RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO MAINARDIS

Gruppi con pochi sottogruppi non quasinormali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 88 (1992), p. 245-261

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1992__88__245_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 88 (1992)

Gruppi con pochi sottogruppi non quasinormali.

MARIO MAINARDIS (*)

In questa nota si vuole studiare il sottogruppo, che indicheremo con $Q(G)$, generato dai sottogruppi non quasinormali di un gruppo G. Ricordiamo che due sottogruppi H e K di G si dicono *permutabili*, se l'insieme $HK := \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ coincide con l'insieme $KH := \{kh \mid k \in K, h \in H\}$. Si vede facilmente che tale condizione è verificata se e solo se l'insieme HK coincide con il sottogruppo generato da H e da K. Un sottogruppo di G si dice *quasinormale* (o *permutabile*) in G se permuta con ogni altro sottogruppo di G. In particolare un sottogruppo normale è quasinormale. Dalla definizione si verifica facilmente che il sottogruppo generato da una famiglia qualsiasi di sottogruppi quasinormali in G è quasinormale in G. Segue da ciò che, detto S il sottogruppo generato dai sottogruppi ciclici non quasinormali di G, S coincide con $Q(G)$. Infatti è chiaro che $S \leq Q(G)$. Viceversa ogni sottogruppo F di G non contenuto in S è generato dalla parte $H \setminus S$ i cui elementi generano sottogruppi ciclici quasinormali in G; dunque H è quasinormale in G. Ne segue che ogni sottogruppo non quasinormale di G è contenuto in S e, quindi, $S = Q(G)$. In seguito faremo spesso uso di questa osservazione.

È evidente che $Q(G)$ si riduce al sottogruppo identico se e solo se ogni sottogruppo di G è quasinormale, cioè se G è un gruppo quasi-hamiltoniano. Chiaramente un gruppo hamiltoniano è quasi-hamiltoniano. La struttura dei gruppi quasi-hamiltoniani non hamiltoniani è stata determinata da Iwasawa [I1] e [I2] (vedi anche Napolitani [N1]); ricordiamo che questi gruppi ammettono delle proiettività (cioè degli isomorfismi tra i rispettivi reticoli dei sottogruppi) su gruppi abeliani (vedi [Su], pag. 39-41).

Diremo che G è un *X-gruppo* se G è identico oppure se $Q(G)$ è strettamente contenuto in G. Un tale gruppo è, in particolare, generato da sottogruppi ciclici quasinormali; poichè questi sono ascendenti (ve-

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35131 Padova, Italia.

di [St2], Prop. 1.7, pag. 67), risulta che G è di Gruenberg (vedi [R], Par. 12.2).

Sulla struttura degli X-gruppi si sono ottenuti i seguenti risultati:

TEOREMA A. *Un gruppo generato da sottogruppi ciclici quasinormali di ordine infinito è quasi-hamiltoniamo.*

Da ciò si dedurrà, come corollario, che un X-gruppo misto è quasi-hamiltoniano.

TEOREMA B. *G è un X-gruppo di torsione se e solo se G è un prodotto diretto da p-gruppi non identici H_p, per primi p distinti, tali che per ogni p sia $Q(H_p) \neq H_p$ e, per al massimo un primo p, sia $Q(H_p) \neq \{1\}$.*

TEOREMA C. *Sia p un primo dispari e G un p-gruppo di esponente finito. G è un X-gruppo non quasi hamiltoniano se e solo se G è il prodotto di due sottogruppi H e K con le seguenti proprietà:*

a) *H non è quasi-hamiltoniano e K è ciclico;*

b) *esiste un sottogruppo N normale in G e contenuto in $H \cap K$ tale che il gruppo quoziente G/N sia quasi-hamiltoniano;*

c) *l'esponente di H/N^p è minore o uguale all'esponente di K/N.*

La dimostrazione di questo teorema dipende dal fatto che, se p è dispari, $Q(G)$ coincide con $\Omega_n(G)$, dove p^n è l'estremo superiore degli ordini dei sottogruppi ciclici non quasinormali di G. Questo risultato non sussiste nel caso in cui G sia un 2-gruppo, come si vede dal seguente contro-esempio:

$$G = \langle a, b, x \mid a^8 = b^2 = x^8 = 1, [a, b] = a^4x^4, [x, b] = [a, x] = 1 \rangle .$$

Infatti G ha ordine 2^7. $\langle a \rangle$ non è quasinormale perchè non permuta con $\langle b \rangle$. Ogni elemento z del tipo ux^k con k dispari ed u in $\langle a, b \rangle$ genera un sottogruppo ciclico quasinormale in G, perchè $\langle z^4 \rangle$ è centrale in G e $G/\langle z^4 \rangle$ è quasi-hamiltoniano per [Su], Theorem 14, pag. 13. Detto B l'insieme di questi elementi, si verifica immediatamente che $G \setminus B$ è un sottogruppo di G che contiene $Q(G)$.

