RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURIZIO CANDILERA

Immersione canonica e mappa dei periodi. Il caso dei gruppi di Barsotti-Tate étale e moltiplicativi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 91 (1994), p. 125-183

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1994__91__125_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 91 (1994)

Immersione canonica e mappa dei periodi. Il caso dei gruppi di Barsotti-Tate étale e moltiplicativi.

MAURIZIO CANDILERA (*)

Introduzione.

Sia K un corpo locale, A il suo anello degli interi e k il corpo residuo, di caratteristica positiva e perfetto; indichiamo poi con $\bar{K}$ e C (risp. $\bar{A}$ e A_C) una chiusura algebrica di K ed il suo completamento rispetto alla topologia indotta dalla valutazione (risp. i corrispondenti anelli degli interi). Siano poi $G = \varinjlim G_n$ un gruppo p-divisibile (o di Barsotti-Tate), definito su A, e $\widehat{G} = \varinjlim \widehat{G}_n$ il suo duale.

Nel celebre articolo sui gruppi p-divisibili [TA], Tate introdusse una dualità tra i Moduli di Tate di G e $\widehat{G}$ che può essere descritta nel modo seguente: i moduli di Tate associati ai gruppi in questione sono $T_p(G) = \varprojlim G_n(\bar{A})$ e $T_p(\widehat{G}) = \varprojlim \widehat{G}(\bar{A})$; ove i gruppi finiti G_n e $\widehat{G}_n$ sono duali (di Cartier) fra loro. In base a tale dualità, un punto di $\widehat{G}_n(\bar{A})$ viene identificato con un elemento moltiplicativo g_n dell'algebra affine $R_n \otimes \bar{A}$ del gruppo $G_n \otimes \bar{A}$; quindi, al variare di Q_n in $G_n(\bar{A})$, è ben definito il valore $g_n(Q_n) \in \mu_{p^n}(\bar{A})$, ove $\mu_{p^n}(\bar{A})$ indica il gruppo delle radici p^n-esime dell'unità in $\bar{A}$. Ciò detto, dati un punto $q = (Q_0, Q_1, \ldots)$ di $T_p(G)$ ed un pun-

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica Pura e Applicata, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italia. E-mail: Candilera@PDMAT1.unipd.it.

to $g = (g_0, g_1, \ldots)$ di $T_p(\widehat{G})$, si può considerare la successione

$$\langle g, q\rangle = (g_0(Q_0), g_1(Q_1), \ldots) \in \varprojlim \mu_{p^n}(\bar{A}) = T_p(\boldsymbol{G}_m),$$

ove $\boldsymbol{G}_m$ indica, come di consueto, il gruppo moltiplicativo (su A).

Il modulo di Tate $T_p(\boldsymbol{G}_m)$ può essere immerso nel gruppo moltiplicativo dell'anello di valutazione $\mathcal{R}_A = \varprojlim (A_C/pA_C \leftarrow A_C/pA_C \leftarrow \ldots)$ (cf. [FO2] per le proprietà di questo anello), di caratteristica p, integro e perfetto; e, tramite i rappresentanti di Teichmüller, tutti gli elementi del gruppo $\mathcal{R}_A^\times$ possono essere rialzati ad un sottogruppo del gruppo moltiplicativo dell'anello dei vettori di Witt $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)$. Per tutti gli elementi di $T_p(\boldsymbol{G}_m)$ immerso in $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)^\times$ converge in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$ la serie del logaritmo e si ottiene così una versione additiva dell'accoppiamento di Tate, a valori in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$. In particolare, in tal modo, gli elementi del modulo di Tate $T_p(\widehat{G})$ divengono applicazioni $\mathbb{Z}_p$-lineari sul Modulo di Tate $T_p(G)$ e, con una piccola variazione nella costruzione qui delineata, possono essere estese ad applicazioni $\mathbb{Z}_p$ lineari, a valori in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$, definite su tutto lo spazio di Tate $V_p(G) = \varprojlim (G(\bar{A}) \leftarrow G(\bar{A}) \leftarrow \ldots)$.

Tramite l'*immersione canonica* definita da Barsotti nel 1968 (cf. [VP] o [WR]) gli elementi del Modulo di Dieudonné $\boldsymbol{M}(G_k)$ della fibra speciale del gruppo G divengono, in modo naturale, applicazioni $\mathbb{Z}_p$-lineari sullo Spazio di Tate $V_p(G)$, a valori in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$. Viene quindi spontaneo chiedersi quali relazioni ci siano tra le applicazioni lineari prodotte dall'accoppiamento di Tate, tramite il logaritmo dei bivettori, e quelle prodotte per immersione canonica dagli elementi del Modulo di Dieudonné; tenendo conto nel far ciò della «mappa dei periodi», ovvero dell'isomorfismo definito da Tate nell'articolo citato, tra il modulo $T_p(\widehat{G})$, opportunamente cambiato di base, e la coomologia di De Rham $H^1_{DR}(G_K) \cong \boldsymbol{M}(G_k) \otimes K$, anch'essa opportunamente cambiata di base.

Lo scopo di questo lavoro è di svolgere il confronto proposto nel caso in cui G sia un gruppo di Barsotti-Tate étale, $\widehat{G}$ il suo duale moltiplicativo ed $A = \boldsymbol{W}(k)$; lasciando il caso generale ad un successivo approfondimento (cf. [PD]). Questi due casi presentano particolare interesse perchè permettono di mettere in evidenza gli aspetti fondamentali del problema proposto senza il fardello delle tecniche necessarie per trattare i gruppi di Barsotti-Tate di tipo generale. Inoltre, la rappresentazione funzionale delle algebre associate ad un gruppo di Barsotti-Tate étale in caratteristica positiva, esposta nella Tesi di Baldassarri (cf. [BA]), e qui ripresa, permette di dare una presentazione elementare, ma molto suggestiva delle relazioni esistenti tra i moduli in questione e del ruolo giocato dalle varie relazioni di Dualità

Diamo ora una rapida descrizione della struttura di questo lavoro.

Nel § 1 vengono richiamate le definizioni fondamentali sulla Dualità di Cartier tra gruppi finiti e la costruzione dell'algebra di Barsotti $\widehat{\mathcal{R}}$ (bicampo) associata ad un gruppo di Barsotti-Tate G ed al suo duale $\widehat{G}$ su di un campo di caratteristica positiva. Nel § 2 si espongono i fatti fondamentali sulla rappresentazione funzionale dell'algebra affine di un gruppo di Barsotti-Tate étale in caratteristica positiva e dell'algebra affine del suo duale, riprendendo essenzialmente le costruzioni di [BA], mentre nel § 3 si descrive la rappresentazione funzionale del suo rialzamento a $W(k)$, che viene a coincidere con l'immersione canonica di tale rialzamento (cf. il § 1 di [WR]); analogamente si studia l'immersione canonica dell'algebra affine del gruppo duale e le sue relazioni con quanto esposto in caratteristica positiva. I §§ 4 e 5 sono dedicati alla descrizione degli accoppiamenti di dualità, alla mappa dei periodi ed alle relazioni reciproche tra queste costruzioni. In particolare, vengono messe in evidenza le relazioni esistenti tra la dualità tra i moduli canonici, la dualità tra i moduli di Tate e le relazioni che sussistono tra la mappa dei periodi ed il logaritmo dell'estensione universale additiva nel senso di Mazur e Messing (cf. [MM]). Le relazioni risultano più espressive facendo l'ipotesi che il campo k sia algebricamente chiuso. Infine, il § 6 estende le considerazioni fatte nei numeri precedenti al caso in cui il campo k non sia algebricamente chiuso, mettendo in evidenza le relazioni tra le varie mappe e le azioni naturali del gruppo di Galois.

Da ultimo, non posso esimermi dal ringraziare Valentino Cristante per le discussioni avute durante la preparazione di questo lavoro.

1. Dualità di Cartier ed Algebra di Barsotti. Alcuni richiami.

Sia k un campo perfetto di caratteristica $p > 0$ e sia R l'algebra affine di un gruppo di Barsotti-Tate G su k. In particolare, $R = \varprojlim R_n$, dove R_n è l'algebra affine di un gruppo finito G_n su k. Su R si ponga la topologia profinita, ovvero il limite inverso delle topologie discrete sui singoli quozienti R_n. Infine, si indichi con $\mathfrak{a}_n$, l'ideale di R tale che: $R/\mathfrak{a}_n \cong R_n$; si osservi che gli $\mathfrak{a}_n$ formano un sistema fondamentale di ideali aperti per la topologia profinita su R e si ha: $\mathfrak{a}_{n+1} \subsetneq \mathfrak{a}_n \ \forall n$.

Poichè R_n è un'algebra finita su k è ben definito il suo duale algebrico: $D_n = \mathrm{Hom}_{k\text{-mod}}(R_n, k)$, che diventa l'algebra affine di un gruppo su k, ponendo su di esso le operazioni definite per dualità a partire dalle operazioni di R_n. Precisamente, si definiscono

$$\mu_D: D_n \times D_n \to D_n, \quad \boldsymbol{P}_D: D_n \to D_n \otimes D_n, \ \rho_D: D_n \to D_n, \quad \varepsilon_D: D_n \to k,$$

ponendo:

$$\mu_D(\delta_1 \otimes \delta_2) \circ x = (\delta_1 \otimes \delta_2) \circ \boldsymbol{P}_R x\,, \qquad \boldsymbol{P}_D \delta \circ x_1 \otimes x_2 = \delta \circ \mu_R(x_1 \otimes x_2)\,,$$

$$\rho_D \delta \circ x = \delta \circ \rho_R x\,, \qquad \varepsilon_D \delta \circ 1_k = \delta \circ 1_R\,,$$

qualunque siano gli elementi: δ, δ_1, δ_2 in D_n ed x, x_1, x_2 in R_n. Indicheremo con $\widehat{G}_n$ il gruppo su k la cui algebra affine è D_n. Richiamiamo qui sotto la dimostrazione di un fatto generale sulla dualità (di Cartier) dei gruppi finiti, che generalizza l'usuale interpretazione del gruppo duale come gruppo dei caratteri. Osserviamo che la dimostrazione si può ripetere passo passo sostituendo alla base k un qualsiasi anello noetheriano.

1.1. PROPOSIZIONE. *Siano G_n un gruppo finito su k e $\boldsymbol{G}_m$ il gruppo moltiplicativo su k. Allora si ha l'isomorfismo di k-gruppi: $\widehat{G}_n \cong \mathcal{H}om(G_n, \boldsymbol{G}_m)$, ove $\mathcal{H}om(G_n, \boldsymbol{G}_m)(S) = \mathrm{Hom}_{S\text{-gp}}(G_{n,S}, \boldsymbol{G}_{m,S})$ per ogni k-algebra S.*

DIM. Sia $\alpha\colon D_n \to S$ un punto di $\widehat{G}_n(S)$. Allora, poichè D_n è un k-modulo di tipo finito, si ha:

$$\alpha \in \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(D_n, S) \subseteq \mathrm{Hom}_{k\text{-mod}}(D_n, S) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-mod}}(D_n, k) \otimes S \cong R_n \otimes S\,.$$

Dunque ad α corrisponde un punto su S del gruppo $\mathcal{H}om(G_n, \boldsymbol{G}_m)$ se, e solo se, α è invertibile in $R_{n,S} = R_n \otimes S$ e si ha: $\boldsymbol{P}\alpha = \alpha \otimes \alpha$. Ciò è equivalente al fatto che α è un omomorfismo di k algebre, perchè dalla relazione: $\mu_S(\alpha \otimes \alpha) = \alpha\mu_D$ si deduce che:

$$\mu_S[(\alpha \otimes \alpha)(\delta_1 \otimes \delta_2)] = \alpha \circ \mu_D(\delta_1 \otimes \delta_2) = \boldsymbol{P}_{R_s}\alpha \circ (\delta_1 \otimes \delta_2)\,,$$

qualunque siano δ_1, δ_2 in D_n. Inoltre, osservando che:

$$\varepsilon_{R_s}\alpha = \alpha(1_D) = 1_S \qquad \text{ed} \qquad \varepsilon_{R_s}\alpha = \mu_{R_s}(\rho_{R_s} \otimes 1)\boldsymbol{P}_{R_s}\alpha = \mu_{R_s}(\rho_{R_s}\alpha \otimes \alpha)\,,$$

se ne deduce che α è un elemento invertibile di $R_{n,S}$. La corrispondenza inversa è ovvia. CVD.

Si coinsideri ora l'algebra topologica R e si indichi con D il $\varinjlim D_n$, munito della topologia discreta. Vogliamo mostrare che le due algebre R e D sono in dualità topologica.

1.2. PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra. Allora si ha:*

$$R \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(D, k) \qquad \text{e} \qquad D \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{k\text{-}cont}}(\mathrm{R}, \mathrm{k})\,.$$

ove $\mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(-, k)$ indica l'insieme delle applicazioni k-lineari continue quando su k si ponga la topologia discreta.

DIM. Per quanto concerne il primo isomorfismo, si osservi che D è munita della topologia discreta e perciò si ha:

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(D, k) = \mathrm{Hom}_k(\varinjlim D_n, k) = \varprojlim \mathrm{Hom}_k(D_n, k) = \varprojlim R_n = R.$$

Per quanto concerne il secondo isomorfismo, se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(R, k)$, allora $\ker\varphi$ contiene uno degli $\mathfrak{a}_n$ e, quindi φ induce un elemento $\varphi_n \in \mathrm{Hom}_k(R_n, k)$. Poichè gli ideali $\mathfrak{a}_n$ sono contenuti l'uno nell'altro, resta così determinato un elemento del $\varinjlim \mathrm{Hom}_k(R_n, k) = D$ e la corrispondenza così costruita è chiaramente un isomorfismo. CVD

Si osservi che, anche quando R è il gruppo di Barsotti-Tate associato ad una varietà abeliana, l'algebra duale D non è l'algebra affine del gruppo di Barsotti-Tate associato alla varietà duale, ed in generale, non è l'algebra affine di un gruppo di Barsotti-Tate. Allo scopo di chiarire le relazioni esistenti tra la dualità delle varietà abeliane ed i gruppi di Barsotti-Tate ad esse associati e la dualità tra le algebre che li rappresentano, Barsotti ha introdotto una classe di algebre, da lui chiamate «bicampi», dotate di un naturale coprodotto, tra le quali si esprime più chiaramente la dualità. In particolare, il «bicampo» associato al duale $\widehat{G}$ di G può essere costruito sia a partire dall'algebra affine $\widehat{R}$ di $\widehat{G}$ che dall'algebra D, duale dell'algebra affine R di G.

Sia $\mathcal{R}^0$ il limite diretto: $\varinjlim (R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \ldots)$ dove il morfismo $[p_+]$ è l'applicazione indotta dalla moltiplicazione per p nel gruppo G. Su $\mathcal{R}^0$ si pone la topologia limite diretto delle topologie profinite sulle copie di R, ovvero la più fine topologia che renda continue tutte le freccie canoniche dalle copie di R verso il limite diretto. Diamo una descrizione esplicita di tale topologia, dovendone far uso nel seguito. Si considerino gli ideali $\mathfrak{a}_k^n = j_n(\mathfrak{a}_k)\mathcal{R}^0$, ove $j_n\colon R \to \mathcal{R}^0$ è il morfismo canonico dell'n-esimo termine della sequenza verso il limite diretto. Si osservi che si ha: $\mathfrak{a}_{k+r} \supseteq [p_+]^r(\mathfrak{a}_k)$ e quindi:

$$\mathfrak{a}_k^{n+r} \supseteq \mathfrak{a}_{n+r}^{k+r} = j_{n+r}(\mathfrak{a}_{k+r})\mathcal{R}^0 \supseteq j_{n+r}([p_+]^r \mathfrak{a}_k)\mathcal{R}^0 = j_n(\mathfrak{a}_k)\mathcal{R}^0 = \mathfrak{a}_k^n.$$

Un sistema fondamentale di intorni zero per la topologia limite diretto in $\mathcal{R}^0$ è quindi dato dagli ideali

$$\mathfrak{b}_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}_{k+n}^n \tag{1.3}$$

al variare di k tra gli interi non negativi. Lasciamo al lettore il facile compito di verificare che un omomorfismo $\varphi\colon \mathcal{R}^0 \to S$ è continuo rispetto alla topologia così definita se, e solo se, lo sono tutti gli omomorfismi composti: $\varphi \circ j_n$ al variare di n.

In generale, rispetto a tale topologia $\mathcal{R}^0$ non è completo; si indichi con $\mathcal{R}$ il suo completamento. Resta inoltre individuato un morfismo naturale $\tau\colon R \to \mathcal{R}$ componendo la freccia che manda il primo elemento della sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \ldots$ nel limite diretto $\mathcal{R}^0$ con l'inclusione di quest'ultimo nel completamento.

1.4 Definizione. Notazioni come sopra. Diremo che $\mathcal{R}$ dotata dell'omomorfismo naturale: $\tau\colon R \to \mathcal{R}$ è l'*algebra di Barsotti* associata al gruppo di Barsotti-Tate G. Anche l'algebra $\mathcal{R}$ rappresenta un gruppo sulla categoria delle k-algebre finite, che indicheremo con il simbolo $\boldsymbol{T}(G)$ e chiameremo *Spazio di Tate associato al gruppo di Barsotti-Tate* G. I punti del gruppo $\boldsymbol{T}(G)$ sono il limite inverso dei punti del gruppo G, rispetto alla moltiplicazione per p.

Si osservi che sia $\mathcal{R}$ che $\mathcal{R}^0$ rappresentano lo stesso funtore in gruppi nella categoria delle k-algebre finite, perchè ogni morfismo continuo da $\mathcal{R}^0$ verso un'algebra discreta si estende, in modo unico, al completamento $\mathcal{R}$.

Mostriamo ora come si possa costruire l'algebra di Barsotti associata al gruppo duale a partire dall'algebra duale D. Siano dunque R e D come in 1.2, e si consideri il limite inverso: $\mathcal{D} = \varprojlim (D \xleftarrow{[p_-]} D \xleftarrow{[p_-]} \ldots)$ dove il morfismo $[p_-]$ è l'applicazione indotta per trasposizione dalla freccia $[p_+]\colon R \to R$. L'algebra $\mathcal{D}$, dotata della topologia limite inverso è completa ed è dotata di un morfismo naturale: $\sigma\colon \mathcal{D} \to D$, ovvero la freccia che manda il limite inverso sul primo elemento della sequenza $D \xleftarrow{[p_-]} D \xleftarrow{[p_-]} \ldots$. Vi è un'applicazione bilineare non-degenere tra $\mathcal{R}^0$ e $\mathcal{D}$; infatti, in base alla Proposizione 1.2, si ha:

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(\mathcal{R}^0, k) = \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(\varinjlim R, k) =$$
$$= \varprojlim \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(R, k) = \varprojlim D = \mathcal{D}.$$

Se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(\mathcal{D}, k)$, considerando il suo nucleo, si vede che φ è completamente determinato da un morfismo continuo dal limite inverso di una sequenza *finita* di copie di D: $D \xleftarrow{[p_-]} D \xleftarrow{[p_-]} \ldots \xleftarrow{[p_-]} D$, e quindi da un elemento del

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(D, k) = \varinjlim R = \mathcal{R}^0.$$

La corrispondenza così costruita è chiaramente un isomorfismo tra $\mathcal{R}^0$ ed $\mathrm{Hom}_{k\text{-cont}}(\mathcal{D}, k)$.

Vogliamo mostrare che le algebre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$ sono «dello stesso tipo», ovvero che il limite inverso $\mathcal{D}$ può essere realizzato come l'algebra di Barsotti associata ad un gruppo profinito $\widehat{G}$, che è ancora un gruppo di Barsotti-Tate su k. Dunque, la dualità tra gruppi finiti si trasporta ad una «dualità» tra le torri associate ai gruppi G e $\widehat{G}$, e quest'ultimo è *il duale* del gruppo G.

L'algebra affine $R = \varprojlim R_n$ del gruppo G è limite inverso di k-algebre finite, ove le freccie $p_- : R_{n+1} \to R_n$, tutte suriettive, sono le proiezioni canoniche, ovvero le freccie indotte dalle inclusioni reciproche $i: G_n \to G_{n+1}$ dei sottogruppi finiti di p^n-torsione di G, al variare di n. La freccia $[p_+]: R \to R$, induce dei morfismi tra le algebre finite R_n, e precisamente, si ottengono le freccie $p_+ : R_n \to R_{n+1}$, tutte iniettive, indotte dalla moltiplicazione per p, $p: G_{n+1} \to G_n$ tra i sottogruppi finiti di G, al variare di n. In particolare osserviamo che l'applicazione composta ip è la freccia indotta dalla moltiplicazione per p nel gruppo finito G_{n+1} Possiamo quindi mettere in evidenza le relazioni esistenti tra le freccie testè descritte nel seguente diagramma commutativo 1.5. La prima riga di tale diagramma è stata illustrata nella descrizione della costruzione dell'algebra di Barsotti associata al gruppo G (cfr. Definizione 1.4). Passiamo ora a descrivere l'ultima colonna di tale diagramma. Si indichino con $\widehat{D}$ i limiti diretti delle successive righe del diagramma 1.5. Tali limiti diretti sono tutti isomorfi tra loro e sono dotati della topologia discreta che coincide con la topologia limite diretto. In tal modo si definisce una sequenza: $\widehat{D} \xleftarrow{[p_-]} \widehat{D} \xleftarrow{[p_-]} \ldots$ in cui indichiamo con il simbolo $[p_-]$ le freccie indotte tra i limiti diretti dalle freccie verticali del diagramma.

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "{[p_+]}"] & R \arrow[r, "{[p_+]}"] & R \arrow[r, "{[p_+]}"] & R \arrow[r, "{[p_+]}"] & \cdots\cdots\ \mathcal{R}^0 \arrow[r] & \mathcal{R} \\
\vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & & \vdots \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
R_{n+1} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & R_{n+2} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & R_{n+3} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & R_{n+4} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots\cdots & \hat{D} \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
R_n \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & R_{n+1} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & R_{n+2} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & R_{n+3} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots\cdots & \hat{D} \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
\vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & & \vdots \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
R_0 \arrow[r, "p_+"] & R_1 \arrow[r, "p_+"] & R_2 \arrow[r, "p_+"] & R_3 \arrow[r, "p_+"] & \cdots\cdots & \hat{D}
\end{tikzcd}
\tag{1.5}
$$

Vogliamo mostrare che, come l'algebra R è il limite inverso degli oggetti posti nella colonna sottostante del diagramma, lo stesso si può dire per il completamento $\mathcal{R}$ di $\mathcal{R}^0$; ovvero:

1.6 PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra*

$$\mathcal{R} = \varprojlim(\widehat{D} \xleftarrow{[p_-]} \widehat{D} \xleftarrow{[p_-]} \dots).$$

DIM. Sia $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ un elemento del limite inverso, ovvero sia $\alpha_i \in \widehat{D}$ ed $\alpha_i = [p_-]\alpha_{i+1}$, al variare di i tra gli interi non negativi. Mostriamo come si possa costruire a partire da α una successione di Cauchy di elementi di $\mathcal{R}^0$ e quindi un elemento di $\mathcal{R}$. Consideriamo l'elemento α_0 della sequenza; poiché tale elemento appartiene al limite diretto dell'ultima riga del diagramma (1.5), α_0 è immagine di un elemento, che indichiamo con lo stesso nome α_0, appartenente alla copia di R_n posta nell'ultima riga del diagramma per un opportuno valore di n. Indichiamo con a_0 un elemento dell'n-esima copia di R nella sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \dots$ che si riduca ad α_0.

