $M = U \cap F_{i+1}(G) \trianglelefteq G$. Dabei ist $n(U/M) =$

$= n(G/F_{i+1}(G)) = n - i - 1$ und $n(U/F_{i-1}(U)) = (n-2) - (i-1) =$ $= n - i - 1$. Deshalb ist $n(U/(F_{i-1}(U) \cap M)) = n - i - 1$. Wegen $M \cap F_{i-1}(U) = F_{i-1}(M) = F_{i-1}(G)$ ist daher $n(U/F_{i-1}(G)) = n - i - 1$. Insbesondere ist $n(U/F_i(G)) \leq n - i - 1$ und $n(G/_i(G)) \leq n - i$. Nach Hilfssatz 1 (angewandt auf $G/F_i(G) = (U/F_i(G))(F_{i+1}(G)/F_i(G)))$ sind daher alle maximalen Untergruppen U von G mit $n(U) = n - 2$ und $F_i(G) \leq U$, $F_{i+1}(G) \nleq U$ für i mit $1 \leq i \leq n-2$, i fest. konjugiert.

Als Anwendung von Satz 1 zeigen wir, daß in einer Gruppe G die $\mathcal{N}^i$-Injektoren und die $\mathcal{N}^i$-Projektoren für $i \geq 2$ nur in trivialen Fällen übereinstimmen. (Definition und Eigenschaften von Projektoren und Injektoren findet man in [1]).

Satz 3. Sei G eine Gruppe, deren $\mathcal{N}^i$-Projektoren mit den $\mathcal{N}^i$-Injektoren übereinstimmen. Ist $i \geq 2$, so ist $G \in \mathcal{N}^i$.

Beweis. Sei U ein $\mathcal{N}^i$-Injektor von G der ein $\mathcal{N}^i$-Projektor von G ist. Wir zeigen mit Induktion nach $|G|$, daß $G \in \mathcal{N}^i$. Sei $U \neq G$. Da U sowohl $\mathcal{N}^i$-Injektor als auch $\mathcal{N}^i$-Projektor von jeder Gruppe V mit $U \leq V \leq G$ ist, können wir annehmen, daß U eine maximale Untergruppe von G ist. Da U ein $\mathcal{N}^i$-Injektor von G ist, ist das Radikal $G_{\mathcal{N}^i} \leq U$. Da U ein $\mathcal{N}^i$-Projektor von G ist, ist $U/G_{\mathcal{N}^i}$ $\mathcal{N}^i$-maximal in $G/G_{\mathcal{N}^i}$. Also ist $n(U/G_{\mathcal{N}^i}) = i$ und $n(G/G_{\mathcal{N}^i}) > i$. Nach Satz 1 ist $n(G) - i = n(G/G_{\mathcal{N}^i}) = i + 1$ oder $i + 2$. Folglich ist $n(G) = 2i + 1$ oder $2i + 2$. Wieder mit Satz 1 erhält man $i =$

$$= n(U) = n(G) - \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} = \begin{cases} 2i+1 \\ 2i+2 \end{cases} - \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \geq 2i - 1.$$

Dies ist wegen $i \geq 2$ jedoch nicht möglich. Also ist $G = U \in \mathcal{N}^i$.

Beispiel. Die Gruppe Sym(4) ist eine nichtnilpotente Gruppe, deren 2-Sylowgruppen sowohl $\mathcal{N}$-Injektoren als auch $\mathcal{N}$-Projektoren sind. Also ist Satz 3 für $i = 1$ nicht richtig.

LITERATURE

[1] K. Doerk - T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1992).

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 ottobre 1992.