Si lascia aperto il problema della determinazione dei 2-gruppi G di esponente finito in cui $G \neq Q(G)$.

Nel caso in cui G non abbia esponente finito, da [NZ], Satz 1.5, si ottiene immediatamente il seguente risultato:

TEOREMA D. *Sia G un p-gruppo di esponente infinito. Allora G è un X-gruppo se e solo se i sottogruppi non normali di G generano un sottogruppo proprio.*

La struttura di questi gruppi è stata determinata da D. Cappitt in [C].

Infine, riguardo alla lunghezza derivata degli X-gruppi si è ottenuta la seguente limitazione (si ricordi che G è di Gruenberg dunque l'insieme dei 2-elementi è un sottogruppo):

TEOREMA E. *Un X-gruppo in cui il 2-sottogruppo di Sylow della componente di torsione sia quasi-hamiltoniano è metabeliano.*

Questo lavoro è stato svolto come tesi di laurea presso l'Università di Padova; vorrei ringraziare il mio relatore Prof. Franco Napolitani per il suo incoraggiamento ed i suoi preziosi consigli.

Notazioni.

Se G è un gruppo indicheremo con

$T(G)$ il sottogruppo generato dagli elementi di torsione di G,
$Z(G)$ il centro di G,
$L(G)$ il reticolo dei sottogruppi di G,
$|X|$ la cardinalità di un sottoinsieme X di G,
$o(x)$ il periodo di un elemento x di G.

Se G è un p-gruppo, indicheremo con

$\Omega_z(G)$ il sottogruppo di G generato dagli elementi periodo minore od uguale a p^n,

$\mho_n(G)$ il sottogruppo di G generato dalle p^n-esime potenze degli elementi di G.

Se L è un reticolo ed H e K sono due elementi di L, indicheremo con

$H \vee K$ il minimo elemento di L maggiore od uguale ad H e K,

$H \wedge K$ il massimo elemento di L minore od uguale ad H e K;

se H è maggiore od uguale a K indicheremo con

$[H/K]$ il sottoreticolo di L formato dagli elementi di L che sono minori od uguali a H e maggiori od uguali a K.

Tutte le altre notazioni usate sono come in [R].

Risultati preliminari.

Sia L un reticolo; un elemento M di L si dice *di Dedekind* (o *modulare*) *in* L se, per ogni altro elemento N di L, le applicazioni

$$\varphi\colon [M \vee N/M] \to [N/M \wedge N], \qquad \varphi(H) := H \wedge N,$$

e

$$\psi\colon [N/M \wedge N] \to [M \vee N/M], \qquad \psi(K) := K \vee M,$$

sono isomorfismi di reticoli uno inverso dell'altro. Un reticolo si dice *modulare* se ogni suo elemento è di Dedekind.

Un gruppo si dice *modulare* se il reticolo dei suoi sottogruppi è modulare. Dalla legge modulare di Dedekind ([R], pag. 15) si deduce che ogni sottogruppo quasinormale in un gruppo G è di Dedekind in $L(G)$, in particolare un gruppo quasi-hamiltoniano è modulare. Viceversa, per [S2], Prop. 1.7, un sottogruppo di Dedekind in $L(G)$ ed ascendente in G è quasinormale. In particolare, se G è un gruppo di Gruenberg, le nozioni di Dedekind in $L(G)$ e quasinormale in G sono equivalenti.

LEMMA 1. *Sia G un gruppo ed H un suo sottogruppo. Allora*

a) $Q(H)$ è contenuto in $Q(G)$;

b) se H non è contenuto in $Q(G)$, l'intervallo $[G/H]$ è modulare;

c) se H è normale in G allora $Q(G/H)$ è contenuto in $Q(G)H/H$.