Consideriamo ora l'elemento α_1 della sequenza. Poichè $\alpha_0 = [p_-]\alpha_1$, esiste un intero $k_1 \geqslant 0$ tale che α_1 appartenga alla copia di R_{n+k_1+1} posta nella penultima riga del diagramma, e si abbia: $p_+^{k_1}\alpha_0 = p_-\alpha_1$. Sia ora a_1 un elemento dell'$(n+k_1)$-esima copia di R nella sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \dots$, che si riduca ad α_1 e si osservi che, per costruzione, la differenza $a_1 - [p_+]^{k_1}a_0$ appartiene all'ideale $\alpha_{n+k_1}^{n+k_1} \subseteq \mathcal{b}_0$.

Consideriamo ora l'elemento α_2 della sequenza e ragioniamo analogamente. Poiché $\alpha_1 = [p_-]\alpha_2$, esiste un intero $k_2 \geqslant 0$ tale che α_2 appartenga alla copia di $R_{n+k_1+k_2+2}$ posta nella terzultima riga del diagramma, e si abbia: $p_+^{k_2}\alpha_1 = p_-\alpha_2$. Sia a_2 un elemento dell'$(n+k_1+k_2)$-esima copia di R nella sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \dots$, che si riduca ad α_2 e si osservi che deve aversi:

$$a_2 \equiv [p_+]^{k_2}a_1 \bmod \alpha_{n+k_1+k_2+1}^{n+k_1+k_2} \subseteq \mathcal{b}_1.$$

È chiaro che, proseguendo in questo modo, si costruisce una successione di Cauchy $a_0, a_1, \dots$ in $\mathcal{R}^0$, e si determina così un elemento di $\mathcal{R}$.

Viceversa, sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy di elementi di $\mathcal{R}^0$ e mostriamo che, a partire da una sottosuccessione della successione data, si può costruire un elemento del limite inverso $\varprojlim (\hat{D} \xleftarrow{[p_-]} \hat{D} \xleftarrow{[p_-]} \dots)$. Poichè la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, fissato comunque un intero $j \geqslant 0$, esiste un intero n_j tale che:

$$x_n \equiv x_m \bmod \mathscr{b}_j \qquad \text{per ogni } n,\ m \geqslant n_j .$$

Dato un rappresentante di x_{n_0} nell'n-esima copia di R nella sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \dots$, indichiamo con ξ_0 la sua immagine nella copia di R_n posta nell'ultima riga del diagramma (1.5).

Si consideri ora un intero non negativo h_1 tale che vi sia un rappresentante di x_{n_1} nell'$(n + h_1)$-esima copia di R nella sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \dots$, ed indichiamo con ξ_1 la sua immagine nella copia di R_{n+h_1+1} posta nella penultima riga del diagramma. Per l'ipotesi precedente, si ha che $x_1 - [p_+]^{h_1} x_0$ appartiene ad $\mathfrak{a}_{n+h_1}^{n+h_1} \subseteq \mathscr{b}_0$. Da ciò si deduce che $p_+^{h_1} \xi_0 = p_- \xi_1$. Indicando con ξ_0 e ξ_1 le immagini nei limiti diretti delle righe del diagramma 1.5 degli elementi delle algebre finite aventi lo stesso nome, si ha $\xi_0 = p_- \xi_1$.

Analogamente, si consideri un intero non negativo h_2 per cui vi sia un rappresentante di x_{n_2} nell'$(n + h_1 + h_2)$-esima copia di R nella sequenza $R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \dots$, ed indichiamo con ξ_2 la sua immagine nella copia di $R_{n+h_1+h_2+2}$ posta nella terzultima riga del diagramma 1.5. Sia ancora ξ_2 la sua immagine nel limite diretto $\hat{D}$ di tale riga. Per l'ipotesi precedente, si ha che $x_2 - [p_+]^{h_2} x_1$ appartiene ad $\mathfrak{a}_{n+h_1+h_2+1}^{n+h_1+h_2} \subseteq \mathscr{b}_1$ e quindi: $p_+^{h_2} \xi_1 = p_- \xi_2$. Se indichiamo ancora con ξ_2 l'immagine di $\xi_2 \in R_{n+h_1+h_2+2}$ nel limite diretto $\hat{D}$ della terzultima riga del diagramma (1.5), si ha $\xi_1 = p_- \xi_2$, ed è chiaro quindi come si prosegue nel costruire un elemento del limite inverso $\varprojlim (\hat{D} \xleftarrow{[p_-]} \hat{D} \xleftarrow{[p_-]} \dots)$.

È chiaro infine che le corrispondenze così costruite sono l'una l'inversa dell'altra. CVD

Se si dualizza il diagramma (1.5), si ottiene un diagramma analogo in cui gli oggetti sono i vari D_n e le righe del diagramma sono scambiate con le colonne in quanto tutte le freccie vengono rovesciate dalla dualità. Tracciamo quindi il diagramma 1.7 che così si ottiene, ove indichiamo con p_+ la trasposta dell'applicazione $p_- : R_{n+1} \to R_n$ e con p_- la trasposta dell'applicazione $p_+ : R_n \to R_{n+1}$, al variare di n tra gli interi non negativi. Come nel caso del diagramma 1.5, gli elementi della prima riga sono i limiti inversi delle colonne sottostanti e gli elementi dell'ultima colonna (con l'eccezione di $\mathscr{D}$) sono i limiti diretti delle righe che le precedono; ovvero D è l'algebra descritta nella Proposizione 1.2.

$$
(1.7)\qquad
\begin{tikzcd}
\hat{R} \arrow[r, "{[p_+]}"] & \hat{R} \arrow[r, "{[p_+]}"] & \hat{R} \arrow[r, "{[p_+]}"] & \hat{R} \arrow[r, "{[p_+]}"] & \cdots\cdots & \mathcal{D}^0 \to \mathcal{D} \\
\vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & & \vdots \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
D_{n+1} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D_{n+2} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D_{n+3} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D_{n+4} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots\cdots\cdots & D \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
D_n \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D_{n+1} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D_{n+2} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & D_{n+3} \arrow[r, "p_+"] \arrow[d, "p_-"'] & \cdots\cdots\cdots & D \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
\vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & \vdots \arrow[d, "p_-"'] & & \vdots \arrow[d, "{[p_-]}"] \\
D_0 \arrow[r, "p_+"] & D_1 \arrow[r, "p_+"] & D_2 \arrow[r, "p_+"] & D_3 \arrow[r, "p_+"] & \cdots\cdots\cdots & D.
\end{tikzcd}
$$

È chiaro che i limiti inversi $\hat{R}$ delle colonne del diagramma sono tutti isomorfi tra loro; inoltre, $\hat{R}$ è l'algebra affine di un gruppo di Barsotti-Tate su k, in quanto tutti i D_n sono gruppi di p^n-torsione della stessa altezza ed i morfismi p_- sono suriettivi, in quanto trasposti di morfismi iniettivi. Possiamo quindi dare la seguente:

1.8. Definizione. Il gruppo di Barsotti-Tate $\hat{G}$ definito dall'algebra affine $\hat{R}$ è detto il *duale* del gruppo G.

Non ci attardiamo a descrivere lo Spazio di Tate associato al duale, o ad affermare l'esistenza di un'applicazione bilineare non degenere tra $\mathcal{D}^0$ ed $\mathcal{R}$ trattandosi di verifiche elementari analoghe a quelle già descritte in precedenza. Vogliamo solo ricordare un'importante proprietà delle algebre di Barsotti, la cui dimostrazione è contenuta nei Lemmi 4.11 e 4.16 di [MA].

1.9. Proposizione. *Sia $\mathcal{R}$ dotata dell'omomorfismo naturale: $\tau: R \to \mathcal{R}$ l'algebra di Barsotti associata al gruppo di Barsotti-Tate G e sia $\mathcal{R}'$, dotata dell'omomorfismo naturale: $\tau': R' \to \mathcal{R}'$, l'algebra di Barsotti associata al gruppo di Barsotti-Tate G'. Allora $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ sono isomorfe come bialgebre se, e solo se, R ed R' sono isogene, ovvero se, e solo se, i gruppi* G *e G' sono isogeni.*

2. Interpretazione funzionale in caratteristica positiva.

Cominciamo con l'esporre un esempio della dualità descritta e delle sue conseguenze nel caso di un campo di base k, di caratteristica positiva. Da questo momento, fino a tutto il § 5 compreso, supporremo che il campo k sia algebricamente chiuso. Indichiamo con A e K rispettivamente, l'anello dei vettori di Witt infiniti su k, $A = W(k)$, ed il suo campo dei quozienti: $K = \mathrm{Frac}\, A = \mathbf{biv}\, k$. Sia dunque G un gruppo di Barsotti-Tate étale su k e sia R la sua algebra affine. Vogliamo dare una rappresentazione «funzionale» delle algebre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$, descritte nel numero precedente e della dualità esistente tra queste; nel numero successivo ci occuperemo di come tale dualità si possa trasportare ai bivettori costruiti su tali anelli; ciò è già stato esposto, con alcune modifiche e con dovizia di dettagli, nella tesi di F. Baldassarri [BA], ma viene riportato qui per omogeneità di esposizione e di notazioni.

2.1. In questa sezione diamo una descrizione «funzionale» delle algebre R e D e della dualità che li lega nel senso del § 1 precisamente dimostreremo la seguente:

2.1.1. PROPOSIZIONE. *Siano G un gruppo di Barsotti-Tate étale su k ed R la sua algebra affine; sia inoltre D l'anello descritto nella* Proposizione 1.2. *Allora*:

a) possiamo identificare R con l'algebra delle funzioni (insiemistiche) da $G(k)$ su k, dotato della topologia della convergenza puntuale.

b) Gli elementi di D vengono così identificati con misure (numerabilmente additive) a valori in k, definite su tutti i sottoinsiemi di $G(k)$.

c) Rispetto a tali identificazioni, la dualità tra R e D coincide con l'integrale su tutto $G(k)$ di una funzione contro una misura.

DIM. (a) È ben noto che R è isomorfo al prodotto di tante copie di k (algebricamente chiuso), quanti sono i punti di $G(k)$; dunque è naturale identificare R con l'algebra delle funzioni (insiemistiche) da $G(k)$ su k. Indicando con $G_n = \ker p^n$ il sottogruppo di G formato dai punti di p^n-torsione, possiamo identificare l'ideale $\mathfrak{a}_n$ di R con l'ideale delle funzioni su $G(k)$ ed a valori in k, che si annullano sul sottogruppo finito $G_n(k)$, il che giustifica l'asserto sulla topologia di R. Notiamo che, ponendo su $G(k)$ e su k la topologia discreta, gli elementi di R sono ovviamente funzioni continue.

Introducendo delle notazioni che ci saranno utili nel seguito, possiamo quindi scrivere gli elementi di R come combinazioni lineari infinite, a coefficientii in k di una famiglia di idempotenti, a due a due ortogonali: $(e_P)_{P \in G(k)}$ ove e_p è la funzione caratteristica del punto $P \in G(k)$:

$$e_P(X) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \neq P, \\ 1 & \text{se } X = P; \end{cases}$$

in tal modo una funzione $f\colon G(k) \to k$ si identifica con la somma:

$$f = \sum_{X \in G(k)} f(X) e_X. \tag{2.1.2}$$

In particolare il prodotto ed il coprodotto sono quelli naturali di uno spazio di funzioni su un gruppo astratto, ovvero:

$$e_P e_Q = \delta_{PQ} e_P \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P}_R(e_P) = \sum_{X \in G(k)} e_X \otimes e_{P-X}. \tag{2.1.3}$$

Da ciò si deducono inoltre il Frobenius ed il Verschiebung di R, ovvero:

$$F_R e_P = e_P \quad \text{e} \quad V_R e_P = \sum_{pX = P} e_X. \tag{2.1.4}$$

Ovviamente, l'ideale $\mathfrak{a}_n$ è generato in modo analogo ad R dalle funzioni caratteristiche e_P, ove $P \notin G_n(k)$.

(b) In base alla Proposizione 1.2, possiamo pensare a D come allo spazio vettoriale su k, generato dalla base $(\partial_P)_{P \in G(k)}$, ove $\partial_P \circ e_Q = \delta_{PQ}$ (δ_{PQ} è il simbolo di Kronecker). Il prodotto ed il coprodotto di D si ottengono per dualità dalle operazioni di R e dunque si ha:

$$\partial_P \partial_Q = \partial_{P+Q} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{P}_D(\partial_P) = \partial_P \otimes \partial_P. \tag{2.1.5}$$

Da ciò si deducono inoltre il Frobenius ed il Verschiebung di D, ovvero:

$$F_D \partial_X = \partial_X^p = \partial_{pX} \quad \text{e} \quad V_D \partial_X = \partial_X. \tag{2.1.6}$$

Si osservi che, in base alle definizioni date, se $f \in R$, allora si ha:

$$\partial_P \circ f = \partial_P \circ \sum_{X \in G(k)} f(X) e_X = \sum_{X \in G(k)} f(X)(\partial_P \circ e_X) = f(P), \tag{2.1.7}$$

e ciò significa che l'elemento $\partial_P \in D$ può essere identificato con la misura di Dirac su $G(k)$ centrata in P. Dunque, gli elementi di D in quanto combinazioni lineari finite, a coefficienti in k, delle misure di Dirac ∂_P, sono misure (numerabilmente additive) a valori in k, definite su tutti i sottoinsiemi di $G(k)$, ovvero su tutti gli aperti, visto che $G(k)$ ha la topologia discreta. In particolare, la sottoalgebra di D, generata liberamente dai ∂_P con $P \in G_n(k)$, sarà identificata con l'immagine di D_n in D tramite l'omomorfismo canonico.

(c) Nelle notazioni precedenti, la dualità tra R e D è suscettibile di una scrittura più raffinata, ovvero: dati $\mu \in D$ ed $f \in R$, ove: $\mu = \sum_{Y \in G(k)} c_Y \partial_Y$ ed $f = \sum_{X \in G(k)} f(X) e_X$, si ha:

$$\mu \circ f = \sum_{Y \in G(k)} c_Y \partial_Y \circ \sum_{X \in G(k)} f(X) e_X = \tag{2.1.8}$$

$$= \sum_{X,Y \in G(k)} c_Y f(X)(\partial_Y \circ e_X) = \sum_{X \in G(k)} c_X f(X) = \int_{G(k)} f d\mu .$$

E si osservi che la somma che definisce l'integrale è una somma finita, perchè i coefficienti c_Y sono diversi da zero solo su un numero finito di punti di $G(k)$. CVD

2.2. Per poter passare ad un'analoga interpretazione delle algebre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$ ci è utile avere un'espressione esplicita delle freccie p_+ e p_- che compaiono nei diagrammi 1.5 e 1.7. Cominciamo con le freccie tra gli R_n; ovvero:

$$p_+ : R_n \to R_{n+1} \quad \text{e} \quad p_- : R_{n+1} \to R_n ,$$

ove, in base alle definizioni, si ha:

$$p_+ e_P = \sum_{pX=P} e_X \quad \text{e} \quad p_- e_P = \begin{cases} e_P & \text{se } P \in G_n(k), \\ 0 & \text{altrimenti}. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Per dualità si ottengono le freccie tra i D_n:

$$p_+ : D_n \to D_{n+1} \quad \text{e} \quad p_- : D_{n+1} \to D_n ,$$

ove

$$p_+ \partial_Y = \partial_Y \quad \text{e} \quad p_- \partial_Y = \partial_{pY} . \tag{2.2.2}$$

Le relazioni fondamentali di dualità tra le varie freccie sono:

$$p_- \mu \circ f = \mu \circ p_+ f \quad \text{e} \quad p_+ \mu \circ f = \mu \circ p_- f ,$$

qualunque siano $\mu \in D$ ed $f \in R$.

Per poter dare una descrizione funzionale delle algebre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$ abbiamo bisogno di introdurre lo *Spazio di Tate* associato al gruppo G, calcolato su k, ovvero il limite inverso:

$$(2.2.3)\quad T = T(G)(k) = \varprojlim \left(G(k) \xleftarrow{p} G(k) \xleftarrow{p} \ldots\right) \quad \text{(cfr. Definizione 1.4)}.$$

È facile verificare che T è un $\mathbb{Q}_p$-spazio vettoriale, la cui dimensione è *l'altezza* del gruppo di Barsotti- Tate (étale) G.

Sia π: $T \to G(k)$ la proiezione sul primo elemento della sequenza; si verifica facilmente che il nucleo del morfismo π è un sottogruppo Λ di T ed, in realtà, uno $\mathbb{Z}_p$-modulo, e si ha: $T = \Lambda \underset{\mathbb{Z}_p}{\otimes} \mathbb{Q}_p$. In particolare, i punti di T sono successioni di punti di $G(k)$ e precisamente scriveremo $x = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$, ove $X_n \in G(k)$ e $pX_{n+1} = X_n$ per indicare un punto di T. I punti di Λ sono tutti e soli i punti di T per cui $X_0 = 0 \in G(k)$. T è un $\mathbb{Q}_p$-spazio vettoriale, dotato della topologia p-adica, ovvero della topologia lineare per cui un sistema fondamentale di intorni dello zero è dato dai sottomoduli $p^n\Lambda$, al variare di n in $\mathbb{N}$. Si osservi che si può quindi identificare l'n-esima copia di $G(k)$ nella sequenza che definisce il limite inverso T con il quoziente $T/p^n\Lambda$, tramite l'applicazione:

$$(2.2.4)\quad \begin{aligned} \pi_n\colon T &\to G(k), \\ x &\to X_n. \end{aligned}$$

Possiamo quindi enunciare la seguente:

2.2.5. Proposizione. *Il limite diretto* $\mathcal{R}^0 = \varinjlim \left(R \xrightarrow{[p_+]} R \xrightarrow{[p_+]} \ldots\right)$ *coincide con l'anello delle funzioni uniformemente continue su T ed a valori in k, dotato della topologia delle convergenza uniforme sui compatti di T. Ne consegue che il suo completamento $\mathcal{R}$ è l'anello di tutte le funzioni continue su T ed a valori in k, dotato della topologia detta.*

Dim. È chiaro che l'n-esima copia di R nella sequenza che definisce il limite diretto $\mathcal{R}^0$, può essere identificata con l'algebra delle funzioni sull'n-esima copia di $G(k)$ nella sequenza che definisce T, ovvero con le funzioni sul quoziente $T/p^n\Lambda$, ovvero con le funzioni su T, che sono $p^n\Lambda$-periodiche. Dunque, pensando k dotato della topologia discreta e T dotato della topologia p-adica, gli elementi dell'algebra $\mathcal{R}^0$ si possono identificare con le funzioni uniformemente continue da T su k.

Consideriamo ora la topologia di $\mathcal{R}^0$, ovvero la topologia limite diretto delle topologie profinite sulle copie di R, e cerchiamo di darne una descrizione esplicita seguendo le indicazioni del numero precedente. Si considerino gli ideali $\mathfrak{a}_k^n = j_n(\mathfrak{a}_k)\mathcal{R}^0$, ove $R \to \mathcal{R}^0$ è il morfismo canonico dell'n-esimo termine della sequenza verso il limite diretto; per le identificazioni fatte, $j_n(\mathfrak{a}_k)\mathcal{R}^0$ coincide con l'ideale delle funzioni su T, $p^n\Lambda$-

periodiche e nulle su $p^{n-k}\Lambda$. In particolare, gli ideali

$$\mathscr{b}_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}_{k+n}^n \qquad \text{con } k \geq 0\,,$$

che formano un sistema fondamentale di intorni di zero per la topologia limite diretto su $\mathscr{R}^0$, sono gli ideali delle funzioni uniformemente continue, nulle su $p^{-k}\Lambda$. È immediato osservare che i sotto-$\mathbb{Z}_p$-moduli $p^{-k}\Lambda$, formano una famiglia di compatti (aperti e chiusi) di T che invade tutto lo spazio ed ogni compatto di T è contenuto in qualcuno di questi sottomoduli; dunque la topologia limite diretto coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di T; ne consegue che il completamento $\mathscr{R}$ di $\mathscr{R}^0$ è formato da tutte e sole le funzioni continue da T su k, rispetto alle topologie date. Infatti, se f è limite uniforme sui compatti di una successione di funzioni (uniformemente) continue, allora f è certamente una funzione continua; viceversa, data una funzione continua $f\colon T \to k$, si consideri la successione di funzioni $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ così definite:

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in p^{-k}\Lambda\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

È chiaro che ognuna delle f_k è uniformemente continua su T e che f è il limite di questa successione nella topologia della convergenza uniforme sui compatti. CVD

Passiamo ora alla descrizione dell'algebra $\mathscr{D}$, di $\mathscr{D}^0$ e di $\hat{R}$. Facciamo precedere l'enunciato da due definizioni.

2.2.6. Definizione. Siano T e Λ come sopra ed $x \in T$. Il sottoinsieme $x + p^r\Lambda$ di T è detto la *sfera (aperta) di centro x e raggio p^{-r}.*

È immediato verificare che ogni elemento di $x + p^r\Lambda$ può essere preso come centro della sfera e che ogni sfera di T è unione finita di sfere di raggio ≤ 1.

2.2.7. Definizione. Sia X un sottoinsieme di T. Diremo che una misura μ ha il *supporto contenuto in X* se $\mu(Y) = 0$ per ogni sottoinsieme misurabile Y di T contenuto nel complementare di X.

2.2.8. Proposizione. *Il limite inverso* $\mathscr{D} = \varprojlim (D \xleftarrow{[p_-]} D \xleftarrow{[p_-]} \ldots)$ *può essere identificato con l'anello delle misure a valori in k, definite sull'algebra di Boole generata dalle unioni (al più numerabili) di sfere aperte di ugual raggio in T. Il sottoanello $\hat{R}$ è costituito dalle misure il cui supporto è contenuto in Λ e quindi il limite diretto $\mathscr{D}^0$ è l'algebra* *delle misure di $\mathcal{D}$ il cui supporto sia contenuto in qualche compatto di T. Infine, l'ideale aperto $\mathfrak{b}_k$ di $\mathcal{D}$ è costituito dalle misure nulle sulle sfere di raggio $\geqslant p^{-k}$.*

DIM. Facciamo vedere come un elemento $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ di $\mathcal{D}$ definisca in modo inequivoco una misura sulle sfere aperte di T. A tale scopo, è sufficiente mostrare come si calcola la misura μ di una sfera di raggio $\leqslant 1$; sia dunque $x + p^r\Lambda$ una tale sfera ($x = (X_0, X_1, X_2, \dots)$ ed $r \geqslant 0$); e si ponga:

$$\mu(x + p^r\Lambda) = \mu_r(\pi_r x) = \mu_r(X_r), \tag{2.2.9}$$

ove π_r è l'applicazione descritta in (2.2.4). Se $z_1, \dots, z_s$ sono dei rappresentanti in T delle classi di $p^r\Lambda/p^{r+1}\Lambda$, allora si ha:

$$x + p^r\Lambda = \bigcup_{j=1}^{s} x + z_j + p^{r+1}\Lambda\,;$$

e quindi la definizione di μ ha senso se vale l'uguaglianza:

$$\mu(x + p^r\Lambda) = \sum_{j=1}^{s} \mu(x + z_j + p^{r+1}\Lambda)\,;$$

ovvero, con ovvio significato dei simboli:

$$\mu_r(X_r) = \sum_{j=1}^{s} \mu_{r+1}(X_{r+1} + Z_{j,\,r+1})\,.$$

Tale uguaglianza si deduce osservando che, dalla definizione della freccia p_- data in 2.2.2, si ha:

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_{r+1}(X_{r+1} + Z_{j,\,r+1}) = \sum_{pQ = X_r} \mu_{r+1}(Q) = [p_-]\mu_{r+1}(X_r) = \mu_r(X_r),$$

ove l'ultima uguaglianza discende dalla definizione stessa del limite inverso $\mathcal{D}$. Se ne deduce immediatamente che la misura così definita si estende dalle sfere aperte agli elementi dell'algebra di Boole descritta nell'enunciato.