DIMOSTRAZIONE. *a)* Se K è un sottogruppo non quasinormale in H, a maggior ragione non lo è in G, quindi $Q(H)$ è contenuto in $Q(G)$. *b)* Ogni sottogruppo K di G contenente H è quasinormale in G e, quindi, è un elemento di Dedekind in $L(G)$ dunque di ogni suo sottoreticolo; in particolare K è un elemento di Dedekind di $[G/H]$, cioè $[G/H]$ è modulare. *c)* Sia K un sottogruppo di G contenente H. Se K/H non è quasinormale in G/H, allora K non è quasinormale in G, dunque $Q(G/H)$ è contenuto in $Q(G)H/H$. ■

LEMMA 2. *Sia G un gruppo non quasi-hamiltoniano. Allora*

a) $Q(G)$ non è quasi-hamiltoniano;

b) ogni sottogruppo non contenuto in $Q(G)$ ha intersezione non identica con ogni sottogruppo non quasi-hamiltoniano di G;

c) ogni sottogruppo non identico di G ha intersezione non identica con $Q(G)$.

DIMOSTRAZIONE. *a*) Discende immediatamente dal fatto che un gruppo non è quasi-hamiltoniano se e solo se esistono due sottogruppi tra loro non permutabili e tali sottogruppi devono essere contenuti in $Q(G)$. *b*) Il risultato è ovvio se $G = Q(G)$. Sia $G \neq Q(G)$ e, per assurdo, K un sottogruppo non contenuto in $Q(G)$ avente intersezione identica con un sottogruppo non quasi-hamiltoniano H. Poichè K è un sottogruppo quasinormale di G, segue che $L(H) = [H/(H \wedge K)]$ è isomorfo a $[HK/K]$ che è modulare per il Lemma 1.*b*. Ma G è di Gruenberg, quindi anche H. Ne segue che H è quasi-hamiltoniano, il che è assurdo. *c*) Discende immediatamente dai punti *a*) e *b*). ■

I seguenti risultati, che si ottengono facilmente dal teorema di Iwasawa sui p-gruppi quasi-hamiltoniani finiti ([Su], Theorem 14, pag, 13), mi sono stati segnalati da R. Schmidt, Kiel, che ne ha dato anche una dimostrazione, inedita, indipendente dal teorema di Iwasawa.

LEMMA 3. *Sia G un p-gruppo quasi-hamiltoniano ed X un suo sottogruppo ciclico di esponente massimo. Allora, se X è normale in G, ogni sottogruppo di $C_G(X)$ è normale in G e $G/C_G(X)$ è ciclico.*

LEMMA 4. *Sia G un p-gruppo quasi-hamiltoniano, X un suo sottogruppo ciclico di esponente massimo ed U un sottogruppo di G tale che $U \wedge X = \{1\}$ ed $U^X = U$. Allora ogni sottogruppo di U è normale in G.*

X-gruppi misti.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA A. Sia G un gruppo generato da sottogruppi quasinormali ciclici e di ordine infinito. Osserviamo che G è quasi-hamiltoniano se e solo se è localmente quasi-hamiltoniano; inoltre, poichè ogni sottogruppo finitamente generato di G è contenuto in un sottogruppo finitamente generato da sottogruppi quasinormali, ciclici e di ordine infinito, possiamo supporre G finitamente generato. Osserviamo che, essendo G di Gruenberg, $T(G)$ è un sottogruppo periodico di G. Ogni sottogruppo ciclico quasinormale X, di ordine infinito, opera su $T(G)$ come un gruppo di automorfismi potenza. Infatti, se $H \leqslant T(G)$, per la legge modulare di Dedekind, risulta $H = H(T(G) \wedge X) = HX \wedge T(G)$ che è normale in HX. Poichè G è generato da sottogruppi ciclici, quasinormali e di ordine infinito, ogni sottogruppo di $T(G)$ è normale in G e, quindi, anche in $T(G)$. Segue da ciò che $T(G)$ è abeliano o hamiltoniano. D'altra parte, poichè gli elementi di periodo primo o 4 sono centrali (vedi [Su], pag. 19) $T(G)$ è abeliano e, se $G/T(G)$ è ciclico, G è quasi-hamiltoniano. Se $G/T(G)$ non è ciclico, possiamo scegliere un sistema di generatori $x_{i,\,h(i)}$ di

G ($i = 1, \ldots, n$ ed $h(i), \ldots, r_i$ con n ed r_i in $\mathbb{N}$), tali che ciascun $\langle x_{i,\,h(i)} \rangle$ sia quasinormale, ciclico e di ordine infinito e $\langle x_{i,\,h(i)} \rangle \wedge \langle x_{j,\,h(j)} \rangle = \{1\}$ se e solo se $i \neq j$ (in tal caso, quindi, per [S1], Lemma 2.1, $[x_{i,\,h(i)}, x_{j,\,h(j)}] = 1$). Posto $G_i = \langle x_{i,\,h(i)} \mid h(i) = 1, \ldots, r_i \rangle$, per [KM], exercise 16.2.9, $G_i / T(G_i)$ è ciclico e, quindi, G_i è quasi-hamiltoniano. Sia a un elemento di periodo finito in G_i. Poichè $x_{j,\,h(j)}\,a$ ed a inducono lo stesso automorfismo su G_i e $G_i \wedge \langle x_{j,\,h(j)}\,a \rangle = \{1\}$ se $i \neq j$, segue, per [S1], Lemma 2.1, che a normalizza e, quindi, centralizza $\langle x_{i,\,h(i)} \rangle$ per ogni $h(i) = 1, \ldots, r_i$. Da ciò risulta che ciascun G_i è abeliano, gli elementi $x_{i,\,h(i)}$ ($i = 1, \ldots, n$ ed $h(i) = 1, \ldots, r_i$) commutano a due a due e, quindi, G è abeliano. ■

COROLLARIO. *Un X-gruppo misto è quasi-hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un X-gruppo misto. Esiste un insieme di indici I tale che $G = \langle x_i \mid i \in I \rangle$ ed x_i non appartiene a $Q(G)$ per ogni $i \in I$. Poichè G è di Gruenberg, esiste $j \in I$ tale che x_j ha periodo infinito (vedi [9], Ch. 12). Per ogni $i \in I$ definiamo x_i^* nel modo seguente:

$x_i^* := x_i$ se x_i ha periodo infinito,

$x_i^* := x_i x_j$ se x_i ha periodo finito e $x_i x_j$ non appartiene a $Q(G)$,

$x_i^* := x_i x_j^2$ se x_i ha periodo finito e $x_i x_j$ appartiene a $Q(G)$.

Si verifica immediatamente che, per ogni $i \in I$, $\langle x_i^* \rangle$ è quasinormale, di ordine infinito ed il sottogruppo generato da questi è tutto G. Quindi, per il Teorema A, G è quasi-hamiltoniano. ■

X-gruppi di torsione.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA B. G è di Gruenberg, quindi è prodotto diretto di p-gruppi H_p, che possiamo supporre non identici, per primi p distinti. Ora, se $G = H \times K$ ed N è un sottogruppo non quasinormale di H, il sottogruppo $\langle N, K \rangle$ non è quasinormale in G, dunque $Q(G)$ contiene $Q(H)$ e K. Segue da ciò che G è come nel Teorema B. Viceversa, se G è come nel Teorema B, si verifica immediatamente che G è quasi-hamiltoniano se tali sono tutti i suoi sottogruppi di Sylow; se, invece, esiste un (unico) sottogruppo di Sylow H_q, tale che $Q(H_q) \neq \{1\}$, allora $Q(G) = Q(H_q)\langle H_p \mid p \neq q \rangle \neq G$. ■

LEMMA 5. *Se G è un gruppo non quasi-hamiltoniano, il gruppo quoziente $G/Q(G)$ è localmente ciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre che G sia finitamente generato, inoltre, ricordando che, se $G \neq Q(G)$, allora G è di Gruenberg, possiamo restringerci al caso in cui G sia un p-gruppo. Sia per assurdo $G/Q(G)$ non ciclico. Esistono allora due sottogruppi ciclici $\langle x_1 \rangle$ e $\langle x_2 \rangle$ tali che $\langle x_1 Q(g) \rangle$ ed $\langle x_2 Q(G) \rangle$ non sono confrontabili. Per [NZ], Hilfssatz 1.4, $\langle x_1, x_2 \rangle$ è quasi-hamiltoniano. Poichè $Q(G)$ non è quasi-hamiltoniano, esiste, per [Su], Prop. 1.8, pag. 14, una sezione S/T di $Q(G)$ isomorfa ad un gruppo non quasi-hamiltoniano di ordine p^3. Se $\langle x_1, x_2 \rangle$ non è hamiltoniano, il suo reticolo è isomorfo a quello di un gruppo abeliano, dunque esiste un gruppo abeliano A ed un isomorfismo di reticoli

$$\pi\colon [\langle x_1, x_2 \rangle / (T \wedge \langle x_1, x_2 \rangle)] \rightarrow L(A).$$