Vogliamo caratterizzare l'algebra affine $\widehat{R}$ del gruppo duale ed il limite diretto $\mathcal{D}^0$ come sottooggetti dell'algebra di misure $\mathcal{D}$. La costruzione dell'algebra

$$\widehat{R} = \varprojlim (D_0 \xleftarrow{[p_-]} D_1 \xleftarrow{[p_-]} \dots)$$

è descritta nel diagramma (1.7); si tratta quindi di interpretare in termini di misure gli oggetti coinvolti nella costruzione. Cominciamo dalla prima colonna del diagramma. L'algebra D_n è costituita dalle misure sul gruppo finito $G_n(k)$ e la freccia p_- è descritta in 2.2.2, ovvero: $p_- \partial_Y = \partial_{pY}$. Se μ_n è un elemento dell'algebra D_n posta nella prima colonna del diagramma (1.7), la sua immagine nel limite diretto D della riga è una misura μ_n su $T/p^n\Lambda \cong G(k)$, che assume valore nullo su tutti i sottoinsiemi del complementare del sottogruppo dei punti di p^n-torsione, ovvero μ_n ha supporto in $\Lambda/p^n\Lambda$. Dunque un elemento $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ del limite inverso $\widehat{R}$ definisce una misura su T, a supporto in Λ, nel senso della Definizione 2.2.7.

Analogamente, un elemento della k-esima copia di $\widehat{R}$ nel limite diretto $\mathcal{D}^0 = \varinjlim (\widehat{R} \xrightarrow{[p_+]} \widehat{R} \xrightarrow{[p_+]} \dots)$, definisce una misura a supporto contenuto in $p^{-k}\Lambda$. In base a quanto osservato sulla famiglia di compatti $p^k\Lambda$, al variare di k in $\mathbb{Z}$, (cfr. la dimostrazione della Proposizione 2.2.5) possiamo quindi affermare che $\mathcal{D}^0$ è la sottoalgebra di $\mathcal{D}$, costituita dalle misure il cui supporto è contenuto in qualche compatto di T.

Per quanto concerne la topologia di $\widehat{R}$ e di $\mathcal{D}^0$; l'ideale $\widehat{\mathfrak{a}}_n^k$ descritto nel § 1 corrisponde all'insieme delle misure $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ tali che $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$, ovvero $\widehat{\mathfrak{a}}_n^k$ è l'ideale formato da tutte le misure in $\mathcal{D}$, a supporto in $p^{-k}\Lambda$ e nulle sulle sfere di raggio $\geq p^{k-n}$. Ne consegue che l'ideale $\mathfrak{b}_k$ di $\mathcal{D}^0$, definito in 1.3, è costituito dalle misure a supporto compatto su T, nulle sulle sfere di raggio $\geq p^{-k}$; e la sua estensione a $\mathcal{D}$, che indicheremo con lo stesso simbolo $\mathfrak{b}_k$, è quindi costituita da tutte le misure su T, nulle sulle sfere di raggio $\geq p^{-k}$. CVD

Vi è un'espressione analoga alla (2.1.8) per la dualità tra $\mathcal{R}^0$ e $\mathcal{D}$, ovvero, se $f \in \mathcal{R}^0$ e $\mu \in \mathcal{D}$, si ha che f è una funzione periodica di periodo $p^r\Lambda$ per qualche r, e dunque discende ad una funzione sul quoziente $T/p^r\Lambda \cong G(k)$, che indichiamo ancora con f. È chiaro allora che l'accoppiamento tra f e μ è uguale all'accoppiamento tra f e μ_r, nel senso di 2.1.8; in particolare si può scrivere:

$$f \circ \mu = \int_T f d\mu = \sum_x f(x)\mu(x + p^r\Lambda), \tag{2.2.10}$$

ove l'indice x della somma varia in un sistema di rappresentanti degli elementi del quoziente $T/p^r\Lambda$. Tramite questo accoppiamento si può definire un'azione naturale degli elementi di $\mathcal{D}$ sulle funzioni di $\mathcal{R}^0$, che corrisponde alla usuale definizione di trasformata della funzione $f \in \mathcal{R}^0$ tramite la misura $\mu \in \mathcal{D}$; ovvero:

$$[\mu f](x) = \int_T f(x+y)\, d\mu_y, \tag{2.2.11}$$

ove il suffisso «y» posto alla misura μ sta ad indicare che y è la variabile di integrazione.

In particolare osserviamo che, rispetto alla dualità descritta in (2.2.10), l'ideale $\mathcal{b}_k \subseteq \mathcal{D}$ è l'ortogonale del sottoanello di $\mathcal{R}^0$ formato dalle funzioni $p^k\Lambda$-periodiche. È chiaro che tramite l'integrale si può definire analogamente la dualità tra $\mathcal{D}^0$ ed $\mathcal{R}$ ovvero tra le misure a supporto compatto e tutte le funzioni continue ed analogamente a (2.1.11), si definisce un'azione di $\mathcal{D}^0$ su $\mathcal{R}$.

2.3. In questa sezione diamo una dimostrazione del fatto ben noto che $\widehat{R}$ è l'algebra affine di un gruppo di Barsotti-Tate di tipo moltiplicativo. Precisiamo le notazioni nel modo seguente. Siano

$$x_1 = (0, X_{1,1}, X_{1,2}, \dots), \dots, x_f = (0, X_{f,1}, X_{f,2}, \dots)$$

dei generatori liberi dello $\mathbb{Z}_p$-modulo Λ, ovvero dei punti di T tali che $X_{1,1}, \dots, X_{f,1}$ siano generatori del gruppo $G_l(k) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^f$. Si considerino in $\widehat{R}$ le misure di Dirac $\partial_{x_0}, \dots, \partial_{x_f}$ e gli elementi $y_j = \partial_{x_j} - 1$, per $j = 1, \dots, f$. Si osservi che da $\boldsymbol{P}(\partial_x) = \partial_x \otimes \partial_x$, per ogni x in T, si deduce:

$$\boldsymbol{P}(y_j) = y_j \otimes 1 + 1 \otimes y_j + y_j \otimes y_j, \tag{2.3.1}$$

per $j = 1, \dots, f$. Vogliamo quindi dimostrare che si ha un isomorfismo naturale:

2.3.2 Proposizione. *Notazioni come sopra. Allora:*

$$\widehat{R} \cong k[\![y_1, \dots, y_f]\!]$$

Dim. Si tratta quindi di dimostrare che ogni serie di potenze:

$$\alpha = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^f} a_\nu y^\nu .$$

converge in $\widehat{R}$ e che ogni elemento di tale anello si può scrivere (in modo unico) come serie di potenze nelle $y_1, \dots, y_f$. Poichè la topologia di $\widehat{R}$ è lineare, per verificare la convergenza delle serie è sufficiente mostrare che

$$\lim_{n \to \infty} y_j^n = 0 ,$$

per $j = 1, \dots, f$. Si tratta quindi di far vedere che, fissato un numero intero positivo r, la misura $(\partial_{x_j} - 1)^n$, con n sufficientemente elevato, si annulla su tutte le sfere di raggio $\geqslant p^{-r}$. Andiamo quindi a calcolare

$$(\partial_{x_j} - 1)^n (y + p^r \Lambda). \tag{2.3.3}$$

Poichè

$$(\partial_{x_j} - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \partial_{kx_j},$$

la (2.3.3) è certamente uguale a zero se y non è congruente a qualcuno dei kx_j, modulo $p^r \Lambda$. Quindi, a meno di cambiare il centro della sfera supponiamo che si abbia $y = hx_j$, ovviamente con $h < p^r$. Se ne deduce che:

$$(\partial_{x_j} - 1)^n (hx_j + p^r \Lambda) = \sum_{i=0}^{[p^{-r}(n-h)]} (-1)^{n-h-ip^r} \binom{n}{h + ip^r},$$

ove le parentesi quadre nell'estremo superiore della somma stanno ad indicare che si deve prendere la parte intera del numero tra parentesi. Possiamo ottenere un'espressione più maneggevole della somma scritta sopra grazie ad una osservazione elementare sui coefficienti binomiali in caratteristica $p > 0$. Sia dunque $n = a + mp^r$, con $0 \leqslant a < p^r$. Poichè in caratteristica positiva si ha:

$$(X - 1)^{a+mp^r} = (X - 1)^a (X^{p^r} - 1)^m,$$

se ne deduce che:

$$\binom{n}{h + ip^r} = \binom{a + mp^r}{h + ip^r} = \binom{a}{h}\binom{m}{i},$$

ove l'ultimo membro dell'uguaglianza è da porsi uguale a zero se $h > n$ [cf. Appendice 2]. Quindi:

$$\sum_{i=0}^{[p^{-r}(n-h)]} (-1)^{n-h-ip^r} \binom{n}{h + ip^r} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^{a-h+(m-i)p^r} \binom{a}{h}\binom{m}{i} =$$

$$= (-1)^{a-h} \binom{a}{h} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{m}{i}.$$

Dunque, se $m > 0$, ovvero se $n \geqslant p^r$, allora l'ultima somma scritta sopra è uguale a zero. Possiamo quindi concludere osservando che:

$$(2.3.4)\qquad (\partial_{x_j}-1)^n(hx_j+p^r\Lambda)=\begin{cases}(-1)^{n-h}\binom{n}{h} & \text{se } 0\leq h\leq n<p^r,\\ 0 & \text{altrimenti},\end{cases}$$

ovvero se $n \geq p^r$, allora $(\partial_{x_j}-1)^n$ è una misura nulla sulle sfere di raggio $\geq p^{-r}$, che è quanto volevamo dimostrare.

Per concludere la dimostrazione di § 2.3.2 dobbiamo mostrare che ogni misura in $\widehat{R}$ è somma di una serie di potenze nelle $y_1, \dots, y_f$. Sia $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$ una misura in $\widehat{R}$, ovvero una misura a supporto in Λ; in base alla costruzione della misura μ, sappiamo che il suo valore sulle sfere di raggio $\geq p^{-1}$ è completamente determinato dalla misura μ_1 su $G_1(k)$, ovvero dai p^f-valori

$$\mu(a_1x_1+\dots+a_fx_f+p\Lambda)=\mu_1(a_1X_{1,1}+\dots+a_fX_{f,1}),$$

ove $a_1, \dots, a_f$ variano in $\mathbb{Z}$ e $0 \leq a_j \leq p-1$. Ciò significa che la misura μ è congruente, modulo $\mathcal{B}_1$, alla misura

$$\sum_{a_1,\dots a_f}\mu_1(a_1X_{1,1}+\dots+a_fX_{f,1})\,\partial_{x_1}^{a_1}\dots\partial_{x_f}^{a_f}.$$

Si tratta quindi di vedere se è possibile determinare i p^f coefficienti c_ν della somma

$$\sum_{0\leq\nu_j\leq p-1}c_\nu y^\nu=\sum_{0\leq\nu_j\leq p-1}c_\nu(\partial_{x_1}-1)^{\nu_1}\dots(\partial_{x_f}-1)^{\nu_f},$$

di modo che le due misure coincidano, ove $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_f) \in \mathbb{N}^f$. Sviluppando le potenze dei binomi, si ottengono p^f-equazioni

$$\mu_1(a_1X_{1,1}+\dots+a_fX_{f,1})=\sum_{a_j\leq\nu_j}(-1)^{(\nu 1-a1)\dots(\nu f-af)}c_\nu\binom{\nu_1}{a_1}\dots\binom{\nu_f}{a_f},$$

al variare di $a_1, \dots, a_f$, che permettono di determinare i coefficienti c_ν, e quindi di approssimare la misura μ, modulo $\mathcal{B}_1$, con una serie nelle $y_1, \dots, y_f$. È chiaro poi come si deve procedere per le successive approssimazioni della misura μ. Infatti, la misura μ è congruente, modulo $\mathcal{B}_2$, alla misura

$$\sum_{a_1,\dots,a_f}\mu_2(a_1X_{1,2}+\dots+a_fX_{f,2})\,\partial_{x_1}^{a_1}\dots\partial_{x_f}^{a_f},$$

ove $0 \leq a_j \leq p^2 - 1$. Si tratta quindi di determinare i coefficienti c_ν della somma

$$\sum_{0 \leq \nu_j < p^2} c_\nu y^\nu = \sum_{0 \leq \nu_j < p^2} c_\nu (\partial_{x_1} - 1)^{\nu_1} \dots (\partial_{x_f} - 1)^{\nu_f},$$

di modo che le due misure coincidano. Ne risulta un sistema lineare analogo al precedente. Lasciamo al lettore il compito di verificare che i coefficienti c_ν, con $0 \leq \nu_j < p$, determinati in questo modo, sono uguali a quelli calcolati precedentemente e che quindi è sufficiente limitarsi al calcolo dei coefficienti c_ν quando $p \leq \nu_j < p^2$. CVD

3. Interpretazione funzionale in caratteristica zero. Immersione canonica.

Manteniamo le notazioni e le convenzioni del numero precedente. È noto che il gruppo étale G si rialza in modo unico ad un gruppo étale ${}^{\#}G$ su $A = \boldsymbol{W}(k)$ e che l'algebra affine ${}^{\#}R$ di ${}^{\#}G$ può essere descritta, in modo perfettamente analogo a quanto visto su k, come un'algebra di funzioni (insiemistiche) sul gruppo astratto ${}^{\#}G(A) = G(k)$. In particolare, si ha ${}^{\#}R = \boldsymbol{W}(R)$ (cf. il § 1 di [WR] o [BA]). Vogliamo occuparci ora delle relazioni indotte dalla dualità su A ed a tale scopo introduciamo i bivettori di Witt ad elementi in $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$, rispettivamente. Cominciamo dall'algebra di Barsotti étale.

3.1. Proposizione. *Notazioni come sopra. Allora* $\mathbf{biv}\,\mathcal{R} = \mathbf{Biv}\,\mathcal{R}$ *è l'anello di tutte le funzioni continue da T a valori in $K = \mathbf{biv}\,k$, ove su entrambi sia posta la topologia p-adica. I sottomoduli*

$$U_n(\mathcal{B}_k) = \{(\xi_j)_{j \in \mathbb{Z}} \mid j \leq n \Rightarrow \xi_j^{p^{-j}} \in \mathcal{B}_k\},$$

che definiscono la topologia canonica su $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ *inducono su tale spazio di funzioni la topologia della convergenza uniforme sui compatti di T. Infine, l'algebra* $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ *è dotata di un coprodotto, definito a partire dal coprodotto di $\mathcal{R}$, ponendo*: $[\boldsymbol{P}f](x, y) = [\mathbf{biv}(\boldsymbol{P}_{\mathcal{R}})f](x, y) = f(x + y)$ (cf. [BA] o il § 1 di [WR] per una dimostrazione dettagliata; in quest'ultima referenza, si prende in considerazione anche il caso in cui k non sia algebricamente chiuso).

Ricordiamo che il calcolo di una funzione $f \in \mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ in un punto $q \in T$ corrisponde al calcolo in q delle sue componenti in $\mathcal{R}$, tramite l'interpretazione funzionale del § 2. Inoltre l'identificazione della bialgebra ${}^{\#}R$ con $\mathbf{W}(R)$ definisce un'immersione (di bialgebre) di ${}^{\#}R$ in $\boldsymbol{W}(\mathcal{R})$. Tale immersione è un caso particolare dell'*immersione canonica* dell'algebra di un qualunque gruppo di Barsotti-Tate ${}^{\#}G$ su A nell'anello dei vettori di Witt a componenti nell'algebra di Barsotti associata alla riduzione modulo p di ${}^{\#}G$ (cf. [WR] per l'enunciato ed una dimostrazione generale del Teorema di Immersione canonica).

Passiamo ora a considerare il caso dell'algebra duale: $\mathcal{D} = \varprojlim (D \xleftarrow{[p_-]} D \xleftarrow{[p_-]} \ldots)$, ed indichiamo con ${}^{\#}D$ l'anello delle misure μ a valori in A, definite su tutti i sottoinsiemi di $G(k)$ e soddisfacenti alla condizione di sommabilità:

3.2. (additività): *per ogni intero* $n \geqslant 0$, *il sottoinsieme* $\{P \in G(k) \mid \mu(P) \notin p^n A\}$ *è finito.*

È immediato osservare che

$$ {}^{\#}D = \mathrm{Hom}_A^{\mathrm{cont}}({}^{\#}R, A) \cong \varprojlim_n [\varinjlim_j \mathrm{Hom}_A({}^{\#}R_j, A/p^n A)], $$

ove ${}^{\#}R_j = {}^{\#}R/{}^{\#}\mathfrak{a}_j$ è l'algebra affine di un A-gruppo finito ${}^{\#}G_n$ ed i quozienti $A/p^n A$ sono dotati della topologia discreta; ciò spiega la condizione di sommabilità data sopra. In particolare, da tale identificazione risulta evidente come ${}^{\#}D$ sia naturalmente dotato della topologia p-adica, ovvero della topologia per cui un insieme fondamentale di intorni di zero è dato dagli ideali aperti:

$$ p^n\, {}^{\#}D = \{\mu \in {}^{\#}D \mid \mu(X) \in p^n A \ \forall X \in G(k)\} = \{\mu \in {}^{\#}D \mid \mu \circ f \in p^n A \ \forall f \in {}^{\#}R\}. $$

Rispetto a tale topologia ${}^{\#}D$ è completo.

Dunque, in base alla definizione data, ogni elemento di ${}^{\#}D$ si può scrivere nella forma:

$$ \mu = \sum_{X \in G(k)} \mu(X)\, \Delta_X, $$

ove Δ_X indica la misura di Dirac centrata in $X \in G(k)$, a valori in A (1), ed una tale serie è convergente (incondizionatamente) in ${}^{\#}D$. Le misure così definite formano un A-modulo, che diventa un anello rispetto al prodotto definito per dualità, ovvero se μ e ν sono due misure, il loro prodotto, calcolato in P è uguale a:

$$ [\mu\nu] = \sum_{X \in G(k)} \mu(X)\, \nu(P - X), $$

al variare di P in $G(k)$. Analogamente vi è in ${}^{\#}D$ un'operazione di coprodotto $\boldsymbol{P}$, definita ponendo: $\boldsymbol{P}\partial_P = \partial_P \otimes \partial_P$, per ogni P in $G(k)$, ed esten-

(1) Usiamo il simbolo Δ per le misure di Dirac a valori in A per distinguerle dalle analoghe misure di Dirac a valori in k.

dendo la definizione per linearità e continuità. Se ne deduce che il valore della misura $\boldsymbol{P}\mu$ su un sottoinsieme misurabile U di $G(k) \times G(k)$ è uguale al valore della misura μ sull'intersezione di U con la diagonale di $G(k) \times G(k)$. In particolare, vi è un morfismo suriettivo: σ: ${}^{\#}D \to D$, che manda i coefficienti $\mu(X)$ di una misura μ nelle loro immagini in $k = A/pA$; in particolare, tale morfismo rende commutativo il seguente diagramma:

(3.3)
$$\begin{tikzcd} {}^{\#}D \arrow[r, "{[p_-]}"] \arrow[d, "\sigma"'] & {}^{\#}D \arrow[d, "\sigma"'] \\ D \arrow[r, "{[p_-]}"] & D, \end{tikzcd}$$

ove il simbolo $[p_-]$ indica il morfismo di anelli indotto sia in D che in ${}^{\#}D$ dalla moltiplicazione per p nel gruppo $G(k)$ ((cf. 2.2.2)), ovvero:

$$[p_-]\mu = \sum_{X \in G(k)} \mu(X) \Delta_{pX}.$$

Sia ora ${}^{\#}\mathcal{D}$ il limite inverso topologico:

(3.4)
$${}^{\#}\mathcal{D} = \varprojlim \left({}^{\#}D \xleftarrow{[p_-]} {}^{\#}D \xleftarrow{[p_-]} \dots\right).$$

Un sistema fondamentale di intorni di zero in ${}^{\#}\mathcal{D}$ è dato dagli ideali:

$$\mathcal{B}_{n,k} = \{\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \in {}^{\#}\mathcal{D} | \mu_k \in p^n\, {}^{\#}D\},$$

ove la condizione di appartenenza di μ al limite inverso ${}^{\#}\mathcal{D}$, significa: $[p_-]\mu_{j+1} = \mu_j$ $\forall j \geqslant 0$. Si osservi subito che, grazie alla commutatività del diagramma (3.3), il morfismo σ si estende ad un morfismo continuo $\sigma: {}^{\#}\mathcal{D} \to \mathcal{D}$, che indichiamo ancora con lo stesso nome. Gli elementi di ${}^{\#}\mathcal{D}$ si possono interpretare come misure su T, a valori in A, in modo analogo a quanto fatto per gli elementi di $\mathcal{D}$ (cf. Proposizione 2.2.8). In particolare, grazie a questa identificazione, l'ideale $\mathcal{B}_{n,k}$ risulta formato da misure su T, che assumono valori in $p^n A$ su sfere di raggio $\geqslant p^{-k}$.

Il nostro primo obiettivo è mostrare che l'anello ${}^{\#}\mathcal{D}$ contiene una sottobialgebra di tipo moltiplicativo ${}^{\#}\hat{R}$, e che la restrizione di σ ad ${}^{\#}\hat{R}$ è un morfismo suriettivo di bialgebre su $\hat{R}$ (cf. Proposizione 2.3.2). Ciò significa, in particolare, che ${}^{\#}\mathcal{D}$ contiene l'algebra affine ${}^{\#}\hat{R}$ di un rialzamento del gruppo $\hat{G}$. Nel seguito metteremo in evidenza le relazioni esistenti tra ${}^{\#}D$ e $\boldsymbol{W}(D)$ e ne risulterà che ${}^{\#}\hat{R}$ è l'immersione canonica del rialzamento di $\hat{R}$.

Cominciamo osservando che $^{\#}\mathcal{D}$ contiene le misure di Dirac Δ_x centrate nei punti $x \in T$; infatti, se $x = (X_0, X_1, \dots)$ è un punto di T, allora è facile verificare che si ha:

$$\Delta_x = (\Delta_{X_0}, \Delta_{X_1}, \dots) \in {}^{\#}\mathcal{D},$$

in quanto $[p_-]\Delta_{X_{j+1}} = \Delta_{pX_{j+1}} = \Delta_{X_j}$ $\forall j \geq 0$. Dunque, se si considerano, come in 2.3 dei generatori liberi:

$$x_1 = (0, X_{1,1}, X_{1,2}, \dots), \dots, x_f = (0, X_{f,1}, X_{f,2}, \dots)$$

dello $\mathbb{Z}_p$-modulo Λ, si possono considerare le misure di Dirac $\Delta_{x_0}, \dots, \Delta_{x_f}$ e gli elementi $Y_j = \Delta_{x_j} - 1$ per $j = 1, \dots, f$. Si osservi che da $\boldsymbol{P}(\Delta_x) = \Delta_x \otimes \Delta_x$, per ogni x in T, si deduce:

$$\boldsymbol{P}(Y_j) = Y_j \otimes 1 + 1 \otimes Y_j + Y_j \otimes Y_j, \tag{3.5}$$

per $j = 1 \dots f$. Si tratta quindi di mostrare che si ha:

3.6. Proposizione. *Notazioni come sopra. Indicato con* $^{\#}\widehat{R}$ *l'anello di serie formali* $^{\#}\widehat{R} = A[\![Y_1, \dots, Y_f]\!]$ *con la struttura di bialgebra moltiplicativa descritta sopra, allora si ha l'inclusione di bialgebre* $^{\#}\widehat{R} \subseteq {}^{\#}\mathcal{D}$.