In particolare A ha rango 2, essendo Tcontenuto in $Q(G)$. Possiamo, allora scegliere due elementi y_1 ed y_2 in $\langle x_1, x_2 \rangle$ tali che l'intersezione di $\langle y_1 \rangle$ ed $\langle y_2 \rangle$ sia identica modulo $\langle x_1, x_2 \rangle \wedge T$. Sia ora $\langle z_i \rangle = \langle y_i \rangle \wedge S$, con $i = 1,2$. Poichè l'intervallo $[S/\langle z_i \rangle]$ è isomorfo, essendo $\langle y_i \rangle$ quasinormale, a $[S\langle y_i \rangle / \langle y_i \rangle]$, e questo è modulare per il Lemma 1.*b*, mentre $[S/T]$ non lo è, risulta che z_i non appartiene a T. D'altra parte, per [B], Prop. 1.7, $\langle z_i \rangle$ è quasinormale in G, quindi S/T contiene i due sottogruppi quasinormali ciclici $\langle z_1 T \rangle$ e $\langle z_2 T \rangle$; questi sono distinti perchè il gruppo da essi generato è isomorfo a $\langle z_1, z_2 \rangle / (T \wedge \langle z_1, z_2 \rangle)$ che non è ciclico, il che è una contraddizione, perchè, come si vede facilmente, un gruppo non quasi-hamiltoniano di ordine p^3 ha un solo sottogruppo quasinormale ciclico non identico. Se $\langle x_1, x_2 \rangle$ è hamiltoniano, $\langle x_1, x_2 \rangle$ è isomorfo al gruppo dei quaternioni di ordine 8. Ne segue che $\langle x_i \rangle \wedge S = \langle x_i^2 \rangle$ perchè x_i non appartiene a $S \leqslant Q(G)$ ed $\langle x_i \rangle \wedge S \neq \{1\}$ per il Lemma 2.*c*). Siano a_1 ed a_2 elementi di S tali che $o(a_1 T) = o(a_2 T) = 2$ e $\langle a_1 T, a_2 T \rangle = S/T$. I sottogruppi $\langle x_1 \rangle$ ed $\langle x_2 \rangle$ hanno intersezione identica con $\langle a_1 \rangle$ ed $\langle a_2 \rangle$ perchè $[S/\langle a_i^2 \rangle]$ non è modulare, essendo $\langle a_i^2 \rangle \leqslant T$, mentre $[S/\langle x_i^2 \rangle]$ è modulare. Se $o(a_i)$ fosse strettamente maggiore di 2, osservando che $\langle x_1, a_i x_2 \rangle Q(G)/Q(G)$ coincide con $\langle x_1, x_2 \rangle Q(G)/Q(G)$, ed $\langle x_1 \rangle \wedge \langle a_i x_2 \rangle = \{1\}$, potremmo, a meno di scambiare x_2 con $a_i x_2$, ricondurci al caso in cui $\langle x_1, x_2 \rangle$ non è hamiltoniano. Dunque $[a_1, a_2] = x_i^2$ e, quindi, $\langle a_1, a_2 \rangle$ è un gruppo diedrale di ordine 8 essendo generato da due involuzioni il cui commutatore ha periodo 2. Poichè $\langle a_i, x_1 \rangle$ $(= \langle a_i x_1, x_1 \rangle)$ è quasi-hamiltoniano non hamiltoniano di esponente 4, essendo generato da due sottogruppi quasinormali di esponente 4 ed aventi intersezione identica, risulta che $\langle a_1, a_2, x_1 \rangle$ è isomorfo al prodotto centrale di un gruppo diedrale di ordine 8 con gruppo ciclico di ordine 4, che non è un X-gruppo, in contraddizione con il Lemma 1.a). ■

LEMMA 6. *Sia G un p-gruppo generato da sottogruppi ciclici quasinormali e di ordine minore od uguale a p^n, per un numero primo dispari p. Allora l'applicazione che ad ogni elemento x di G associa $x^{p^{n-1}}$ è un endomorfismo di G la cui immagine è contenuta in $\Omega_1(Z(G))$.*

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre che G sia finitamente generato. L'enunciato segue, allora, per induzione sul numero dei generatori di G, tenendo presente che ciò è vero per i gruppi quasi-hamiltoniani (vedi [Su], pag. 15) e, se p è dispari, un p-gruppo generato da due sottogruppi ciclici permutabili è quasi-hamiltoniano (vedi [H], 11.2 e 11.5). ■

LEMMA 7. *Sia G un p-gruppo, $p \neq 2$, H e K due sottogruppi di G tali che K è ciclico e quasinormale in G e $G = HK$. Sia N un sottogruppo normale in H con nucleo identico in G. Allora N è ciclico.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, sia N non ciclico, dunque contenga un sottogruppo abeliano elementare $\langle a, b\rangle$ di ordine p^2. Essendo K un sottogruppo quasinormale e quindi massimale in $\langle a\rangle K$ e in $\langle b\rangle K$, K è normalizzato da a e da b. Poichè $\mathrm{Aut}(K)$ è ciclico, $C = C_{\langle a, b\rangle}(K)$ non è identico e quindi C^G $(= C^H)$ è contenuto in N e non è identico, il che è una contraddizione. ■

I seguenti risultati verranno utilizzati nella dimostrazione del Lemma 12. Per comodità del lettore si è cercato, dove possibile, di usare le stesse notazioni con le quali verranno applicati.

LEMMA 8. *Sia $G = \langle u, b, x\rangle$ un p-gruppo, $p \neq 2$, con le seguenti proprietà:*

i) $o(u) = o(x) = p^n$, $n \in \mathbb{N}$, $o(b) = p$;

ii) $\langle u, b\rangle$ *non è quasi-hamiltoniano*;

iii) *l'intervallo* $[G/\Omega_1(\langle x\rangle)]$ *è modulare.*

Allora x è contenuto in $Q(G)$.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo, sia x non contenuto in $Q(G)$. Si osservi che $G = \langle ux, bx, x\rangle$ con $\langle ux\rangle$, $\langle bx\rangle$ ed $\langle x\rangle$ quasinormali e di esponente p^n, dunque tale è l'esponente di G. Il sottogruppo $\Omega_1(\langle x\rangle)$ è, per il Lemma 6, normale in G ed il gruppo quoziente $G/\Omega_1(\langle x\rangle)$ è quasi-hamiltoniano. In particolare, $\langle u \rangle$ ha intersezione identica con $\langle x \rangle$. Ne segue che $[u, b] = u^{rp^{n-1}} x^{tp^{n-1}}$, con r e t interi, $(t, p) = 1$. Posto $y = u^r x^t$, i sottogruppi $\langle y \rangle$, $\langle u, y \rangle$ e $\langle u^2 y \rangle$ sono normalizzati da b, perchè non contenuti in $Q(G)$ e quindi quasinormali. Da ciò, essendo $(uy)^b = u^b y^b = uy^{p^{n-1}} y^b$, segue che $y^b = y^{1-p^{n-1}}$ (si osservi che $\langle uy \rangle \wedge \langle y \rangle = \{1\}$). Quindi risulta

$$y^{p^{n-1}} = (u^2 y)^{-1} (u^2 y) y^{p^{n-1}} = (u^2 y)^{-1} (u^2 y^{2p^{n-1}} y^{1-p^{n-1}}) = (u^2 y)^{-1} (u^2 y)^b$$

che appartiene a $u^2 y$, il che è una contraddizione perchè $\langle y \rangle \wedge \langle u^2 y \rangle = \{1\}$, essendo $p \neq 2$. ■

OSSERVAZIONE. Sia G un p-gruppo, a ed y elementi di G tali che $a^{y^{-1}} = a^t$ per un intero t. Sia σ_t la funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ definita da

$$\sigma_t(l) := \sum_{i=0}^{l-1} (t)^i$$

(vedi [Su], pag. 40).

Allora, per induzione su l, si verifica facilmente che

$$(ay)^l = a^{\sigma_t(l)} y^l$$

per ogni numero naturale l.