Dim. Si tratta di provare che ogni serie di potenze negli Y_j induce una misura su T, a valori in A, con la condizione di sommabilità definita in 3.2. Poichè la topologia di $^{\#}\mathcal{D}$ ha un sistema di intorni di zero formato da ideali, è sufficiente mostrare che si ha: $\lim_{n \to \infty} Y_j^{p^n} = 0$, per $j = 1, \dots, f$. Come nella dimostrazione della Proposizione 2.3.2, possiamo scrivere

$$(\Delta_{x_j} - 1)^{p^n} = \sum_{k=0}^{p^n} (-1)^{p^n - k} \binom{p^n}{k} \Delta_{kx_j},$$

ed osservare che tale misura assume valore nullo su sfere $y + p^r\Lambda$ ove y non sia congruo, modulo $p^r\Lambda$, a qualche kx_j, con $0 \leq k \leq p^n$. Quindi, a meno di cambiare il centro della sfera, supponiamo che si abbia $y = hx_j$, ovviamente con $0 \leq h < p^r \leq p^n$. Se ne deduce che:

$$(\Delta_{x_j} - 1)^{p^n}(hx_j + p^r\Lambda) = \sum_{i=0}^{[p^{-r}(p^n - h)]} (-1)^{p^n - h - ip^r} \binom{p^n}{h + ip^r},$$

ove le parentesi quadre nell'estremo superiore della somma stanno ad indicare che si deve prendere la parte intera del numero tra parentesi. Dunque, con una facile stima dei coefficienti binomiali (cf. Appendice 2), se $h > 0$, si deduce che il valore p-adico di $(\Delta_{x_j} - 1)^{p^n}(hx_j + p^r\Lambda)$ è maggiore o uguale di $n - v_p(h) \geq n - r$.

Se $h = 0$, cominciamo con l'osservare che: $0 = \sum_{k=0}^{p^n}(-1)^{p^n-k}\binom{p^n}{k}$, e che questa somma si può decomporre nel modo seguente:

$$\sum_{k=0}^{p^n}(-1)^{p^n-k}\binom{p^n}{k} = 1 + (-1)^{p^n} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{p-1}(-1)^{p^{n-1}(p-i_1)}\binom{p^n}{i_1 p^{n-1}} + \sum_{\substack{i_2=1\\(i_2,p)=1}}^{p^2-1}(-1)^{p^{n-2}(p^2-i_2)}\binom{p^n}{i_2 p^{n-2}} + \dots$$

$$\dots + \sum_{\substack{i_{n-1}=1\\(i_{n-1},p)=1}}^{p^{n-1}-1}(-1)^{p(p^{n-1}-i_{n-1})}\binom{p^n}{i_{n-1}p} + \sum_{\substack{i_n=1\\(i_n,p)=1}}^{p^n-1}(-1)^{p^n-i_n}\binom{p^n}{i_n} \text{ (2)}.$$

ove tutti gli addendi della sommatoria nell'indice i_j hanno valore p-adico j. Nel caso in cui $h = 0$, si ha che $(\Delta_{x_j} - 1)^{p^n}(p^r\Lambda)$ è dato dalla somma delle sommatorie scritte qui sopra, fino a quella di indice i_{n-r} compresa. Poichè questa somma è uguale all'opposto della somma delle rimanenti sommatorie, i cui addendi hanno tutti valore p-adico $> n - r$ si può concludere anche in questo caso che il valore p-adico di $(\Delta_{x_j} - - 1)^{p^n}(p^r\Lambda)$ è maggiore o uguale di $n - r$.

Dunque la misura $(\Delta_{x_j} - 1)^{p^n}$ assume valori in $p^{n-r}A$ sulle sfere di raggio $\geq p^{-r}$ e quindi è contenuta nell'ideale $\mathscr{B}_{n-r,r}$. Ciò è sufficiente per affermare che $\lim_{n\to\infty} Y_j^{p^n} = 0$ e concludere la dimostrazione. CVD

Mantenendo le notazioni precedenti, siano $x_1, \dots, x_f$ dei generatori liberi dello $\mathbb{Z}_p$-modulo Λ; allora, per ogni intero positivo k gli elementi $p^{-k}x_1, \dots, p^{-k}x_f$ di T, sono dei generatori liberi dello $\mathbb{Z}_p$-modulo $p^{-k}\Lambda$. Come sopra, si possono costruire le misure di Dirac $\Delta_{p^{-k}x_0}, \dots, \Delta_{p^{-k}x_f}$ e le misure $Y_j^{(k)} = \Delta_{p^{-k}x_j} - 1$ per $j = 1, \dots, f$, ove $Y_j^{(0)} = Y_j$. Come nella dimostrazione della Proposizione 3.6, si può verificare che si ha l'inclusione ${}^{\#}\widehat{R}_k = A[\![Y_1^{(k)}, \dots, Y_f^{(k)}]\!] \subsetneq {}^{\#}\mathcal{D}$, ed ovviamente ${}^{\#}\widehat{R}_0 = {}^{\#}\widehat{R}$. Si ha $[p_-]Y_j^{(k)} = Y_j^{(k-1)}$ e vale la relazione $(Y_j^{(k)} + 1)^p - 1 = Y_j^{(k-1)}$, che per-

(2) Se p è dispari, le sommatorie in questione sono infatti uguali a zero, per l'usuale simmetria dei binomiali $\left[\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}\right]$ e la presenza di segni opposti. Le considerazioni che seguono sono quindi esposte all'unico scopo di trattare in modo uniforme anche il caso in cui $p = 2$.

mette di immergere ${}^{\#}\widehat{R}_{k-1}$ in ${}^{\#}\widehat{R}_k$. Si può così considerare il sottoanello ${}^{\#}\mathcal{D}^0 = \varinjlim {}^{\#}\widehat{R}_k \subseteq {}^{\#}\mathcal{D}$; come nel caso di caratteristica positiva, gli elementi di ${}^{\#}\mathcal{D}^0$ possono essere identificati con le misure su T a supporto compatto (cfr. Definizione 2.2.7 e Proposizione 2.2.8).

Vogliamo quindi mostrare che ${}^{\#}D$ è il completamento di ${}^{\#}\mathcal{D}^0$ e confrontare ${}^{\#}\mathcal{D}$ con $W(\mathcal{D})$. Precisamente, si ha:

3.7. PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra. Allora* ${}^{\#}\mathcal{D}$ *è il completamento di* ${}^{\#}\mathcal{D}^0 = \varinjlim {}^{\#}\widehat{R}_k$ *e la bialgebra* ${}^{\#}\mathcal{D}$ *è isomorfa a* $W(\mathcal{D})$. *In particolare la bialgebra* ${}^{\#}\widehat{R}$ *si immerge in* $W(\widehat{R})$ *e l'immersione così ottenuta è l'immersione canonica del rialzamento di* $\widehat{R}$.

DIM. Cominciamo col dimostrare come ogni misura $\mu \in {}^{\#}\mathcal{D}$ possa essere approssimata da una misura a supporto compatto. Sia $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots)$ una misura in ${}^{\#}\mathcal{D}$ e mostriamo che, fissato comunque un intero positivo n, esiste una misura ν, a supporto compatto su T, che differisce da μ a meno di una misura appartenente a $\mathcal{B}_{n,n}$, ovvero di una misura che assume valori in $p^n A$ su sfere di raggio $\geqslant p^{-n}$. I valori della misura μ su sfere di raggio $\geqslant p^{-n}$ dipendono unicamente dalla misura $\mu_n \in {}^{\#}D$, e questa soddisfa alla condizione di sommabilità 3.2; dunque esiste un sottogruppo finito $G_r(k)$ di $G(k)$ al di fuori di cui μ_n assume solo valori in $p^n A$. Si ponga quindi:

$$\nu_j = \sum_{X \in G_{r+j-n}(k)} \mu_j(X) \Delta_X \quad \text{per } j \geqslant n \quad \text{e} \quad \nu_j = [p_-]^{n-j} \nu_n \ \text{ per } j < n .$$

È facile dedurre che, posto $\nu = (\nu_0, \nu_1, \dots)$, si ha che $\nu - \mu \in \mathcal{B}_{n,n}$ e che ν è una misura a supporto nel compatto $p^{n-r}\Lambda$.

La «riduzione modulo p», ovvero la freccia σ definita sopra, definisce un morfismo continuo e suriettivo di ${}^{\#}\widehat{R}_0$ su $\widehat{R}$ (cf. Definizione 1.8, 3.4 e 2.3.2). La suriettività discende dall'ovvia osservazione che ogni serie di potenze negli y_j, a coefficienti in k: $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^f} a_\nu y^\nu$, può essere rialzata alla serie $\sum_{\nu \in \mathbb{N}^f} \{a_\nu\} Y^\nu$ di ${}^{\#}\widehat{R}_0$, ove $\{a\}$ sta ad indicare il rappresentante di Teichmüller in $A = W(k)$ dell'elemento a di k. Tale morfismo quindi si estende ad un morfismo continuo e suriettivo tra i limiti diretti: $\sigma: {}^{\#}\mathcal{D}^0 \to \mathcal{D}^0$, e quindi si estende ad un morfismo suriettivo tra i completamenti: $\sigma: {}^{\#}\mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Inoltre, poichè il quoziente ${}^{\#}\mathcal{D}/p\, {}^{\#}\mathcal{D} \cong \mathcal{D}$ è perfetto, in base al Corollario A.5, vi è un isomorfismo continuo $W(\mathcal{D}) \to {}^{\#}\mathcal{D}$, che diventa bicontinuo se si mette su $W(\mathcal{D})$ la topologia canonica (cf. Appendice 1: Proposizione A.6). Dunque identificheremo d'ora in poi gli elementi di $W(\mathcal{D})$ con le corrispondenti misure su T ed a valori in A.

A questo punto ê sufficiente notare che le misure di Dirac Δ_{x_j}, a valori in A, coincidono con i rappresentanti di Teichmüller $\{\partial_{x_j}\}$ delle stesse misure a valori in k e che $\partial_{x_j} \in \widehat{R}$; dunque, i parametri $Y_j = \{\partial_{x_j}\} - 1$ sono vettori di Witt a componenti in $\widehat{R}$. CVD

È immediato generalizzare all'anello dei bivettori speciali $\mathbf{biv}^s(\mathcal{D}) = \mathbf{W}(\mathcal{D}) \otimes_A K$ l'isomorfismo definito sopra, ovvero considerare l'isomorfismo tra $\mathbf{W}(\mathcal{D}) \otimes_A K$ e le misure su T, a valori in K.

3.8. Proposizione. *Notazioni come sopra. L'integrale delle funzioni continue contro misure a supporto compatto su* T *definisce un'applicazione K-bilineare tra* $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ *e le misure a supporto compatto contenute in* $\mathbf{W}(\mathcal{D}) \otimes_A K$.

Dim. Supponiamo $\mu \in {}^{\#}\mathcal{D}^0$ ed $f \in \mathbf{biv}(\mathcal{R})$, e ricordiamo come si effettua il calcolo di $\int_T f d\mu$. Poichè $\mu \in {}^{\#}\mathcal{D}^0$ il suo supporto è contenuto in un qualche compatto, supponiamo quindi che sia contenuto in $p^{-k}\Lambda$, per qualche $k \geq 0$. Inoltre, poichè f è continua, essa è uniformemente continua sul compatto $p^{-k}\Lambda$ e quindi, fissato $n \in \mathbb{N}$ esiste un intero r_n tale che: $x - y \in p^{r_n}\Lambda \Rightarrow f(x) - f(y) \in p^n A$; ovvero esiste una funzione $p^{r_n}\Lambda$-periodica f_n su $p^{-k}\Lambda$ (3), che approssima f modulo $p^n A$. Al variare di n si definisce così una successione di funzioni periodiche $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tali che $f_n(x) - f(x) \in p^n A$ $\forall x \in p^{-k}\Lambda$, e si può ovviamente supporre di avere $r_n \leq r_{n+1}$, per tutti gli n. Dunque, ad ognuna delle f_n, in quanto funzione semplice, si può associare il suo integrale su $p^{-k}\Lambda$, ovvero la somma finita:

$$S_n = \sum_{x \in p^{-k}\Lambda/p^{r_n}\Lambda} f_n(x)\mu(x + p^{r_n}\Lambda);$$

inoltre la successione delle somme S_n converge in K, come si può vedere ragionando come segue: se

$$x + p^{r_n}\Lambda = \bigcup_{j=1}^{s} x_j + p^{r_{n+1}}\Lambda,$$

allora

$$\mu(x + p^{r_n}\Lambda) = \sum_{j=1}^{s} \mu(x_j + p^{r_{n+1}}\Lambda),$$

(3) E quindi una funzione semplice nel senso della teoria della misura, in quanto combinazione lineare finita, a coefficienti in K, di funzioni caratteristiche di sfere aperte di T.

e quindi si ha

$$f_n(x)\mu(x+p^{r_n}\Lambda)-\sum_{j=1}^{s}f_{n+1}(x_j)\mu(x_j+p^{r_{n+1}}\Lambda)=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}[f_n(x)-f_{n+1}(x_j)]\mu(x_j+p^{r_{n+1}}\Lambda).$$

A questo punto è sufficiente osservare che, per ipotesi, $\mu(x_j+ + p^{r_{n+1}}\Lambda)\in A$ e che

$$f_n(x)-f_{n+1}(x_j)=$$

$$=[f_n(x)-f(x)]+[f(x)-f(x_j)]+[f(x_j)-f_{n+1}(x_j)]\in p^nA,$$

perchè ognuna delle differenze in parentesi quadre vi appartiene. Se ne deduce che $S_n-S_{n+1}\in p^nA$, e quindi che la successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è di Cauchy in K, e dunque ivi converge. In particolare, se f è una funzione a valori in A, allora anche l'integrale appartiene ad A. L'estensione a misure a supporto compatto contenute in $\boldsymbol{W}(\mathcal{D})\otimes_A K$ è immediata. CVD

4. Bivettori canonici e Modulo di Tate.

I bivettori canonici ad elementi in $\mathcal{R}$ ovvero gli elementi h di **biv** $\mathcal{R}$ soddisfacenti alla condizione: $\boldsymbol{P}h=h\otimes 1+1\otimes h$ corrispondono, nel senso della Proposizione 3.1, alle applicazioni lineari su T, ovvero agli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T,K)$. Tra questi omomorfismi è in evidenza il sotto-A-modulo $\boldsymbol{M}(R)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}^{\mathrm{fil}}(T,K)$, formato dalle applicazioni lineari che rispettano le filtrazioni $\Lambda\to T$, $A\to K$, ovvero gli omomorfismi che assumono valori interi (ovvero in A), sui punti del reticolo Λ, tale A-modulo è detto il *modulo canonico* (o *di Dieudonné*) di G. In particolare, scrivendo gli omomorfismi di $\boldsymbol{M}(R)$ tramite bivettori a componenti in $\mathcal{R}$ (cf. Proposizione 3.1), si ottengono dei bivettori canonici le cui componenti di indice negativo sono funzioni Λ-periodiche, ovvero appartengono ad R, e questa è la classica definizione del modulo canonico associato al gruppo étale G.

Occupiamoci ora del modulo canonico associato al gruppo duale $\widehat{G}$. Supponiamo di aver fissato una volta per tutte un insieme $x_1,\dots,x_f$ di generatori liberi dello $\mathbb{Z}_p$-modulo Λ, ed osserviamo che, se $x=a_1x_1+ +\dots+a_fx_f$, $a_j\in\mathbb{Q}_p$, è un generico punto di T, si ha $\Delta_x=\Delta_{x_1}^{a_1}\dots\Delta_{x_f}^{a_f}$. Infatti, se $a_1,\dots,a_f$ fossero numeri interi l'uguaglianza discenderebbe dalla definizione stessa del prodotto tra misure; altrimenti, siano $b_1,\dots,b_f$ dei numeri interi tali che $p^{-n}b_j\equiv a_j \bmod p^n\mathbb{Z}_p$, si ha che le misure Δ_x

e $\Delta^{b_1}_{p^{-n}x_1} \dots \Delta^{b_f}_{p^{-n}x_f} = \Delta_{b_1 p^{-n} x_1 + \dots + b_f p^{n} x_f}$ coincidono sulle sfere di raggio $\geqslant p^{-n}$. È chiaro quindi che ciò permette di concludere. Cominciamo con la seguente Proposizione che mette in evidenza una particolare classe di bivettori canonici.

4.1. PROPOSIZIONE. *Siano* $x \in T$ *e* $\Delta_x = \{\partial_x\} \in \boldsymbol{W}(\mathcal{O}^0)$ *la misura di Dirac ad esso associata. Allora la serie* $\log(\Delta_x)$ *converge ad un elemento canonico* η_x *di* $\mathbf{biv}\,\mathcal{O}$. *In particolare, le componenti di* η_x *sono tutte uguali tra loro e tali componenti appartengono ad* $\widehat{R}$ *se, e solo se,* $x \in \Lambda$.

DIM. È sufficiente dimostrare l'asserto sulla convergenza della serie logaritmica per le misure di Dirac associate ai generatori $x_1, \dots, x_f$ dello $\mathbb{Z}_p$-modulo Λ, perchè se $x = a_1 x_1 + \dots + a_f x_f$, $a_j \in \mathbb{Q}_p$, è un generico punto di T, si ha $\Delta_x = \Delta^{a_1}_{x_1} \dots \Delta^{a_f}_{x_f}$; e le proprietà usuali del logaritmo permettono di concludere che

$$\log(\Delta_x) = \sum_{i=1}^{f} a_i \log(\Delta_{x_i}).$$

Si osservi che

$$Y_j = \Delta_{x_j} - 1 \equiv \{\partial_{x_j} - 1\} = \{y_j\} \bmod p\boldsymbol{W}(\mathcal{O}^0), \tag{4.2}$$

da cui si deducono, in particolare, le congruenze:

$$Y_j^{p^n} \equiv \{y_j^{p^n}\} \bmod p^{n+1}\boldsymbol{W}(\mathcal{O}^0).$$

Si consideri ora la serie

$$\eta_j = \log(\Delta_{x_j}) = \log(1 + Y_j) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{Y_j^n}{n}.$$

Tale serie converge in $\mathbf{Biv}\,\mathcal{O}$, ad un elemento di $\mathbf{biv}\,\mathcal{O}$, come si può vedere utilizzando i Lemmi 4.2.1 e 4.2.4 di [WR]. Si può verificare facilmente che le componenti di posto negativo del bivettore η_j sono tutte uguali tra loro. A tale scopo si considerino i bivettori speciali

$$\xi_k = \sum_{(n,p)=1} (-1)^{p^k n+1} \frac{Y_j^{p^k n}}{p^k n} = \frac{1}{p^k} \sum_{(n,p)=1} (-1)^{n+1} \frac{Y_j^{p^k n}}{n} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{p^k} \sum_{(n,p)=1} (-1)^{n+1} \frac{\{y_j^{p^k n}\}}{n} \bmod p\boldsymbol{W}(\mathcal{O}),$$

con $k = 0, 1, \dots,$ ove la congruenza è dedotta da (4.2). Essendo

$$\frac{1}{p^k} \sum_{(n,p)=1} (-1)^{n+1} \frac{\{y_j^{p^k n}\}}{n} = V^{-k} \sum_{(n,p)=1} (-1)^{n+1} \frac{\{y_j^n\}}{n};$$

ed indicando con α_j il vettore $\sum_{(n,p)=1} (-1)^{n+1} \{y_j^n\}/n$, se ne deduce che $\eta_j \equiv \zeta_j = \sum_{k=0}^{\infty} V^{-k} \alpha_j \bmod pW(\mathcal{O})$, e quindi η_j ha tutte le componenti di indice negativo uguali tra loro, perchè soddisfa alla condizione:

$$V\eta_j \equiv V\zeta_j \equiv \zeta_j \equiv \eta_j \bmod pW(\mathcal{O}).$$

Inoltre, poichè il vettore α_j ha tutte le componenti in $\hat{R}$, ed il Verschiebung dei bivettori non modifica tale proprietà, lo stesso si può dire delle componenti di posto non positivo di η_j.

Poichè Δ_{x_j} è un elemento moltiplicativo di $W(\mathcal{O})$, si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}\eta_j = \boldsymbol{P}\log(\Delta_{x_j}) = \log(\boldsymbol{P}\Delta_{x_j}) = \log(\Delta_{x_j} \otimes \Delta_{x_j}) = \\ = \log(\Delta_{x_j}) \otimes 1 + 1 \otimes \log(\Delta_{x_j}) = \eta_j \otimes 1 + 1 \otimes \eta_j.\end{aligned}$$

Dunque η_j è un bivettore canonico e perciò: $V\eta_j = \mathbf{biv}(V_{\hat{R}})(\eta_j)$; infine, osservando che $V_{\hat{R}}$ induce l'identità sugli elementi di $\hat{R}$, si può concludere affermando che $\eta_j = \log(\Delta_{x_j})$ è un bivettore canonico, ha tutte le componenti in $\hat{R}$, e soddisfa alla condizione $V\eta_j = \eta_j$. CVD

Siamo quindi in grado di introdurre l'annunciata mappa dei periodi.

4.3. Corollario. *L'applicazione* $\Psi\colon \begin{smallmatrix} \Lambda \to \boldsymbol{M}(\hat{R}) \\ x \to \eta_x \end{smallmatrix}$ *definita nella Proposizione* 4.1 *induce un isomorfismo di K spazi vettoriali tra* $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} K$ *ed* $\boldsymbol{M}(\hat{R}) \otimes_A K$.

Dim. È sufficiente osservare che, poichè $\hat{R}$ non ha torsione moltiplicativa, l'applicazione definita sopra è iniettiva ed inoltre, si ricordi che Λ ed $\boldsymbol{M}(\hat{R})$ sono moduli liberi dello stesso rango. CVD

L'isomorfismo del Corollario 4.3 e l'interpretazione funzionale di $\boldsymbol{M}(R)$ ci permettono di esprimere il legame esistente tra l'integrazione sui compatti di T e la dualità dei moduli canonici associati a gruppi duali. Cominciamo osservando che dalla Proposizione 4.1 e dal Corollario 4.3 si deduce che i bivettori canonici $\eta_j = \log(\Delta_{x_j})$, $j = 1, \dots, f$, formano una base dell'A-modulo $\boldsymbol{M}(\hat{R})$. Quindi ogni altro bivettore canonico si scrive come combinazione lineare, a coefficienti in A, degli η_j, $j = 1, \dots, f$. Indicato con M^0 il sotto-$\mathbb{Z}_p$-modulo di $\boldsymbol{M}(\hat{R})$ generato dagli η_j

$j = 1, \dots, f$, si ha la corrispondenza biunivoca, indotta dall'esponenziale, tra gli elementi di M^0 e le misure di Dirac Δ_x centrate sui punti di Λ. Estendiamo quindi questa corrispondenza ad $\boldsymbol{M}(\widehat{R})$ associando ad un bivettore $\eta = \sum_{j=1}^{f} a_j \zeta_j$ la misura di Dirac su $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$:

$$\exp(\eta) = \prod_{j=1}^{f} \Delta_{x_j}^{a_j} = \Delta_{\sum a_j x_j}.$$

Osserviamo che $\boldsymbol{M}(R) = \mathrm{Hom}^{\mathrm{fil}}_{\mathbb{Z}_p}(T, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda, \mathrm{A})$ e, per cambiamento di base, si ha l'isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda, A) \cong \mathrm{Hom}_A(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A, A)$, ove ad un'applicazione lineare h su Λ, corrisponde l'omomorfismo $h \otimes 1_A$. Dunque tra i moduli $\boldsymbol{M}(R)$ ed $\boldsymbol{M}(\widehat{R})$ resta indotta la naturale dualità tra funzioni e misure; ovvero, se al bivettore canonico $\eta \in \boldsymbol{M}(\widehat{R})$ corrisponde la misura di Dirac Δ_y, centrata sul punto y di $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} A$ ed $h \in \boldsymbol{M}(R)$, si ha:

$$\langle \eta, h \rangle = \int_{\Lambda \otimes A} (h \otimes 1)\, d(\exp \eta) = h \otimes 1(y). \tag{4.4}$$

Sois s e roi h èqpe s daua l i fabaa sdee l lbaa sdee g l $\eta_j = \log(\Delta_{x_j})$, $j = 1, \dots, f$, dell'A-modulo $\boldsymbol{M}(\widehat{R})$ è data dagli omomorfismi h_j, che sulla base $x_1, \dots, x_f$ dello $\mathbb{Z}_p$-modulo Λ, assumono i valori: $h_j(x_k) = \delta_{jk}$ (simbolo di Kronecker). Se $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda, A)$, indicheremo con h anche l'omomorfismo $h \otimes 1$, onde evitare un eccesso di simboli.

Vogliamo illustrare alcune conseguenze della dualità tra $\boldsymbol{M}(R)$ ed $\boldsymbol{M}(\widehat{R})$. Indichiamo con $L_j\colon \mathbf{biv}\,\mathcal{R} \to K$ l'applicazione lineare indotta da $\eta_j \in \boldsymbol{M}(\widehat{R})$, ponendo $L_j(f) = \int_\Lambda f d(\exp \eta_j) = f(x_j)$; si osservi che L_j è in realtà un omomorfismo di anelli. Indicando con ι l'applicazione identica di $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ in sé si può naturalmente associare all'applicazione L_j un endomorfismo $T_j\colon \mathbf{biv}\,\mathcal{R} \to \mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ ponendo $T_j(f) = (\iota \otimes L_j)\boldsymbol{P}f$, al variare di f in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$. L'endomorfismo T_j di $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ così definito è un omomorfismo di anelli ed opera su una funzione f tramite la traslazione per il punto $x_j \in \Lambda$.

4.5. Definizione. Una funzione $f \in \mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ si dice *differenziabile* se la serie

$$D_j(f) = \log T_j(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(T_j - \iota)^n}{n} f,$$

converge in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$, per ogni $j = 1, \dots, f$.

Mostriamo che esistono funzioni differenziabili, ovvero che la serie converge per alcune importanti classi di funzioni, ovvero mostriamo la seguente:

4.6. PROPOSIZIONE. *Sia* $f \in \mathbf{biv}\,\mathcal{R}$.

a) Se f *è* Λ*-periodica (ovvero appartiene ad* ${}^{\#}R_K = {}^{\#}R \otimes K$*) allora* f *è differenziabile.*

b) Se f *è un'applicazione lineare (ovvero appartiene ad* $\boldsymbol{M}(R) \otimes K$*) allora* f *è differenziabile.*

c) Le applicazioni D_j*, per* $j = 1, \ldots, f$*, sono derivazioni invarianti della sottobialgebra* ${}^{\#}R_K[h_1, \ldots, h_f]$ *di* $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$.

DIM. (*a*) Sia f una funzione periodica di periodo Λ, allora, poichè $x_j \in \Lambda$, la traslazione T_j lascia invariata f, ovvero $T_j f - f = 0$ e dunque ciò accade per ogni potenza dell'operatore $T_j - \iota$, e quindi la serie della Definizione 4.5. converge a zero.

(*b*) Sia ora h un'applicazione lineare su T. Si osservi che

$$(T_j - \iota)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T_j^k,$$

e quindi:

$$(T_j - \iota)^n (h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} T_j^k h = \tag{4.7}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \right] h + \left[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k \right] h(x_j).$$

La somma all'interno della prima parentesi è nulla, perchè è uguale ad $(1-1)^n$; inoltre, dall'osservazione che:

$$\binom{n}{k} k = n \binom{n-1}{k-1},$$

si deduce che anche la somma all'interno della seconda parentesi quadra è nulla, quando $n > 1$, perchè uguale ad $n(1-1)^{n-1}$. Dunque $(T_j - \iota)^n (h) = 0$, per ogni $n > 1$; e per $n = 1$ si ha $(T_j - \iota)(h) = h(x_j) = L_j(h)$.

(*c*) Si osservi che, se h è una qualsiasi applicazione lineare, $(T_j - \iota)(h^n)$ è un polinomio in h di grado $\leqslant n-1$; se ne deduce che $(T_j - \iota)^{n+1}(h^n) = 0$ e ciò si generalizza facilmente ad un qualsiasi polinomio di grado $\leqslant n$ in ${}^{\#}R_K[h_1, \ldots, h_f]$. Ciò significa che l'operatore D_j, calcolato contro h^r, si riduce alla somma finita:

$$D_j(h^r) = \sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}\frac{(T_j - \iota)^n}{n}h^r,$$

e quindi ciascuna delle D_j, per $j = 1, \dots, f$, è un endomorfismo di ${}^{\#}R_K[h_1, \dots, h_f]$. Ricordiamo che il prodotto nell'anello End(**biv** $\mathscr{R}$) è la composizione di endomorfismi, perciò è sufficiente osservare che $(T_j - \iota)(fg) = \mu \circ (T_j \otimes T_j - \iota \otimes \iota)(f \otimes g)$ e quindi, se f e g sono funzioni differenziabili, si ha:

$$D_j(fg) = \mu \circ (\log[(T_j \otimes \iota) \circ (\iota \otimes T_j)])(f \otimes g) =$$

$$= \mu \circ (D_j \otimes \iota + \iota \otimes D_j)(f \otimes g) = D_j(f)g + fD_j(g),$$

da cui si conclude che è una derivazione di ${}^{\#}R_K[h_1, \dots, h_f]$. Infine, poichè gli elementi di ${}^{\#}R_K$ sono costanti rispetto a tali derivazioni, è sufficiente verificare che la condizione di invarianza vale sugli h_i. In tal caso la verifica è immediata, essendo:

$$\boldsymbol{P}D_j(h) = \boldsymbol{P}h(x_j) = 1 \otimes h(x_j)$$

e

$$(\iota \otimes D_j)\boldsymbol{P}(h) = (\iota \otimes D_j)(h \otimes 1 + 1 \otimes h) = 1 \otimes h(x_j). \qquad \text{CVD}$$

Vogliamo mostrare che le applicazioni D_j, per $j = 1, \dots, f$, sono derivazioni invarianti di un'importante sottobialgebra ${}^{\#}E$ di $\boldsymbol{W}(\mathscr{R})$.

4.8. Corollario. *Siano $h_1, \dots, h_f$ generatori liberi di $\boldsymbol{M}(R)$, soddisfacenti alle condizioni: $h_j(x_k) = \delta_{jk}$ (simbolo di Kronecker), ove $x_1, \dots, x_f$ sono i generatori liberi fissati di Λ. Si considerino i vettori $\lambda_1, \dots, \lambda_f$ ove $\lambda_j = h_j^{(\geq 0)}$, per $j = 1, \dots, f$; ovvero, λ_j è il vettore avente le componenti uguali alle componenti di h_j di ugual indice. Allora $D_1, \dots, D_f$ sono derivazioni invarianti della sottobialgebra ${}^{\#}E = {}^{\#}R[\lambda_1, \dots, \lambda_f]$ di $\boldsymbol{W}(\mathscr{R})$.*

Dim. È sufficiente mostrare che i vettori $\lambda_1, \dots, \lambda_f$ sono differenziabili, perchè le altre affermazioni discendono da quanto visto nella Proposizione 4.6. Ciò è immediato perchè le applicazioni lineari h_j hanno valori interi sui punti del reticolo e perciò, qualunque sia $x \in \Lambda$, si ha:

$$T_x(\lambda_j) = T_x(h_j) - T_x(h_j^{(<0)}) = h_j + h_j(x) - h_j^{(<0)} - h_j^{(<0)}(x) = \lambda_j + \lambda_j(x),$$

perchè $h_j(x) \in A$ e quindi $h_j^{(<0)}(x) = 0$. Ciò significa che si possono ripetere gli argomenti della dimostrazione del punto (b) della Proposizione 4.6. CVD

Vogliamo mettere in evidenza la struttura di bialgebra di ${}^{\#}E$; si osservi che, in base alle definizioni si ha

$$(4.9)\qquad \boldsymbol{P}\lambda_j = \boldsymbol{P}h_j - \boldsymbol{P}h_j^{(<0)} = h_j \otimes 1 + 1 \otimes h_j - \boldsymbol{P}h_j^{(<0)} = \\ = \lambda_j \otimes 1 + 1 \otimes \lambda_j + \gamma_j ,$$

ove

$$(4.10)\qquad \gamma_j = h_j^{(<0)} \otimes 1 + 1 \otimes h_j^{(<0)} - \boldsymbol{P}h_j^{(<0)} = \boldsymbol{P}\lambda_j - \lambda_j \otimes 1 - 1 \otimes \lambda_j$$

è un vettore a componenti in $R \hat{\otimes} R$, come si deduce dalle due uguaglianze **4.10**. Inoltre è immediato verificare che $(\varepsilon \otimes \iota)\gamma_j = 0 = (\iota \otimes \varepsilon)\gamma_j$; cioè che $\gamma_j \in {}^{\#}\alpha_0 \otimes {}^{\#}\alpha_0$ qualunque sia $j = 1, \dots, f$; se ne deduce che la bialgebra quoziente ${}^{\#}E/{}^{\#}\alpha_0 \otimes {}^{\#}\alpha_0 \cong A[\lambda_1, \dots, \lambda_f]$ è una bialgebra additiva di dimensione f su A e quindi che ${}^{\#}E$ è l'algebra affine di un'estensione additiva del gruppo étale G. Possiamo quindi concludere che $D_1, \dots, D_f$ sono tutte e sole lo derivazioni invarianti di ${}^{\#}E$ e generano perciò lo spazio tangente $t_{{}^{\#}E}(K)$; analogamente $h_1, \dots, h_f$ sono gli integrali additivi di ${}^{\#}E$, perchè le «code» $h_j^{(<0)}$ dei bivettori canonici étale sono elementi di ${}^{\#}R \hat{\otimes} K$ e quindi costanti e perciò $h_j = \lambda_j + h_j^{(<0)}$ è un integrale del differenziale $d\lambda_j$. Si conclude che $h_1, \dots, h_f$ generano lo spazio cotagente $t^{*}_{{}^{\#}E}(K)$.

Come è ben noto, la bialgebra ${}^{\#}E$ è l'algebra affine dell'estensione universale $\mathcal{E}$ del gruppo ${}^{\#}G$ (cf. [MM] e [WR] § 5) ed in particolare, dal Corollario 4.8, discende facilmente che

$$(4.11)\qquad \boldsymbol{M}(R) \otimes K \cong t^{*}_{{}^{\#}E}(K) \quad \text{ed} \quad \boldsymbol{M}(\hat{R}) \otimes K \cong t_{{}^{\#}E}(K)$$

e la dualità descritta sopra coincide con la dualità naturale tra spazio tangente e spazio cotangente.

Il seguito di questo numero sarà dedicato a mettere in evidenza le relazioni esistenti tra la mappa Ψ definita nel Corollario 4.3 ed il logaritmo del gruppo $\mathcal{E}$. Cominciamo esibendo un isomorfismo tra lo Spazio di Tate di ${}^{\#}G$ e quello dell'estensione universale $\mathcal{E}$.

4.12. Lemma. *Notazioni come sopra. Allora*

$$V\mathcal{E} = \varprojlim\, (\mathcal{E}(\bar{A}) \leftarrow \mathcal{E}(\bar{A}) \leftarrow \dots) \cong T = \varprojlim\, ({}^{\#}G(\bar{A}) \leftarrow {}^{\#}G(\bar{A}) \leftarrow \dots).$$

Dim. Indichiamo con $\rho\colon \mathcal{E}(\bar{A}) \to {}^{\#}G(\bar{A})$ la proiezione naturale dell'estensione $\mathcal{E}$ sul suo quoziente ${}^{\#}G$, che dal punto di vista delle bialgebre invia ogni punto di $\mathcal{E}$ nella sua restrizione alla sottoalgebra ${}^{\#}R$ di ${}^{\#}E$. È immediato osservare che ρ è un omomorfismo suriettivo di gruppi. Consideriamo quindi l'omomorfismo indotto da ρ tra i limiti inversi, che indichiamo con $V\rho$: $V\mathcal{E} \to T$. Per prima cosa mostriamo che $V\rho$ è iniettivo: infatti, se $V\rho(q') = 0$, allora tutte le componenti di q', come elemento del limite inverso, appartengono al sottogruppo additivo (vettoriale) di $\mathcal{E}$ e sono infinitamente p-divisibili; ma un gruppo additivo non può avere punti a valori in $\bar{A}$ infinitamente p-divisibili e diversi da zero. Dunque $V\rho$ è iniettivo. Per mostrare la suriettività partiamo da un punto $q = (Q_0, Q_1, \ldots)$ di T, e consideriamo $Q_0'', Q_1'', \ldots$ degli arbitrari rialzamenti ad $\mathcal{E}$ delle componenti del punto q. Vogliamo mostrare che, per ogni j, esiste in $\mathcal{E}$ il limite:

$$Q_j' = \lim_{n \to \infty} p^n Q_{n+j}''. \tag{4.13}$$

Infatti, si ha $\rho(pQ_{n+1+j}'' - Q_{n+j}'') = 0 = \varepsilon_{{}^{\#}R}$, qualunque sia n, e quindi $p^n(pQ_{n+1+j}'' - Q_{n+j}'')$ è un punto di $\mathcal{E}$ che manda l'ideale di augmentazione di ${}^{\#}E$ nell'ideale $p^n\bar{A}$, e perciò la successione è di Cauchy e dunque convergente in $\mathcal{E}(\bar{A})$. Dalla definizione 4.13 discende banalmente che $q' = (Q_0', Q_1', \ldots)$ è un punto di $V\mathcal{E}$ che si proietta su q. CVD

Vogliamo mostrare che un punto $q \in T$ è completamente determinato dal punto $Q_0' \in \mathcal{E}(A)$ ad esso associato nella dimostrazione del Lemma 4.12; a tale scopo mostriamo che Q_0' determina completamente il punto q' di $V\mathcal{E}$ poichè $\mathcal{E}(\bar{A})$ non ha torsione.

4.14. Lemma. *Sia Q' un punto di $\mathcal{E}(\bar{A})$ e sia $Q = \rho(Q')$ la sua proiezione su G. Allora*

$$[p^n Q'](\lambda_j) = Q'([p_+]^n \lambda_j) = p^n[(h_j^{(<0)}(Q))^{(\geq -n)}] + p^n Q'(\lambda_j) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dim. Si osservi che

$$[p_+]^n \lambda_j = [p_+]^n (h_j - h_j^{(<0)}) = p^n h_j - [p_+]^n h_j^{(<0)},$$

ove $[p_+]$ opera tramite l'analoga freccia in caratteristica positiva, applicata alle componenti dei bivettori (cf. Proposizione 3.1). Ricordando ancora una volta che h_j è un bivettore canonico, se ne deduce:

$$[p_+]^n \lambda_j = p^n \lambda_j + p^n (h_j^{(<0)}) - (p^n h_j)^{(<0)} =$$

$$= p^n \lambda_j + [p^n (h_j^{(<0)})]^{(\geq 0)} = p^n (h_j^{(\geq -n)}).$$

Dalla uguaglianza precedente si deduce facilmente la tesi, osservando che: $[p^n(h_j^{(<0)})]^{(\geq 0)} = p^n[(h_j^{(<0)})^{(\geq -n)}]$ e che le componenti di indice negativo di h_j sono in R e dipendono quindi dal solo punto $Q = \rho(Q')$. CVD

Siamo quindi in grado di dimostrare il seguente:

4.15. COROLLARIO. *Il gruppo $\mathcal{E}(\bar{A})$ è privo di torsione.*

DIM. Sia Q' un punto di $\mathcal{E}(\bar{A})$ e sia $Q = \rho(Q')$ la sua proiezione su $^{\#}G$. Supponiamo che $p^n Q' = 0$ in $\mathcal{E}(\bar{A})$, ed osserviamo che ciò implica che $p^n Q = 0$ in $^{\#}G(\bar{A})$. In base al Lemma 4.14, si ottiene:

$$0 = [p^n Q'](\lambda_j) = Q'([p_+]^n \lambda_j) =$$

$$= p^n[(h_j^{(<0)}(Q))^{(\geq -n)}] + p^n Q'(\lambda_j), \qquad j = 1, \ldots, f;$$

da cui, osservando che il primo addendo è un vettore di Witt con le sole componenti di posto $0, \ldots, n-1$ diverse da zero, si deduce $(h_j^{(<0)}(Q))^{(\geq -n)} = 0$ e $Q'(\lambda_j) = 0$ qualunque sia $j = 1, \ldots, f$, perchè $\bar{A}$ non ha torsione additiva. Poiché Q è un punto di p^n-torsione, l'uguaglianza $(h_j^{(<0)}(Q))^{(\geq -n)} = 0$ implica $Q = \rho(Q') = 0$ (punto identità), e quindi che Q' è un punto del sottogruppo vettoriale di $\mathcal{E}$; dall'uguaglianza $Q'(\lambda_j) = 0$ si deduce che tale punto è nullo. CVD

Il Corollario 4.15, ci permette di affermare che, dato un punto $q \in T$, il suo corrispondente q' nell'isomorfismo del Lemma 4.13 è completamente determinato dalla componente zerea Q_0' di q'. Siamo quindi in grado di dimostrare le relazioni esistenti tra il logaritmo del gruppo $\mathcal{E}$ e la mappa Ψ del Corollario 4.3, stante la identificazione (4.11) tra $M(\hat{R}) \otimes K$ e $t_{\#E}(K)$; ovvero siamo in grado di dimostrare il seguente

4.16. TEOREMA. *Notazioni come sopra. Sia $q \in \Lambda$ un punto del modulo di Tate di G e sia Q_0' la componente zerea del punto $q' \in V\mathcal{E}$ che gli corrisponde. Allora $\Psi(q) = \mathrm{Log}_{\mathcal{E}}(Q_0')$, ove $\mathrm{Log}_{\mathcal{E}}$ indica il logaritmo del gruppo $\mathcal{E}$.*

DIM. Cominciamo osservando che il punto Q_0' appartiene infatti ad $\mathcal{E}(A)$. Ciò è ovvio per la sua restrizione ad $^{\#}R = W(R)$, essendo quest'ultima uguale a $Q_0 = \varepsilon$, in quanto $q \in \Lambda$. È quindi sufficiente calcolare $Q_0'(\lambda_j)$ ed in base alla definizione data in (4.13), si ha: $Q_0'(\lambda_j) =$

$= \lim_{n \to \infty} p^n Q_n'(\lambda_j)$. Si osservi quindi che:

$$p^n Q_n'(\lambda_j) = Q_n'([p_+]^n \lambda_j) = p^n [(h_j^{(<0)}(Q_n))^{(\geq -n)}] + p^n Q_n'(\lambda_j) \equiv$$

$$\equiv p^n h_j(p^{-n} q) \bmod p^n \bar{A};$$

da cui si deduce:

$$Q_0'(\lambda_j) = \lim_{n \to \infty} p^n h_j(p^{-n} q) = h_j(q), \qquad j = 1, \dots, f. \tag{4.17}$$

Ciò permette di concludere che il punto Q_0' è in $\mathcal{E}(A)$ e di calcolare facilmente il suo logaritmo, appartenente a $t_{*E}(K)$. Infatti, in base alla definizione del logaritmo di un gruppo di Lie, si ha:

$$\mathrm{Log}_{\mathcal{E}}(Q_0') = \sum_{i=1}^{f} h_j(Q_0') D_j;$$

ove

$$Q_0'(h_j) = Q_0'(\lambda_j + h_j^{(<0)}) = Q_0'(\lambda_j) + h_j^{(<0)}(Q_0) = h_j(q), \qquad j = 1, \dots, f,$$

essendo $Q_0 = \varepsilon$, in quanto $q \in \Lambda$ ed h_j un bivettore canonico. Dunque, se $q = a_1 x_1 + \dots + a_f x_f$, $a_j \in \mathbb{Z}_p$, si ha $h_j(q) = a_j$, e quindi:

$$\mathrm{Log}_{\mathcal{E}}(Q_0') = \sum_{i=1}^{f} a_j D_j = \Psi(q). \qquad \text{CVD}$$

5. Continuazione.

Passiamo ora alle relazioni esistenti tra il modulo di Tate del gruppo duale ${}^{\#}\widehat{G}$ (moltiplicativo) ed il Modulo di Dieudonné del gruppo G (étale). A differenza dei punti dello Spazio di Tate del gruppo étale, che sono razionali sulla base, per avere tutti i punti dello Spazio di Tate del gruppo ${}^{\#}\widehat{G}$ dobbiamo estendere la base su cui è definito il gruppo. A questo scopo richiamiamo le definizioni degli anelli che utilizzeremo nel seguito. Siano $\bar{K}$ (risp. $\underline{C}$) una chiusura algebrica del campo K (risp. il suo completamento) ed $\bar{A}$ (risp. A_C) il suo anello degli interi. Inoltre, siano $k_\infty = \bar{A}/p\bar{A} = A_C/pA_C$ ed $\mathcal{R}_A = \varprojlim (k_\infty \leftarrow k_\infty \leftarrow \dots)$, ove le freccie che definiscono la sequenza nel limite inverso sono l'elevazione alla p-esima potenza. Non diamo qui le dimostrazioni in dettaglio degli asserti riguardanti la struttura dell'anello $\mathcal{R}_A$, introdotto da Fontaine in [FO2] ed ivi indicato con la lettera R (simbolo già impegnato in questo lavoro); ci limitiamo a ricordare alcune proprietà fondamentali di $\mathcal{R}_A$ e ad introdurre le notazioni che ci saranno utili nel seguito. Per le dimostrazioni delle affermazioni su $\mathcal{R}_A$ o $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)$ rimandiamo a [FO2] oppure a [PD].

Un elemento x di $\mathcal{R}_A$ si può rappresentare sia come una successione $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di k_∞, dove $x_{n+1}^p = x_n$, che come una successione $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di elementi di A_C, nel modo seguente: se $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_A$, indichiamo con $x_n^{\#}$ un qualche rialzamento ad A_C di x_n al variare di $n \in \mathbb{N}$, definiamo la successione $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ponendo:

$$\hat{x}_n = \lim_{m \to \infty} x_{n+m}^{\# p^m} \text{ se } n \geqslant 0 \qquad \text{ed} \qquad \hat{x}_n = \hat{x}_0^{p^{-n}} \text{ se } n < 0 .$$

Grazie alla rappresentazione degli elementi di $\mathcal{R}_A$ come successioni di elementi di A_C si può definire su $\mathcal{R}_A$ una valutazione (non-discreta) ponendo: $v(x) = v_C(\hat{x}_0) \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$.

Possiamo quindi riassumere le proprietà di $\mathcal{R}_A$ nella seguente:

5.1. Proposizione. *Notazioni come sopra. L'anello $\mathcal{R}_A$ è un anello perfetto di caratteristica p, ed è un anello di valutazione completo rispetto alla valutazione definita sopra. In particolare il corpo residuo rispetto a tale valutazione è isomorfo a $\bar{k}$ $(= k)$.*

L'azione del gruppo ${}^{\#}\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ su un elemento x di $\mathcal{R}_A$ è definita tramite l'azione naturale di ${}^{\#}\mathcal{G}$ sugli elementi della successione $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in A_C che rappresenta l'elemento x di $\mathcal{R}_A$.

Consideriamo ora l'anello $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)$ dei Vettori di Witt ad elementi in $\mathcal{R}_A$ e mettiamo in evidenza le sue relazioni con A_C. Si consideri la topologia su $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)$ che ammette come sistema fondamentale di intorni di zero la famiglia di ideali:

$$W_a = \{\xi \in \boldsymbol{W}(\mathcal{R}) \mid n < a \Rightarrow v(x_n^{p^{-n}}) \geqslant a - n\}, \tag{5.2}$$

al variare di a tra i numeri reali positivi. Si ha $W_a W_b \subseteq W_{a+b}$, e, se $n \in \mathbb{N}$, sussiste la decomposizione:

$$W_n = (\ker \Theta_0)^n + p(\ker \Theta_0)^{n-1} + \ldots + p^n \boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A).$$

La topologia così definita è equivalente alla topologia canonica ed alla topologia prodotto ([4]). Introduciamo la definizione di questa topologia equivalente alle usuali su $W(\mathcal{R}_A)$ perchè nel seguito dovremo utilizzare il modulo dei bivettori e le tre topologie dette, pur essendo equivalenti sull'anello dei Vettori di Witt, inducono topologie non-equivalenti su tale modulo.

Introduciamo ora l'omomorfismo fondamentale che lega l'anello $W(\mathcal{R}_A)$ ad A_C; tale omomorfismo si può estendere al modulo dei bivettori su $\mathcal{R}_A$, con valori in C (cf. [PD]).

5.3. PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra. Sia* $\Theta_0: W(\mathcal{R}_A) \to A_C$ *la mappa definita ponendo*:

$$\Theta_0(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \hat{x}_{n,n}.$$

Allora

a) Θ_0 *è un omomorfismo continuo e suriettivo di anelli che commuta con le azioni naturali di* ${}^{\#}\mathcal{G}$.

b) $\ker \Theta_0$ *è un ideale principale in* $W(\mathcal{R}_A)$ *ed un suo generatore è il vettore* $\alpha = \{\pi\} + p$, *ove* π *è un elemento di* $\mathcal{R}_A$ *tale che* $\hat{\pi}_0 = -p$.

Osserviamo che l'anello $\mathcal{R}_A$ contiene l'elemento $\varepsilon = (\dots, 1, \varepsilon_1, \dots)$, ove nel posto di indice 1 vi è una radice primitiva dell'unità ε_1 in A_C. La scelta di un tale elemento ε in $\mathcal{R}_A$ definisce un'immersione dello $\mathbb{Z}_p$-modulo $TG_m = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \mu_{p^\infty})$ (il modulo di Tate del gruppo moltiplicativo) nel gruppo degli invertibili di $\mathcal{R}_A$. Poiché $\mathcal{R}_A$ è perfetto, l'immersione detta si estende allo spazio di Tate $VG_m = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, \mu_{p^\infty})$ del gruppo moltiplicativo. Osserviamo che l'azione di ${}^{\#}\mathcal{G}$ su ε è determinata da un carattere χ: ${}^{\#}\mathcal{G} \to \mathbb{Z}_p^{\times}$, ovvero, dato $s \in {}^{\#}\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}, K)$, si ha: $s(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(s)}$, dove l'esponente p-adico

([4]) La topologia canonica e la topologia prodotto hanno rispettivamente come sistema fondamentale di ideali aperti, i sottoinsiemi:

$$U_k(a) = \{\xi \in W(\mathcal{R}_A) \mid n < k \Rightarrow v(x_n^{p^{-n}}) \geq a\},$$

$$V_k(a) = \{\xi \in W(\mathcal{R}_A) \mid n < k \Rightarrow v(x_n) \geq a\},$$

ove a varia tra i numeri reali positivi e k tra gli interi non negativi. Le topologie sono equivalenti e precisamente, posto $\langle a \rangle = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n\}$, si ha:

$$V_m(p^{m-1}a) \subseteq U_m(a) \subseteq V_m(a) \subseteq U_m(p^{-m}a), \qquad U_{\langle a \rangle}(a) \subseteq W_a, \quad W_{m+b} \subseteq U_m(b).$$

ha senso in quanto le componenti di ε sono radici p^n-esime dell'unità in A_C.

Tramite i rappresentanti di Teichmüller, gli elementi del gruppo moltiplicativo $U_{\mathcal{R}_A}$ si rialzano in modo unico ad un sottogruppo moltiplicativo di $U_{W(\mathcal{R}_A)}$, e quindi lo spazio di Tate del gruppo moltiplicativo si immerge in $U_{W(\mathcal{R}_A)}$. Le radici p^n-esime dell'unità in A_C sono elementi di torsione moltiplicativa e quindi il loro logaritmo a valori in C è nullo. In base al Teorema che segue, per la cui dimostrazione rimandiamo a [PD], esiste invece il logaritmo di $\{\varepsilon\}$ in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$, ed è diverso da zero; quindi se ne deduce, in particolare, un'immersione nel modulo additivo dei bivettori ad elementi in $\mathcal{R}_A$ dello spazio di Tate del gruppo moltiplicativo $V\boldsymbol{G}_m = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p, \mu_{p^\infty})$, con la sua azione di Galois; ovvero $V\boldsymbol{G}_m \cong \tau\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$, ove $\tau = \log\{\varepsilon\}$; e, per la continuità del logaritmo, l'azione di ${}^{\#}\mathcal{G}$ è data da: $s(\tau q) = \chi(s)\tau q \;\; \forall s \in {}^{\#}\mathcal{G}$.

5.4 Teorema. *Sia* $U_{W(\mathcal{R}_A)}$ *il sottogruppo del gruppo moltiplicativo di* $W(\mathcal{R}_A)$ *i cui elementi sono i vettori* $\xi = (x_0, x_1, \ldots)$ *tali che* $v(x_0 - 1) > 0$. *Allora, il logaritmo* $\log\colon U_{W(\mathcal{R}_A)} \to \mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$, *definito ponendo*:

$$\log(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi - 1)^n}{n},$$

è un omomorfismo continuo ed iniettivo nel gruppo additivo di $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$.

Inoltre, la mappa così definita commuta con le naturali azioni di ${}^{\#}\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *su* $U_{W(\mathcal{R}_A)}$ *e* $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$ *ed infine rende commutativo il diagramma*:

$$\begin{array}{ccc} U_{W(\mathcal{R}_A)} & \xrightarrow{\log} & \mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A \\ \big\downarrow{\scriptstyle \Theta_0} & & \big\downarrow{\scriptstyle \Theta} \\ U_{A_C} & \xrightarrow{\log} & C \end{array}$$

ove $U_{A_C} = \{x \in A_C \mid v(x - 1) > 0\}$.

Termina qui l'esposizione dei risultati generali riguardanti gli anelli $\mathcal{R}_A$ e $W(\mathcal{R}_A)$.

Passiamo ora a considerare il modulo di Tate del gruppo ${}^{\#}\hat{G}$, ovvero: $\hat{\Lambda} = T\,{}^{\#}\hat{G}(\bar{A}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} {}^{\#}\hat{G}_n(\bar{A})$, ove le freccie che connettono la sequenza del limite inverso sono indotte dalla moltiplicazione per

p nei gruppi finiti ${}^{\#}\widehat{G}_{n+1} \to {}^{\#}\widehat{G}_n$. Diamo una prima conseguenza della rappresentazione funzionale dei gruppi étale:

5.5. PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra. Allora*

$$\widehat{\Lambda} = T\,{}^{\#}\widehat{G}(\bar{A}) \cong \operatorname{Hom}\,(G(k),\, U_{A_C})\,;$$

ovvero $\widehat{\Lambda}$ *è isomorfo al gruppo dei caratteri di* $G(k)$ *a valori in* U_{A_C}.

DIM. In base alla dualità di Cartier [cf. Proposizione 1.1], i punti dei gruppi finiti ${}^{\#}\widehat{G}_n(\bar{A})$ coincidono con gli elementi di $\operatorname{Hom}_{\bar{A}\text{-}gp}({}^{\#}G_{n,\bar{A}},\, G_{m,\bar{A}})$, e quindi un punto di $\widehat{\underline{\Lambda}}$ determina una successione di elementi moltiplicativi $g_n \in {}^{\#}R_n \otimes \bar{A}$, legati dalla relazione $p_-\, g_{n+1} = g_n$. Prendendo degli elementi $\widehat{g}_n \in {}^{\#}R \otimes \bar{A}$, che rialzino la successione data, si costruisce una successione di Cauchy in ${}^{\#}R \otimes \bar{A}$ per la topologia prodotto tensoriale; il limite di tale successione è quindi un elemento moltiplicativo $g \in {}^{\#}R \,\widehat{\otimes}\, A_C$. Poiché ${}^{\#}R$ è l'algebra affine di un gruppo étale su A, all'elemento $g \in {}^{\#}R \,\widehat{\otimes}\, A_C$ corrisponde tramite la rappresentazione funzionale (cf. Proposizione 3.1) un carattere del gruppo $G(k)$ a valori nel gruppo moltiplicativo U_{A_C}. Viceversa, dato un carattere $g \in {}^{\#}R \,\widehat{\otimes}\, A_C$, si osservi che, l'immagine $g_n \in {}^{\#}R_n \otimes A_C$ di g appartiene infatti ad ${}^{\#}R_n \otimes \bar{A}$, perchè $G_n(k)$ un gruppo di p^n-torsione; e quindi la successione dei g_n definisce un punto del modulo di Tate $\widehat{\Lambda}$. La dualità di Cartier permette di concludere che la corrispondenza così costruita è un isomorfismo tra $\widehat{\Lambda}$ ed il gruppo dei caratteri di $G(k)$ a valori in U_{A_C}. CVD

Se componiamo uno qualunque dei caratteri g di $\widehat{\Lambda}$ con il logaritmo $\log\colon U_{A_C} \to C$, otteniamo l'applicazione identicamente nulla su $G(k)$, perchè i valori di g sono radici p^n-esime dell'unità e su queste il logaritmo si annulla. Vogliamo mostrare che ogni carattere g di $G(k)$ a valori in U_{A_C}, si rialza ad un omomorfismo di gruppi $\xi\colon T \to U_{W(\mathcal{R}_A)}$; precisamente ξ assume i suoi valori nel sottogruppo $\{\varepsilon\}^{\mathbb{Q}_p}$, isomorfo allo Spazio di Tate del gruppo moltiplicativo $VG_m = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p,\, \mu_{p^\infty})$. Tramite la composizione con il logaritmo definito nel Teorema 5.4 si deduce da ξ un omomorfismo non-nullo di gruppi additivi $\log \xi\colon T \to \mathbf{biv}\, \mathcal{R}_A$ che si potrà confrontare con la rappresentazione funzionale dei bivettori canonici.

5.6. PROPOSIZIONE. *Ad ogni carattere* $g \in \operatorname{Hom}(G(k),\, U_{A_C})$ *si può associare un omomorfismo continuo di gruppi* $\xi\colon T \to U_{W(\mathcal{R}_A)}$, *la cui immagine tramite la composizione con* Θ_0 *sia* g. *Inoltre, per ogni punto* $q \in T$, *si ha che* $\xi(q) = \{\varepsilon^b\}$ *per un opportuno* $b \in \mathbb{Q}_p$; *quindi, posto*

$\tau = \log\{\varepsilon\} \in \mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$, *se ne deduce che* $\log\xi = \log\circ\xi$ *è un omomorfismo a valori in* $VG_m \cong \tau\mathbb{Q}_p \subseteq \mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$.

DIM. Sia dunque g un carattere di $G(k)$ a valori in U_{A_C} e sia g' un elemento di ${}^{\#}R \hat{\otimes} W(\mathcal{R}_A)$ la cui immagine tramite $1_{{}^{\#}R} \otimes \Theta_0$ sia uguale a g; un tale elemento esiste ed è facile verificarlo osservando che le algebre ${}^{\#}R \hat{\otimes} (\mathcal{R}_A)$ e ${}^{\#}R \hat{\otimes} A_C$ sono anelli di funzioni su $G(k)$ a valori rispettivamente in $W(\mathcal{R}_A)$ ed A_C e che la suriettività del morfismo Θ_0 permette di scegliere, in corrispondenza ad ogni valore $g(P) \in A_C$ del carattere, un valore $g'(P)$ in $W(\mathcal{R}_A)$ tale che $\Theta_0(g'(P)) = g(P)$ e non è restrittivo scegliere tale valore in $U_{W(\mathcal{R}_A)}$.

Notiamo che, a meno che g non sia il carattere triviale, la mappa g' che lo rialza non può essere un omomorfismo da $G(k)$ in $U_{W(\mathcal{R}_A)}$, perchè il primo è un gruppo di torsione mentre il gruppo $U_{W(\mathcal{R}_A)}$, per le usuali proprietà dei vettori di Witt, non ha p-torsione.

Si consideri ora il limite:

$$\xi = \lim_{n\to\infty}([p_+]^{-n}g')^{p^n}, \tag{5.7}$$

ove il limite è preso nell'anello $\mathbf{biv}\,\mathcal{R} \hat{\otimes} W(\mathcal{R}_A)$ delle funzioni su T a valori in $W(\mathcal{R}_A)$, ed identificando come di consueto gli elementi di ${}^{\#}R \hat{\otimes} W(\mathcal{R}_A)$ con le funzioni Λ-periodiche.

Ricordiamo che il limite precedente significa che la funzione ξ è definita ponendo: $\xi(q) = \lim_{n\to\infty} g'(Q_n)^{p^n}$ qualunque sia $q = (Q_0, Q_1, \ldots) \in T$. Andiamo a mostrare che il limite esiste qualunque sia q, che $\Theta_0(\xi(q)) = g(Q_0)$ e che, in tal modo, si definisce un omomorfismo continuo su T, a valori in $U_{W(\mathcal{R}_A)}$.

Si consideri quindi $g'(Q_n)^{p^n} - g'(Q_{n+1})^{p^{n+1}}$, e si osservi che

$$\Theta_0(g'(Q_{n+1})^p) = \Theta_0(g'(Q_{n+1}))^p = g(Q_{n+1})^p = g(Q_n),$$

perchè g è un omomorfismo; dunque $g'(Q_n) = g'(Q_{n+1})^p + \beta$ per un opportuno $\beta \in \ker\Theta_0$. Con una facile stima sui coefficientii binomiali, si deduce che

$$\begin{aligned} g'(Q_n)^{p^n} - g'(Q_{n+1})^{p^{n+1}} \in W_n &= \\ &= (\ker\Theta_0)^n + p(\ker\Theta_0)^{n-1} + \ldots + p^n W(\mathcal{R}_A); \end{aligned} \tag{5.8}$$

dunque la successione $(g'(Q_n)^{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $W(\mathcal{R}_A)$ e quindi converge essendo questi un anello completo. Notiamo che, la condizione 5.8 è indipendente dalla scelta del punto q e quindi il limite esiste anche nella topologia della convergenza uniforme sui compatti di T e poiché ognuna delle funzioni $([p_+]^{-n}g')^{p^n}$ è periodica, e quindi uniformemente continua, se ne deduce che il limite è una funzione continua su T. Inoltre, si ha

$$\Theta_0(g'(Q_n)^{p^n}) = \Theta_0(g'(Q_n))^{p^n} = g(Q_n)^{p^n} = g(Q_0),$$

qualunque sia n, e quindi, per la continuità dell'omomorfismo Θ_0 se ne deduce che $\Theta_0(\xi(q)) = g(Q_0)$. Resta da verificare che la funzione ξ così definita è un omomorfismo continuo su T. Dalla definizione di g' discende che $g'(S_n + Q_n) = g'(S_n)g'(Q_n) + \beta$ per un qualche $\beta \in \ker \Theta_0$. Analogamente a quanto visto sopra, se ne deduce che

$$g'(S_n + Q_n)^{p^n} \equiv g'(S_n)^{p^n} g'(Q_n)^{p^n} \operatorname{mod} W_n \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

e quindi, passando al limite, $\xi(s+q) = \xi(s)\xi(q)$.

Un'osservazione più attenta dell'applicazione ξ mostra che, per ogni q in T, il valore di ξ in q è un vettore di Witt ad elementi in $\mathcal{R}_A$ avente la sola componente zerea non nulla. Infatti, la topologia dei W_n è equivalente alla topologia prodotto (cf. (5.2) e la nota (4)) e ciò significa che la successione di vettori $(g'(Q_n)^{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge componente per componente. Considerando il vettore di Witt $g'(Q_n) = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$, per le usuali proprietà del prodotto, si ha

$$g'(Q_n)^{p^n} \equiv \{\alpha_0\}^{p^n} \operatorname{mod} p^n \boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A) \qquad \forall n \in \mathbb{N};$$

e quindi le componenti di indice positivo dei vettori $g'(Q_n)^{p^n}$ convergono a zero. In particolare, $\Theta_0(\xi(q)) = g(Q_0)$ ed essendo Q_0 un punto di p^k-torsione, il valore $g(Q_0)$ è una radice p^k-esima dell'unità in $\bar{A} \subseteq A_C$. Ciò implica necessariamente che $\xi(q) = \{\varepsilon^{h_g(q)}\}$, ove ε è l'elemento di $\mathcal{R}_A$ definito prima del Teorema 5.3 e la funzione $h_g : T \to \mathbb{Q}_p$ così definita è un omomorfismo a valori nel gruppo additivo dei numeri p-adici. Se ne deduce quindi che $\log \xi$ è una funzione additiva su T, a valori in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$ e che $\log \xi(q) = \tau h_g(q)\ \forall q \in T$, ove $\tau = \log\{\varepsilon\}$. Quindi i valori della funzione $\log \xi$ appartengono alla copia di $\boldsymbol{VG}_m$ contenuta in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}$ e si può scrivere $\log \xi = \tau h_g \exists h_g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T, \mathbb{Q}_p)$. L'ovvia osservazione che

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T, K) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(T, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K,$$

permette di concludere che h_g è un bivettore canonico, ovvero appartiene ad $\boldsymbol{M}(R) \otimes_A K$; inoltre, se $q \in \Lambda$, allora $\Theta_0(\gamma(q)) = g(Q_0) = 1$ e quindi $\gamma(q) = \{\varepsilon^{h_g(q)}\}$ ove $h_g(q) \in \mathbb{Z}_p$; perchè $\Theta_0(\{\varepsilon^a\}) = 1 \Leftrightarrow a \in \mathbb{Z}_p$. Dunque, $h_g(q)$ è una funzione a valori interi sul reticolo Λ e perciò $h_g \in \boldsymbol{M}(R)$. CVD

Possiamo quindi introdurre anche in questo caso la mappa dei periodi.

5.9. COROLLARIO. *Notazioni come sopra. L'applicazione* $\phi\colon \begin{array}{l}\hat{\Lambda} \to \boldsymbol{M}(R)\\ g \to h_g\end{array}$ *definisce un omomorfismo iniettivo di* $\mathbb{Z}_p$*-moduli. Tale omomorfismo induce un isomorfismo di K-spazi vettoriali tra* $\hat{\Lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} K$ *ed* $\boldsymbol{M}(R) \otimes_A K$. *In particolare, per ogni* $s \in {}^{\#}\mathcal{G}$ *ed ogni* $g \in \hat{\Lambda}$ *si ha* $\phi(s(g)) = \chi(s)\,\phi(g)$.

DIM. L'unica cosa che resta da dimostrare è l'asserto riguardante l'azione del gruppo di Galois. Indicati con γ e γ^s gli omomorfismi da T in $U_{W(\mathcal{R})}$ associati a g ed $s(g)$ rispettivamente, si ha per costruzione: $\gamma^s(p) = \gamma(p)^{\chi(s)}$ qualunque sia $p \in T$. Dunque, passando ai logaritmi, si ottiene: $\tau h_{s(g)}(p) = \log \gamma^s(p) = \chi(s) \log \gamma(p) = \chi(s)\,\tau h_g(p)$; ed osservando che τ non ha annullatori tra i bivettori speciali, se ne deduce che $h_{s(g)}(p) = \chi(s)\,h_g(p)$, che è la tesi. CVD

Richiamiamo che, come di consueto, la notazione $\mathbb{Z}_p(n)$, al variare di n tra gli interi, sta ad indicare lo $\mathbb{Z}_p$-modulo libero di rango 1 con l'azione del gruppo ${}^{\#}\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}, K)$ definita ponendo: $s(x) = \chi^n(s)\,x\ \forall s \in {}^{\#}\mathcal{G}$; ovvero: $\mathbb{Z}_p(n) \cong (T\boldsymbol{G}_m)^{\otimes n}$ ove il prodotto tensoriale è fatto su $\mathbb{Z}_p$, e gli esponenti negativi indicano le analoghe potenze del modulo duale. Possiamo quindi considerare il «twist di Tate» di un qualunque $\mathbb{Z}_p$-modulo M, dotato di un'azione del gruppo ${}^{\#}\mathcal{G}$ ponendo: $M(n) = M \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$, ove $s(m \otimes 1) = \chi^n(s)\,s(m) \otimes 1\ \forall s \in {}^{\#}\mathcal{G}$. Con queste notazioni si può affermare che il Corollario 5.9 stabilisce l'isomorfismo di moduli con azione di Galois:

$$\hat{\Lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} K \cong \boldsymbol{M}(R) \otimes_A K(1);$$

da cui si ottiene $\hat{\Lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} K(-1) \cong \boldsymbol{M}(R) \otimes_A K$, e ricordando che $\hat{\Lambda} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda, \mathbb{Z}_p(1))$, se ne deduce

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\Lambda, K) \cong \boldsymbol{M}(R) \otimes_A K \cong t_{{}^{\#}\hat{G}}(K), \tag{5.10}$$

ove l'ultimo isomorfismo discende dalla dualità, dimostrata nel § 4, tra $\boldsymbol{M}(R) \otimes_A K$ ed $\boldsymbol{M}(\hat{R}) \otimes_A K \cong t^*_{{}^{\#}\hat{G}}(K)$. Se osserviamo che, essendo ${}^{\#}G$ un gruppo étale, si ha $t^*_{{}^{\#}G}(K) = (0)$. Possiamo perciò concludere che l'isomorfismo 5.10 induce la decomposizione di Hodge-Tate nel caso del gruppo ${}^{\#}G$ (cf. [TA] § 4, Cor.2). Analogamente, considerando l'isomorfismo $\Psi\colon \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} K \to \boldsymbol{M}(\hat{R}) \otimes_A K$, dimostrato nel Corollario 4.3, e ricordando l'identificazione $\boldsymbol{M}(\hat{R}) \otimes_A K \cong t^*_{{}^{\#}\hat{G}}(K)$, si deduce, tramite un «twist di Tate», l'isomorfismo che corrisponde alla decomposizione di Hodge-Tate del gruppo ${}^{\#}\hat{G}$; ovvero

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(\hat{\Lambda}, K) \cong \boldsymbol{M}(\hat{R}) \otimes_A K(-1) \cong t^*_{{}^{\#}\hat{G}}(K) \otimes_K K(-1). \tag{5.11}$$

Da ultimo, confrontiamo l'accoppiamento di Tate con il calcolo dei bivettori di $\boldsymbol{M}(R)$ sui punti del modulo di Tate e precisamente mostriamo che vale la seguente:

5.12 PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra. Siano* $g = (g_0, g_1, \dots) \in \widehat{\Lambda}$ *e* $q = (Q_0, Q_1, \dots) \in \Lambda$, *ed indichiamo con* $\langle g, q \rangle = (g_0(Q_0), g_1(Q_1), \dots)$, *il valore dell'accoppiamento di Tate. Allora si ha*

$$\log \langle g, q \rangle = \tau h_g(q) = \tau \phi(g)(q).$$

In particolare, da ciò si deduce la relazione fondamentale tra l'accoppiamento di Tate e la dualità di moduli canonici (cf. (4.4)) *indotta dalle mappe dei periodi, ovvero*:

$$\log \langle g, q \rangle = \tau h_g(q) = \tau \int_T h_g \, d(\exp \eta_q) = \tau \langle \Psi(q), \phi(g) \rangle.$$

DIM. Osserviamo che $g_n(Q_n) \in \bar{A}$ è una radice p^n-esima dell'unità e si ha

$$g_n(Q_n)^p = g_n(pQ_n) = g_n \circ p_+ Q_{n-1} = p_- g_n \circ Q_{n-1} = g_{n-1}(Q_{n-1});$$

dunque la successione $(g_0(P_0), g_1(P_1), \dots)$ definisce un elemento di $\mathcal{R}_A$, che per costruzione è del tipo: $\varepsilon^{h_g(q)}$, per qualche $h_g(q) \in \mathbb{Z}_p$; e la funzione h_g così definita è naturalmente additiva. Questo è l'accoppiamento di dualità tra i moduli di Tate a valori in una copia di $\boldsymbol{TG}_m$ contenuta in $\mathcal{R}_A^\times$; prendendo i rappresentanti di Teichmüller in $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)$ dei valori di tale accoppiamento e componendo con il logaritmo si ottiene un accoppiamento a valori in $\mathbf{biv}\,\mathcal{R}_A$. La Proposizione 5.6 ci permette di concludere che, a meno della moltiplicazione per τ, calcolare il valore di $\log \langle g, q \rangle$ corrisponde a calcolare il bivettore canonico h_g nel punto q di Λ. Abbiamo quindi dimostrato l'attesa uguaglianza. CVD

Analogamente a quanto esposto per la mappa dei periodi Ψ, vogliamo esplicitare le relazioni che ci sono tra la mappa ϕ ed il logaritmo dell'estensione universale del gruppo ${}^\#\widehat{G}$, opportunamente calcolato. Osserviamo subito che, poiché ${}^\#\widehat{G}$ è un gruppo di codimensione 0, ${}^\#\widehat{G}$ coincide con la sua estensione universale e quindi non dobbiamo introdurre altri simboli. Quel che è importante è l'anello su cui prendere i punti di ${}^\#\widehat{G}$

5.13. PROPOSIZIONE. *Notazioni come sopra. L'omomorfismo suriettivo* $\rho: {}^\#\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)) \to {}^\#\widehat{G}(A_C)$ *indotto da* $\Theta_0: \boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A) \to A_C$, *determina un isomorfismo tra gli spazi di Tate:* $V\rho: V\,{}^\#\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)) \to V\,{}^\#\widehat{G}(A_C)$. *Inoltre* ${}^\#\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A))$ *è privo di torsione.*

DIM. Sia $q = (Q_0, Q_1, \dots)$ un punto di $V^{\#}\widehat{G}(A_C)$, e siano $Q_0'', Q_1'', \dots$ dei punti di ${}^{\#}\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A))$ che si proiettano sulle componenti del punto q. Vogliamo mostrare che, per ogni j esiste in ${}^{\#}\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A))$ il limite

$$Q_j' = \lim_{n\to\infty} p^n Q_{n+j}''.$$

Infatti, si ha $\rho(pQ_{n+1+j}'' - Q_{n+j}'') = 0$, qualunque sia n e quindi $p^n(pQ_{n+1+j}'' - Q_{n+j}'')$ è un punto che manda i parametri Y_i di ${}^{\#}\widehat{R}$ nell'ideale W_n di $\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)$, e perciò la successione è di Cauchy e dunque convergente in ${}^{\#}\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A))$. Naturalmente $q' = (Q_0', Q_1', \dots)$ è un punto di $V^{\#}\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A))$ che si proietta su q. Inoltre, si osservi che $p^n Q_{n+j}''(Y_i+1) = (Q_{n+j}''(Y_i+1))^{p^n}$ e quindi $Q_n'(Y_i+1)$ è un rappresentante di Teichmüller, ed è perciò univocamente determinato dalla sua immagine tramite Θ_0 e dalle immagini dei $Q_{n+j}'(Y_i+1)$, che costituiscono una successione di radici p^j-esime di $\Theta_0(Q_n'(Y_i+1))$ in A_C. Ciò dimostra che $V\rho$ è un isomorfismo; inoltre, l'asserzione sulla torsione è banale se si osserva che ${}^{\#}\widehat{G}(\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)) \cong U^f_{\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)}$, e che il gruppo $U_{\boldsymbol{W}(\mathcal{R}_A)}$ non ha torsione. CVD

Si osservi che, in base alla costruzione tratteggiata nella dimostrazione precedente, se $q = (Q_0, Q_1, \dots)$ un punto di Λ, allora $Q_0'(Y_i+1) = \{\varepsilon^{a_i}\}\ \exists a_i \in \mathbb{Z}_p$; dunque, identificando lo spazio tangente $t_{{}^{\#}\widehat{G}}(K)$ con $\boldsymbol{M}(R)\otimes K$, si ha

$$\mathrm{Log}_{\widehat{G}}(Q_0') = \sum_{i=1}^{f} \eta_j(Q_0')\,h_j;$$

ove, ricordando che $\eta_j = \log(Y_j+1)$, si ottiene, per continuità, $\eta_j(Q_0') = \log\{\varepsilon^{a_j}\} = a_j\tau$.

6. Il caso di un corpo residuo non algebricamente chiuso.

Supponiamo ora $k \neq \bar{k}$ e $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$; siano poi $A = \boldsymbol{W}(k)$, $K = \mathbf{biv}\,k$ il corpo delle frazioni di A, $\bar{K}$, C, $\bar{A}$, ed A_C la chiusura algebrica di K, il suo completamento ed i rispettivi anelli degli interi. Indichiamo con ${}^{\#}\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ il gruppo di Galois di $\bar{K}$ su K, la cui azione si estende per continuità a C; ricordiamo che ${}^{\#}\mathcal{G}$ contiene il sottogruppo normale: $I = \{s \in {}^{\#}\mathcal{G} \mid v(sx - x) > 0\ \forall x \in \bar{A}\}$ e che vale l'isomorfismo $\mathcal{G} \cong {}^{\#}\mathcal{G}/I$. Indichiamo infine con $K_{nr} = \mathbf{biv}\,\bar{k}$ il completamento rispetto alla topologia p-adica della massima estensione non-ramificata (contenuta in $\bar{K}$) di $K = \mathbf{biv}\,k$, e ricordiamo che l'azione del gruppo di Galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ su $\bar{k}$ si estende naturalmente ad un'azione su $K_{nr} = \mathbf{biv}\,\bar{k}$ e sul suo anello degli interi $A_{nr} = \boldsymbol{W}(\bar{k})$, operando sulle componenti dei bivettori; in particolare, si verifica facilmente che $K_{nr}^{\mathcal{G}} = K$. Ovviamente, le azioni di $\mathcal{G}$ e $^{\#}\mathcal{G}$ su K_{nr} coincidono.

Come nei numeri precedenti, $G = \varinjlim G_n$ sia un gruppo di Barsotti-Tate étale, definito su k e sia $\hat{G} = \varinjlim \hat{G}_n$ il gruppo duale. Sia R_n l'algebra affine del gruppo G_n ed osserviamo che l'azione naturale di $\mathcal{G}$ su $G_n(\bar{k})$ commuta con la legge di gruppo; infatti, dato un punto P: $R_n \to \bar{k}$ ed un elemento $s \in \mathcal{G}$, il trasformato di P tramite s è il punto sP: $R_n \to \to \bar{k}$ che si ottiene componendo P con l'automorfismo s di $\bar{k}$ e, con l'usuale significato dei simboli si ha

$$s(P+Q) = s\mu_{\bar{k}}(P \otimes Q)\boldsymbol{P} = \mu_{\bar{k}}(sP \otimes sQ)\boldsymbol{P} = sP + sQ\,, \tag{6.1}$$

poichè s è un omomorfismo di anello.

In particolare, da ciò si deduce che ogni elemento s di $\mathcal{G}$, agendo sulle componenti del limite inverso $T = \varprojlim\, (G(\bar{k}) \leftarrow G(\bar{k}) \leftarrow \dots)$, induce un automorfismo del gruppo additivo T, che è, in realtà, un'applicazione $\mathbb{Z}_p$-lineare. Infatti, ricordando che il punto identità di $G(\bar{k})$ è razionale su k e quindi invariante rispetto all'azione di $\mathcal{G}$, se ne deduce che $s(p^n\Lambda) = = p^n\Lambda\ \forall n \in \mathbb{Z}, \forall s \in \mathcal{G}$. Quindi, dato un intero p-adico $a \in \mathbb{Z}_p$, sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di interi razionali tali che $a_n \equiv a \bmod p^n\mathbb{Z}_p$, e siano x un qualsiasi punto di Λ ed $s \in \mathcal{G}$, se ne deduce che: $s(ax) \equiv s(a_n x) = = a_n s(x) \equiv as(x) \bmod p^n\Lambda$, qualunque sia l'intero positivo n, e quindi che $s(ax) = as(x)$. L'estensione ai punti di T è immediata. Dunque, la scelta di una base (sistema di generatori liberi) di Λ, $x_1, \dots, x_f$, determina un omomorfismo di $\mathcal{G}$ nel gruppo lineare $\boldsymbol{GL}_f(\mathbb{Z}_p)$, ove indichiamo con C_s la matrice invertibile, ad elementi in $\mathbb{Z}_p$, corrispondente all'automorfismo di Λ indotto da $s \in \mathcal{G}$, definita dalla condizione: $(sx_1, \dots, sx_f) = = (x_1, \dots, x_f)\,C_s$; è ovvio osservare che la scelta di una diversa base di Λ determina una rappresentazione coniugata alla rappresentazione data. In particolare, l'omomorfismo C: $\mathcal{G} \to \boldsymbol{GL}_f(\mathbb{Z}_p)$, descritto sopra, definisce un cociclo in $H^1(^{\#}\mathcal{G}, \boldsymbol{GL}_f(B))$ per ogni $\mathbb{Z}_p$-algebra B dotata di azione di Galois. Abbiamo quindi dimostrato la seguente

6.2. Proposizione. *Notazioni come sopra. Ad ogni gruppo di Barsotti-Tate (étale) G su k, di altezza f, resta associata una rappresentazione lineare di rango f su $\mathbb{Z}_p$ del gruppo di Galois $\mathcal{G}$.*

L'algebra affine di G_n è $R_n = \{f\colon G_n(\bar{k}) \to \bar{k} \mid f(sP) = s[f(P)]\ \forall P \in G_n(\bar{k}),\ \forall s \in \mathcal{G}\}$. Si osservi che se si considera l'algebra affine $R_n \otimes \bar{k}$ del gruppo $G_n \otimes \bar{k}$, cambiato di base su $\bar{k}$, si ha che $R_n \otimes \bar{k}$ è l'algebra di tutte le funzioni sul gruppo $G_n(\bar{k})$ ed a valori in $\bar{k}$, e vi è la naturale azione di Galois, definita ponendo

$$(6.3)\qquad [sf](P) = s[f(s^{-1}P)]\ \forall P \in G_n(\bar{k}), \qquad \forall s \in \mathcal{G};$$

in particolare, si ha $R_n = (R_n \otimes \bar{k})^{\mathcal{G}}$ (5). Le operazioni di bialgebra di R_n sono le stesse definite in 2.1, ma in questo caso la funzione $e_P \in R_n$ se, e solo se, P è un punto di G_n razionale su k.

L'algebra affine del gruppo duale $\hat{G}_n$ è $D_n = \{\mu\colon G_n(\bar{k}) \to \bar{k} \mid \mu(sP) = s[\mu(P)]\ \forall P \in G_n(\bar{k}), \forall s \in \mathcal{G}\}$, ed ha ancora senso l'interpretazione in termini di misure, salvo che ora le misure sono soggette alla commutazione con l'azione di $\mathcal{G}$ su $G_n(\bar{k})$ descritta sopra. La struttura di bialgebra di D_n è la stessa definita in 2.1, con restrizione analoga a quella in vigore per la funzione e_P per quanto riguarda l'esistenza in D_n della misura di Dirac ∂_P centrata in P.

È importante osservare che, anche se gli elementi di R_n e D_n sono funzioni e misure a valori in $\bar{k}$, il naturale accoppiamento che se ne deduce è a valori in k e non degenere. Infatti, se $f \in R_n$ e $\mu \in D_n$, si ha

$$(6.4)\qquad \mu \circ f = \sum_{P \in G_n(\bar{k})} f(P)\mu(P) = \sum_{P \in G_n(\bar{k})/\mathcal{G}} \ \sum_{s \in \mathcal{G}/\mathcal{S}tab P} f(sP)\mu(sP),$$

ove $\mathcal{S}tab P$ indica lo stabilizzatore di P in $\mathcal{G}$ e le somme che compaiono sono ambedue finite; inoltre

$$\sum_{s \in \mathcal{G}/\mathcal{S}tab P} f(sP)\mu(sP) = Tr_k^{k'}(f(P)\mu(P)) \in k,$$

ove k' è un'opportuna estensione finita, normale di k. Infine è

(5) Il fatto che $R_n \otimes \bar{k}$ sia l'algebra di tutte le funzioni su $G_n(\bar{k})$ si può vedere nel modo seguente. R_n è un'algebra finita étale e quindi è il prodotto di un numero finito di estensioni (finite) di k, ovvero $R_n \cong \prod_{i=1}^{n} k_i$; ed ognuno dei fattori rappresenta un orbita di $\mathcal{G}$ su $G_n(\bar{k})$. Possiamo quindi ragionare su un singolo fattore e supporre che k' sia un'estensione normale di k, e che $e_1, \dots, e_n$ siano le funzioni caratteristiche dei punti dell'orbita corrispondente a k', ovvero $e_1 = e_P$ ed $e_j = e_{s_jP}$ al variare di s_j in $\mathrm{Gal}(k'/k)$. In particolare, si ha $[k' : k] = n$ ed indichiamo con $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base di k' su k. Dunque

$$s_1(x_1)e_1 + \dots + s_n(x_1)e_n, \dots, s_1(x_n)e_1 + \dots + s_n(x_n)e_n,$$

è una k-base di k' fatta da elementi invarianti. È ben noto che la matrice $X = (s_i(x_j))_{1 \le i,j \le n}$ è invertibile in k' e quindi si possono scegliere come $\bar{k}$-base di $k' \otimes_k \bar{k}$ le funzioni caratteristiche e_j.

sufficiente osservare che, essendo k perfetto, l'accoppiamento della traccia definisce un'applicazione bilineare non degenere.

Osserviamo che vi è un'azione di Galois su $D_n \otimes \bar{k}$, analoga a quella descritta in 6.3 su $R_n \otimes \bar{k}$; rispetto a questa azione D_n è il sottoanello degli elementi invarianti e, precisamente, si ha $[s\mu](P) = s[\mu(s^{-1}P)]$, qualunque siano $P \in G_n(\bar{k})$ ed $s \in \mathcal{G}$. Quindi l'accoppiamento naturale tra $R_n \otimes \bar{k}$ e $D_n \otimes \bar{k}$ (ovvero l'integrazione) risulta essere un'applicazione $\mathcal{G}$-bilineare, ovvero l'applicazione lineare indotta $[R_n \otimes \bar{k}] \otimes [D_n \otimes \bar{k}] \to \bar{k}$ è $\mathcal{G}$-lineare. Infatti si ha

$$s(a \otimes \partial_P) \circ s(b \otimes e_Q) = (sa \otimes \partial_{sP}) \circ (sb \otimes e_{sQ}) =$$

$$= s(ab)\,\delta_{PQ} = s[(a \otimes \partial_P) \circ (b \otimes e_Q)]\,;$$

da cui si deduce, in generale, $(s\mu) \circ (sf) = s(\mu \circ f)$, qualunque siano $\mu \in D_n \otimes \bar{k}$, $f \in R_n \otimes \bar{k}$ ed $s \in \mathcal{G}$.

Da queste osservazioni si ricava facilmente la struttura delle bialgebre

$$R = \varprojlim R_n, \qquad D = \varinjlim D_n, \qquad \hat{R} = \varprojlim D_n, \qquad \hat{D} = \varinjlim R_n,$$

Possiamo quindi enunciare

6.5. Proposizione. *Notazioni come sopra. Le algebre di Barsotti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{D}$ sono uguali rispettivamente all'anello $\bar{\mathcal{R}}$ delle funzioni continue, definite sullo Spazio di Tate T ed a valori in $\bar{k}$, soddisfacenti alla condizione: $f(sq) = s[f(q)]$ $\forall q \in T$, $\forall s \in \mathcal{G}$; ed all'anello $\bar{\mathcal{D}}$ delle misure, definite sulle unioni di sfere aperte di T ed a valori in $\bar{k}$, soddisfacenti alla condizione: $\mu(sq + p^r\Lambda) = s[\mu(q + p^r\Lambda)]$ $\forall q \in T$, $\forall s \in \mathcal{G}$.*

L'integrale di una funzione contro una misura definisce un'applicazione bilineare non degenere a valori in k tra le funzioni uniformemente continue e tutte le misure e tra tutte le funzioni continue e le misure a supporto compatto; tale accoppiamento estende la dualità tra le bialgebre finite descritta sopra.

Si osservi che, dati $s \in \mathcal{G}$ e $q \in T$, si ha: $sq + p^r\Lambda = s(q + p^r\Lambda) = \{sx \mid x \in q + p^r\Lambda\}$, essendo ognuno dei $p^n\Lambda$ stabile rispetto all'azione di $\mathcal{G}$. In particolare diremo che $sq + p^r\Lambda$ e $q + p^r\Lambda$ sono due *sfere coniugate* in T.

Dunque, considerando il rialzamento su A, ${}^{\#}G = \varinjlim {}^{\#}G_n$, del gruppo étale G, si ha che l'algebra affine di ${}^{\#}G$ è l'anello ${}^{\#}R$ formato dalle funzioni da ${}^{\#}G(\bar{A}) = G(\bar{k})$ a valori in A_{nr} che commutano con l'azione di $\mathcal{G}$, dotato delle operazioni di bialgebra descritte in precedenza.

Come già accadeva sul corpo k, si ha che ${}^{\#}R \,\hat{\otimes}_A A_{nr}$ è uguale all'anello di tutte le funzioni su $G(\bar{k})$, a valori in A_{nr}. Analogo risultato si ottiene cambiando ulteriormente di base e sostituendo A_{nr} con $\bar{A}$ o con A_C; in particolare, osserviamo che $({}^{\#}R \hat{\otimes}_A A_{nr})^{\mathcal{G}} \cong {}^{\#}R$ ed $({}^{\#}R \hat{\otimes}_A \bar{A})^{{}^{\#}\mathcal{G}} \cong {}^{\#}R \cong ({}^{\#}R \hat{\otimes}_A A_C)^{{}^{\#}\mathcal{G}}$.

È ben noto (cfr. ad es. [FO1], Ch. III) che il modulo di Dieudonné di G coincide con l'A-modulo delle applicazioni lineari da T su K_{nr}, che assumono valori interi sul reticolo Λ e che commutano con le azioni di $\mathcal{G}$ su T e K_{nr}; ovvero $\boldsymbol{M}(R) \cong \boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k})^{\mathcal{G}}$ ove, come già illustrato nel § 4, $\boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k}) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{fil}}_{\mathbb{Z}_p}(T, K_{nr})$, e l'azione di $\mathcal{G}$ è definita, concordemente con 6.3, ponendo

$$(6.6) \qquad [sh](q) = s[h(s^{-1}q)] \qquad \forall q \in T,\ \forall s \in \mathcal{G},\ \forall h \in \boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k}).$$

In particolare, $\boldsymbol{M}(R)$ è un A-modulo libero di rango uguale all'altezza f del gruppo G ed inoltre gli elementi di $\boldsymbol{M}(R)$ generano le applicazioni lineari, ovvero $\boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k}) \cong \boldsymbol{M}(R) \otimes_A A_{nr}$. Questi fatti hanno una prima conseguenza:

6.7. Proposizione. *Indichiamo con $C \in H^1({}^{\#}\mathcal{G}, \boldsymbol{GL}_f(A_{nr}))$ il cociclo determinato dall'omomorfismo $C\colon \mathcal{G} \to \boldsymbol{GL}_f(\mathbb{Z}_p)$ associato al gruppo étale G nel modo descritto nella Proposizione* 6.2. *Tale cociclo è triviale.*

Dim. Sia $x_1, \dots, x_f$ una base (sistema di generatori liberi) di Λ, e l'omomorfismo C sia definito ponendo $(sx_1, \dots, sx_f) = (x_1, \dots, x_f)C_s$, al variare di s in ${}^{\#}\mathcal{G}$. Consideriamo ora in $\boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k}) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{fil}}_{\mathbb{Z}_p}(T, K_{nr})$ la base (duale) formata dalle applicazioni lineari $h_1, \dots, h_f$, tali che $h_i(x_j) = \delta_{i,j}$ (simbolo di Kronecker). In particolare tali applicazioni hanno tutti i loro valori in $\mathbb{Q}_p$. Si verifica immediatamente che, tramite tali generatori, l'azione di Galois è determinata da C estendendo per semilinearità la seguente

$$\begin{pmatrix} sh_1 \\ \cdots \\ sh_f \end{pmatrix} = C_{s^{-1}} \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_f \end{pmatrix}, \qquad \text{al variare di } s \text{ in } {}^{\#}\mathcal{G}.$$

Dunque un elemento $\beta = b_1 h_1 + \dots + b_f h_f$ di $\boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k})$, è ${}^{\#}\mathcal{G}$-invariante se, e solo se,

$$(sb_1, \dots, sb_f)\, C_{s^{-1}} = (b_1, \dots, b_f) \qquad \forall s \in {}^{\#}\mathcal{G};$$

ovvero se, e solo se, $(sb_1, \dots, sb_f) = (b_1, \dots, b_f)\, C_s\ \forall s \in {}^{\#}\mathcal{G}$. Se indichiamo con $\beta_i = b_{i,1}h_1 + \dots + b_{i,f}h_f$, $i = 1, \dots, f$, una base di generatori invarianti di $\boldsymbol{M}(R \hat{\otimes}_k \bar{k})$, si ha che la matrice $B = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le f}$ è invertibile in

A_{nr}, e soddisfa alla condizione $sB = BC_s$, per ogni $s \in {}^{\#}\mathcal{G}$; ovvero: $C_s = B^{-1}(sB)$. Dunque B determina il cobordo cercato. CVD

Si può descrivere in modo analogo il caso del gruppo duale $\widehat{G}$ e di un suo rialzamento ${}^{\#}\widehat{G}$; osserviamo che, a differenza del caso étale, in cui era sufficiente considerare l'azione del quoziente ${}^{\#}\mathcal{G}/I \cong \mathcal{G}$ sul modulo di Tate del gruppo rialzato, in questo caso occorre considerare l'azione di tutto ${}^{\#}\mathcal{G}$. Dunque, d'ora in poi, parleremo solo dell'azione di questo gruppo di Galois.

Vogliamo quindi descrivere le relazioni indotte dalle mappe dei periodi (cfr. Corollari 4.3 e 5.9) tra le diverse azioni del gruppo di Galois ${}^{\#}\mathcal{G}$ sui moduli coinvolti. Andiamo quindi a descrivere dettagliatamente quali siano le azioni di ${}^{\#}\mathcal{G}$ su $\widehat{\Lambda}$ e su $\boldsymbol{M}(\widehat{R})$. Per quanto riguarda il modulo di Tate $\widehat{\Lambda}$, possiamo precisare il contenuto della Proposizione 5.5 osservando che l'isomorfismo ivi stabilito tra $\widehat{\Lambda}$ ed $\operatorname{Hom}(G(\bar{k}), U_{A_C})$ è un isomorfismo di ${}^{\#}\mathcal{G}$-moduli rispetto alle azioni naturali sui due gruppi. Come già descritto nel caso del gruppo étale, l'azione naturale di ${}^{\#}\mathcal{G}$ sul modulo $\widehat{\Lambda} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} {}^{\#}\widehat{G}_n(\bar{A})$, è così definita: dato un punto $g = (g_0, g_1, \ldots) \in \widehat{\Lambda}$ ed $s \in {}^{\#}\mathcal{G}$, il punto $s(g)$ è quello che si ottiene componendo ciascuno dei $g_i : {}^{\#}D_n \to \bar{A}$ con l'automorfismo s. D'altro canto, l'azione naturale di ${}^{\#}\mathcal{G}$ su $\operatorname{Hom}(G(\bar{k}), U_{A_C})$ è definita ponendo $[sg](P) = s[g(s^{-1}P)]$, al variare di P in $G(\bar{k})$, g in $\operatorname{Hom}(G(\bar{k}), U_{A_C})$ ed s in ${}^{\#}\mathcal{G}$. La definizione di quest'ultima azione, che è usuale per ogni insieme di omomorfismi, è altresì concorde con l'azione naturale su una bialgebra étale, descritta in 6.3 su una base di caratteristica positiva. Si tratta quindi di vedere che le due azioni vengono mutate l'una nell'altra dall'isomorfismo descritto nella dimostrazione della Proposizione 5.5, ovvero dalla dualità di Cartier. Poiché l'azione di ${}^{\#}\mathcal{G}$ su $\widehat{\Lambda}$ è definita sulle componenti del limite inverso, è sufficiente fare la verifica della corrispondenza tra le azioni per il gruppo finito ${}^{\#}\widehat{G}_n(\bar{A})$.

Sia $g = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} a_P \otimes e_P$ un carattere in $\operatorname{Hom}(G(\bar{k}), U_{A_C})$. Il punto di ${}^{\#}\widehat{G}_n(\bar{A})$ che gli corrisponde è l'omomorfismo di $g : {}^{\#}D_n \to \bar{A}$ che trasforma $x = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} x_P \otimes \Delta_P$ in $x \circ g = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} a_P x_P$. Dunque, dato $s \in {}^{\#}\mathcal{G}$, il punto sg trasforma x in $s(x \circ g) = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} s(a_P)s(x_P)$. Poiché $x \in {}^{\#}D_n$ si ha $s(x_P) = x_{sP}$, e quindi se ne deduce:

$$s(x \circ g) = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} s(a_P)s(x_P) = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} s(a_P)x_{sP} = x \circ (sg),$$

ove $sg = \sum_{P\in G_n(\bar{k})} s(a_P) \otimes e_{sP}$ è il trasformato tramite l'azione di s del carattere g.

Ricordando che, in base al Teorema 5.4, il logaritmo commuta con l'azione di ${}^{\#}\mathcal{G}$, possiamo raccogliere le osservazioni fatte nella seguente

6.8 PROPOSIZIONE. *Notazioni come nel* Corollario 5.9. *L'applicazione* $\begin{array}{l}\phi\colon \hat{\Lambda} \to M(R) \otimes A_{nr} \\ \quad\; g \to h_g\end{array}$ *definisce un omomorfismo iniettivo di* $\mathbb{Z}_p$*-moduli, che induce un isomorfismo di* $K_{nr}[{}^{\#}\mathcal{G}]$*-moduli tra* $\hat{\Lambda} \otimes_{\mathbb{Z}_p} K_{nr}$ *ed* $M(R) \otimes_A K_{nr}(1)$.

È naturale che nell'enunciato si può sostituire il corpo K_{nr} con il corpo C che lo contiene.

Non resta quindi altro da fare che descrivere l'azione di ${}^{\#}\mathcal{G}$ su $M(\hat{R}) \otimes A_{nr}$ e confrontarla con l'azione sul modulo di Tate Λ. Abbiamo già visto che sui vari D_n, e quindi su $\hat{R}$, il gruppo di Galois agisce trasformando la misura di Dirac ∂_P in ∂_{sP}, al variare di s in ${}^{\#}\mathcal{G}$. Dunque, l'elemento $\{\partial_x\} \in W(\hat{R} \otimes \bar{k})$ viene trasformato da $s \in {}^{\#}\mathcal{G}$ in $\{\partial_{sx}\}$ e basta perciò osservare che il logaritmo di bivettori conserva l'azione di Galois sulle componenti, per concludere che l'azione di ${}^{\#}\mathcal{G}$ su $M(\hat{R}) \otimes A_{nr}$ si ottiene estendendo per ${}^{\#}\mathcal{G}$-semilinearità la trasformazione che manda il bivettore canonico $\eta_j = \log\{\partial_{x_j}\}$ sul bivettore canonico $\log\{\partial_{sx_j}\}$, al variare di s in ${}^{\#}\mathcal{G}$. Possiamo quindi concludere con la seguente

6.9 PROPOSIZIONE. *Notazioni come nel* Corollario 4.3. *L'applicazione* $\begin{array}{l}\phi\colon \hat{\Lambda} \to M(\hat{R}) \otimes A_{nr} \\ \quad\; x \to \eta_x\end{array}$ *definisce un omomorfismo iniettivo di* $\mathbb{Z}_p$*-moduli, che induce un isomorfismo di* $K_{nr}[{}^{\#}\mathcal{G}]$*-moduli tra* $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} K_{nr}$ *ed* $M(\hat{R}) \otimes_A K_{nr}$.

Anche in questo case nell'enunciato si può sostituire il corpo K_{nr} con il corpo C che lo contiene.

Appendice 1. Osservazioni sui Vettori di Witt.

Cominciamo con lo stabilire un facile e ben noto risultato di algebra sui vettori di Witt [cf. Serre: Corps Locaux].

Chiameremo *anello p-adico perfetto* un'algebra ${}^{\#}D$, di caratteristica zero in cui p non sia né divisore di zero né invertibile e che sia separata e completa rispetto alla topologia p-adica (ovvero un sistema fondamentale di intorni di zero è dato dagli ideali $p^n\,{}^{\#}D$ e ${}^{\#}D = \varprojlim {}^{\#}D/p^n\,{}^{\#}D$). Imponiamo infine che il quoziente $D = {}^{\#}D/p\,{}^{\#}D$ sia perfetto; ovvero che l'applicazione $x \to x^p$ sia un automorfismo di D.

A.1. PROPOSIZIONE. *Sia* ${}^{\#}D$ *un anello p-adico perfetto. Allora vi è un isomorfismo tra l'anello* $W(D)$ *e* ${}^{\#}D$.

La dimostrazione, ben nota, si basa sull'esistenza in ${}^{\#}D$ dei rappresentanti di Teichmüller (moltiplicativi) degli elementi di D, che stabiliamo nel seguente:

A.2. LEMMA. *Notazioni come sopra. Si consideri il sottoinsieme moltiplicativo*

$$T = \bigcap_{n=0}^{\infty} {}^{\#}D^{p^n}$$

di ${}^{\#}D$. Allora il morfismo naturale $\rho: {}^{\#}D \to D$ induce una corrispondenza biunivoca tra T e D.

DIM. Dato $a \in D$ si consideri una successione $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ in ${}^{\#}D$, soddisfacente alle condizioni:

$$\text{(A.3)} \qquad \rho(\alpha_0) = a\,, \qquad \alpha_{i+1}^p \equiv \alpha_i \operatorname{mod} p\, {}^{\#}D\,.$$

È sufficiente osservare che la successione $(\alpha_n^{p^n})_{n \in N}$ converge ad un elemento α di ${}^{\#}D$, ovvero che verifica la condizione di Cauchy. Dalla congruenza in (A.3), si ricava che

$$\alpha_{n+1}^{p^{n+1}} - \alpha_n^{p^n} \in p^{n\#}D \subseteq p^{N\#}D\,,$$

per ogni $n \geqslant N$, che è sufficiente per concludere. È chiaro che $\alpha \in T$ perchè la successione $(\alpha_n^{p^{n-k}})_{n \geqslant k}$ converge ad una radice p^k-esima di α, qualunque sia k. Inoltre, per la prima delle (A.3), si ha $\rho(\alpha_n^{p^n}) = a$ per ogni n e quindi $\rho(\alpha) = a$. Dunque l'applicazione ρ ristretta a T è suriettiva; resta da verificare che è anche iniettiva, Se α e β sono elementi di T che si riducono ad uno stesso $a \in D$, allora si ha che $\alpha/\beta \equiv 1 \operatorname{mod} p^{n\#}D$ per ogni n (l'applicazione $x \to x^p$ è un automorfismo di D) e quindi è uguale ad 1. CVD

Indicheremo con il simbolo $\{a\}$ l'unico elemento di T per cui si abbia $\rho(\{a\}) = a$, al variare di a in D. In particolare, $\{a\}$ è detto il *rappresentante di Teichmüller* (*moltiplicativo*) di $a \in D$.

DIM. (di A.1). È immediato osservare che, dato $\xi \in {}^{\#}D$, si determina una successione $x_0, x_1, \ldots$ di elementi di D, tale che:

$$\xi - \sum_{j=0}^{n} p^j \{x_j\} \in p^n\, {}^{\#}D$$

per ogni n. Infatti è sufficiente porre: $x_0 = \rho(\xi)$, $x_1 = \rho(p^{-1}[\xi - \{x_0\}])$, ecc., ove l'argomento della funzione ρ ha senso perchè p non è divisore di zero in $^{\#}D$. Dunque, si ha:

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty} p^j \{x_j\} \quad \text{in } ^{\#}D; \tag{A.4}$$

e quindi a ξ si fà corrispondere il vettore di Witt: $(x_0, x_1^p, x_2^{p^2}, \ldots)$. La corrispondenza così descritta è l'omomorfismo cercato. CVD

Il risultato si può generalizzare nel modo seguente.

A.5. Corollario. *Sia $^{\#}\mathcal{D}$ un'algebra di caratteristica zero in cui p non sia divisore di zero, separata e completa rispetto ad una topologia $^{\#}\mathcal{D}$-lineare rispetto alla quale la base di filtro $(p^n\, ^{\#}\mathcal{D})$ converga a zero. Supponiamo inoltre che il quoziente $\mathcal{D} = {}^{\#}\mathcal{D}/p\, ^{\#}\mathcal{D}$ sia un'algebra perfetta. Allora vi è un isomorfismo continuo: $\boldsymbol{W}(\mathcal{D}) \to {}^{\#}\mathcal{D}$, ove $\boldsymbol{W}(\mathcal{D})$ è dotato della topologia p-adica.*

Dim. La condizione che la base di filtro $(p^n\, ^{\#}\mathcal{D})$ converga a zero dice che si può ripetere la dimostrazione del Lemma A.2 ed ottenere l'esistenza dei rappresentanti di Teichmüller anche in $^{\#}\mathcal{D}$. La stessa condizione, implica la convergenza in $^{\#}\mathcal{D}$ della serie analoga alla A.4. Dunque, si ha un omomorfismo come nel caso precedente. La continuità è banalmente verificata. CVD

Ci occuperemo ora di una topologia naturale, meno fine della topologia p-adica, da porsi sull'anello $\boldsymbol{W}(\mathcal{D})$ quando $\mathcal{D}$ non sia dotato della topologia discreta. Ci interessa il caso in cui $\mathcal{D}$ è un'algebra di Barsotti associata ad un gruppo di Barsotti-Tate [cf. Definizione 1.4], e quindi, per quanto visto nella Proposizione 1.5, $\mathcal{D}$ è limite inverso di algebre discrete su un campo perfetto k.

Sia quindi $\mathcal{D} = \varprojlim (D \xleftarrow{[p_-]} D \xleftarrow{[p_-]} \ldots)$ ove D è una k-algebra discreta, e poniamo su $\mathcal{D}$ la topologia limite inverso. Ciò significa che un sistema fondamentale di intorni di zero in $\mathcal{D}$ è dato dagli ideali:

$$\mathscr{b}_k = \{\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots) | \mu_k = 0\},$$

ove si ricordi che $[p_-]\mu_{j+1} = \mu_j$ $\forall j \geqslant 0$. In tali ipotesi si ha che:

$$\boldsymbol{W}(\mathcal{D}) = \varprojlim (\boldsymbol{W}(D) \xleftarrow{[p_-]} \boldsymbol{W}(D) \xleftarrow{[p_-]} \ldots),$$

ove, per brevità, si è indicato con $[p_-]$ in luogo di $\boldsymbol{W}([p_-])$ il morfismo funtorialmente indotto. Vogliamo quindi confrontare due topologie naturali su $\boldsymbol{W}(\mathcal{D})$: la topologia canonica di Barsotti [cf. MA] e la topologia limite inverso delle topologie p-adiche sui vari $\boldsymbol{W}(D)$.

Un sistema fondamentale di intorni di zero per la *topologia canonica* è dato dagli ideali:

$$U_n(\mathscr{b}_k) = \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) | j \leqslant n \Rightarrow \xi_j^{p^{-j}} \in \mathscr{b}_k\},$$

ove la scrittura ha senso perché $\mathcal{D}$ è una k-algebra perfetta.

Si osservi che la definizione delle topologia canonica appare più «naturale» se si scrivono i vettori di Witt tramite i rappresentanti di Teichmüller invece che tramite le coordinate. Infatti, in tal modo, al vettore $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ corrisponde la somma:

$$\xi = \sum_{j=0}^{\infty} p^j \{\xi_j^{p^{-j}}\}, \tag{A.5}$$

e dunque un vettore stà in $U_n(\mathscr{b}_k)$ se, e solo se, le immagini in $\mathcal{D}$ dei coefficienti di $1, p, \dots, p^n$ nella scrittura (A.5) stanno tutte in $\mathscr{b}_k$.

Un sistema fondamentale di intorni di zero per la *topologia limite inverso* è dato dagli ideali:

$$V_n(\mathscr{b}_k) = \{(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots) | j \leqslant n \Rightarrow \xi_j \in \mathscr{b}_k\}.$$

Vogliamo provare la seguente

A.6. Proposizione. *Notazioni come sopra. Allora la topologia canonica su* $\boldsymbol{W}(\mathcal{D})$ *è equivalente alla topologia limite inverso.*

Dim. Distinguiamo i vari casi in cui l'algebra di Barsotti $\mathcal{D}$ sia étale, moltiplicativa o radicale. Nel primo caso, ovvero se $\mathcal{D}$ è étale, gli ideali $\mathscr{b}_k$ sono radicali (cf. § 2) e quindi si ha:

$$V_n(\mathscr{b}_k) = U_n(\mathscr{b}_k),$$

qualunque siano n e k. Se $\mathcal{D}$ è moltiplicativa, e $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \in \mathscr{b}_k$, dalla relazione fondamentale $[p_-]\mu_{j+1} = \mu_j$ $\forall j \geqslant 0$, se ne deduce che $\mu_{k+1} \in \ker[p_-] = \ker F_D$ e quindi, in $\mathcal{D}$ vale la condizione: $\mu \in \mathscr{b}_k \Leftrightarrow \mu^p \in \mathscr{b}_{k+1}$. In tal modo si conclude che:

$$V_n(\mathscr{b}_{k+n}) \subseteq U_n(\mathscr{b}_k) \subseteq V_n(\mathscr{b}_k),$$

qualunque siano n e k. Passiamo infine al caso in cui $\mathcal{D}$ sia radicale e sia $V^r = F^s$. Ciò significa che in D vale la condizione $F^{r+s} = [p_-]^r$ e quindi che: $\mu \in \mathscr{b}_k \Leftrightarrow \mu^{p^{r+s}} \in \mathscr{b}_{k+r}$. Così si conclude che:

$$V_n\left(\mathscr{b}_{\left[k + n\frac{r}{r+s}\right]+1}\right) \subseteq U_n(\mathscr{b}_k) \subseteq V_n(\mathscr{b}_k),$$

qualunque siano n e k, ove l'indice dell'ideale $\mathfrak{b}$ è la parte intera del numero racchiuso tra le parentesi quadre. CVD

Le considerazioni sin qui fatte sulla topologia dell'anello $\boldsymbol{W}(\mathcal{O})$ si trasportano senza sostanziali modifiche ai bivettori speciali ad elementi in $\mathcal{O}$. Non possiamo mancare di osservare però che il risultato *è falso* (in generale) in $\mathbf{biv}\,\mathcal{O}$.

Appendice 2. Un'osservazione elementare sui coefficienti binomiali.

Per comodità del lettore, riportiamo qui di seguito una stima elementare dei valori p-adici dei coefficienti binomiali, come si ottiene facilmente dalle definizioni.

OSSERVAZIONE. *Indichiamo con v_p la valutazione p-adica su $\mathbb{Q}$, ove p è un primo razionale.*
Siano $0 \leq a < p^k$ e $0 < c < p^k$; allora:

$$v_p\binom{a+bp^k}{c+dp^k} = \begin{cases} v_p\binom{a}{c} + v_p\binom{b}{d} & \text{se } a \geq c \\ v_p\binom{b}{d} - v_p\binom{c}{a} + k + v_p(b-d) - v_p(c-a) & \text{se } a < c\,. \end{cases}$$

DIM. Dividiamo la dimostrazione in tre passi.

(i) Cominciamo richiamando la dimostrazione della ben nota stima del valore p-adico del fattoriale; ovvero $v_p(n!) = (n - S(n))/(p-1)$, ove $S(n)$ indica la somma delle cifre che compaiono nella scrittura p-esimale di n. Sia $n = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i$; con $0 \leq a_i < p$; allora per le proprietà elementari delle valutazioni si ha

$$v_p(n!) = \sum_{h=1}^{n} v_p(h) = \sum_{h_1=1}^{a_r p^r} v_p(h_1) + \\ + \sum_{h_2=1}^{a_{r-1}p^{r-1}} v_p(a_r p^r + h_2) + \ldots + \sum_{h_{r+1}=1}^{a_0} v_p(a_r p^r + \ldots + a_1 p + h_{r+1})\,.$$

Per le ipotesi fatte sui coefficienti a_i e le proprietà elementari delle valutazioni, si ha

$$v_p(a_r p^r + \ldots + a_i p^i + h_{r-i+1}) = v_p(h_{r-i+1}) = v_p(h_{r-i+1})\,.$$

Dunque si tratta di calcolare: $\sum_{h=1}^{a_k p^k} \nu_p(h)$, ove tale somma viene posta uguale a zero se $a_k = 0$. Poichè si può supporre $0 < a_k < p$, si ha: $\sum_{h=1}^{a_k p^k} \nu_p(h) = a_k \sum_{h=1}^{p^k} \nu_p(h) = a_k(p^k - 1)/(p-1)$. Ove l'espressione mantiene senso anche per $a_k = 0$ e per $k = 0$. Dunque si conclude con l'uguaglianza voluta

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=0}^{r} a_k \frac{p^k - 1}{p - 1} = \frac{n - S(n)}{p - 1}.$$

(ii) Dimostriamo ora un caso particolare della stima enunciata, ovvero mostriamo che, se $0 < j \leqslant p^k$, allora

$$\nu_p \binom{p^k}{j} = k - \nu_p(j).$$

Possiamo supporre $j \neq p^k$, in quanto, per $j = p^k$, la tesi è banalmente vera. Servendosi di (i), si ricava:

$$\nu_p \binom{p^k}{j} = \nu_p(p^k!) - \nu_p((p^k - j)!) - \nu_p(j!) = \frac{S(j) + S(p^k - j) - 1}{p - 1}.$$

Sia $s = \nu_p(j)$ e scriviamo: $j = a_s p^s + a_{s+1} p^{s+1} + \ldots + a_r p^r$, ove si ha $a_s \neq 0$ ed $r \leqslant k - 1$. D'altro canto possiamo scrivere: $p^k = (p-1)p^{k-1} + \ldots + (p-1)p^{s+1} + pp^s$; quindi si ha:

$$p^k - j = (p-1)p^{k-1} + \ldots + (p - 1 - a_r)p^r + \\ + \ldots + (p - 1 - a_{s+1})p^{s+1} + (p - a_s)p^s,$$

ove ogni coefficiente in tale somma è compreso tra 0 e $p - 1$. Dunque, si ha $S(p^k - j) = (p-1)(k-s) - S(j) + 1$, da cui si ricava:

$$\nu_p \binom{p^k}{j} = k - s = k - \nu_p(j).$$

(iii) Nel caso generale, il calcolo è analogo a quello del punto (ii). Siano $0 < c \leqslant a < p^k$; allora da quanto visto sopra si ricava:

$$\nu_p \binom{a + bp^k}{c + dp^k} = \frac{S(c + dp^k) + S((a - c) + (b - d)p^k) - S(a + bp^k)}{p - 1}.$$

Poichè sia c che a che $a - c$ sono interi non negativi e minori di p^k, si ha:

$S(c + dp^k) = S(c) + S(d)$, $S(a + bp^k) = S(a) + S(b)$, e $S((a - c) + (b - d)p^k) = S((a - c)) + S((b - d))$. Se ne deduce che

$$\nu_p\binom{a + bp^k}{c + dp^k} = \nu_p\binom{b}{d} + \nu_p\binom{a}{c},$$

che è quanto volevamo dimostrare nell'ipotesi in cui $c \leqslant a$.

Supponiamo ora che si abbia: $c > a$. Ancora una volta si ha:

$$\nu_p\binom{a + bp^k}{c + dp^k} = \frac{S(c + dp^k) + S((a - c) + (b - d)p^k) - S(a + bp^k)}{p - 1}.$$

e, come nel caso precedente, si ha: $S(c + dp^k) = S(c) + S(d)$, $S(a + bp^k) = S(a) + S(b)$. Si tratta quindi di calcolare $S((a - c) + (b - d)p)$ nell'ipotesi in cui $a - c < 0$. Poichè $a + bp^k \geqslant c + dp^k$, se ne deduce che deve essere $d \leqslant b - 1$ e quindi si ha: $(a - c) + (b - d)p^k = [p^k - (c - a)] + (b - d - 1)p^k$. Dunque:

$$S((a - c) + (b - d)p^k) = S(p^k - (c - a)) + S(b - d - 1).$$

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nella dimostrazione di (ii) si può dedurre che:

$$S(p^k - (c - a)) = (k - \nu_p(c - a))(p - 1) + 1 - S(c - a)$$

ed

$$S(b - d - 1) = \nu_p(b - d)(p - 1) + S(b - d) - 1.$$

Dunque, se ne deduce che:

$$\nu_p\binom{a + bp^k}{c + dp^k} =$$

$$= \frac{S(c) + S(d) + (k - \nu_p(c - a))(p - 1) + 1 - S(c - a) + \nu_p(b - d)(p - 1) + S(b - d) - 1 - S(a) - S(b)}{p - 1}$$

che è quanto volevamo. CVD

BIBLIOGRAFIA

[BA] F. Baldassarri, *Interpretazione funzionale di certe iperalgebre e dei loro anelli di bivettori di Witt*, Tesi, Università di Padova AA. 1972-73.

[FO1] J-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles sur les Corps Locaux*, Astérisque, **47-48** (1977).

[FO2] J-M. FONTAINE, *Sur certaines types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate*, Ann. Math, **115** (1982), pp. 529-577.

[MA] I. BARSOTTI, *Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica positiva*, Ann. S.N.S. Pisa, **18** (1964) pp. 1-25, **19**, (1965), pp. 277-330, **19**, (1965), pp. 481-512, **20** (1966) pp. 101-137, **20** (1966), pp. 331-365.

[MM] B. MAZUR - W. MESSING, *Universal Extension and one dimensional Crystalline Cohomology*, LNM, **370**, Springer (1974).

[PD] M. CANDILERA - V. CRISTANTE, *Periods and duality of p-adic Barsotti-Tate groups*, in preparazione.

[TA] J. TATE, *p-divisible groups*, in *Proc. Conf. on Local Fields, NUFFIC Summer School, Driebergen*, Springer, 1967 pp. 158-183.

[VP] I. BARSOTTI, *Varietà Abeliane su corpi p-adici; parte prima*, Symposia Mathematica, **1** (1968), pp. 109-173.

[WR] M. CANDILERA - V. CRISTANTE, *Witt realization of p-adic Barsotti-Tate groups*, in corso di stampa nel volume *Proceedings of Barsotti Memorial Symposium*, Academic Press.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 settembre 1992.