LEMMA 9. *Sia $G = \langle a, b, x \rangle$ un p-gruppo, $p \neq 2$, con le seguenti proprietà:*

i) $o(a) = o(x) = p^n$, $p < o(b) < p^n$;

ii) $\langle a, b \rangle$ *non è quasi-hamiltoniano*;

iii) $\Omega_1(\langle b \rangle)$ non è centrale;

iv) *l'intervallo* $|G/\Omega_1(\langle x \rangle)|$ *è modulare*;

v) $\langle a^p \rangle$ *è normale in* G.

Allora x appartiene a $Q(G)$.

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo sia $x \notin Q(G)$. Come nel Lemma 8, $\Omega_1(\langle x \rangle)$ è centrale e $G/\Omega_1(\langle x \rangle)$ è quasi-hamiltoniano, quindi $\langle x \rangle \wedge \langle a \rangle = \{1\}$. Sia $N = \langle a^p \rangle$. Poichè $\langle xN \rangle$ e $\langle bxN \rangle$ sono quasinormali e, quindi massimali rispettivamente in $\langle xN, aN \rangle$ e $\langle bxN, aN \rangle$, $\langle xN \rangle$ e $\langle bxN \rangle$ sono normalizzati da aN. Ne segue che i commutatori $[a, x^{-1}]$, $[a, bx]$ e quindi $[a, b]$ $(= [a, x^{-1}][a, bx]^{x^{-1}})$ sono contenuti in $\Omega_1(\langle x \rangle) N$. In particolare esistono degli interi l ed m tali che $[a, x] N = x^{*l} N$ e $[a, b] N = x^{*m} N$, con x^* in $\Omega_1(\langle x \rangle)$. Poichè $\langle a, b \rangle / N$ è nilpotente di classe 2 a derivato di ordine p, dev'essere $(m, p) = 1$. Esiste quindi un intero r tale che $rm \equiv -l \pmod p$. Posto $y = xb^r$, i commutatori $[a, y]$ e $[a, b^p]$ sono contenuti in N; dunque y e b^p normalizzano $\langle a \rangle$. Poichè $\langle y \rangle$ ed $\langle ay \rangle$ sono quasinormali, essi sono normalizzati da $\Omega_1(\langle b \rangle)$. Ricordando che $o(b) > p$, segue che, se b^* è un generatore di $\Omega_1(\langle b \rangle)$, esistono degli interi r_a ed r_y tali che $a^{b^*} = a^{1 + r_a p^{n-1}}$, $y^{b^*} = y^{1 + r_y p^{n-1}}$ e quindi $(ay)^{b^*} = a^{b^*} y^{b^*} = a^{1 + r_a p^{n-1}} y^{1 + r_y p^{n-1}} = (ay)(a^{r_a p^{n-1}} y^{r_y p^{n-1}})$ per il Lemma 6. Osservando che $\langle a \rangle \cap \langle y \rangle = \{1\}$, essendo $\Omega_1(\langle x \rangle) = \Omega_1(\langle y \rangle)$, si ottiene $r_a \equiv r_y \pmod p$ e, essendo b^* non centrale per ipotesi, $(r_y, p) = 1$. Da tutto ciò, posto $p^s = o(b)$ segue che esistono degli interi t, t_a, t_y primi con p e degli interi q ed h tali che

$$[a, b] = a^{t_a p^{n-s}} y^{t p^{n-1}}, \qquad [y, b] = y^{t_y p^{n-s}} b^q, \qquad [a, y] = a^{hp^k}.$$

Possiamo supporre, a meno di scambiare y con una sua opportuna potenza, che t sia 1. Essendo $\langle a^i y \rangle$ quasinormale in G ($i = 1, 2$), esistono l_i ed m_i in $\mathbb{N}$, tali che

$$(a^i y)^{l_i} b^{m_i} = (a^i y)^b = a^{i(1 + t_a p^{n-s})} y^{ip^{n-1}} y^{1 + t_y p^{n-s}} b^q.$$

Poichè è $\langle a, y \rangle \wedge \langle b \rangle = \{1\}$, risulta $m_1 \equiv m_2 \equiv q \pmod{o(b)}$ e, essendo $\langle a \rangle \wedge \langle y \rangle = \{1\}$, per l'osservazione precedente, risulta $1 + t_y p^{n-s} + ip^{n-1} \equiv l_i \pmod{p^n}$. Posto $l = 1 + t_y p^{n-s}$, ricordando che $\mho_{n-1}(G)$ è centrale per il Lemma 6, risulta

$$(a^i y)^l = (a^i y)^{l_i} a^{-i^2 p^{n-1}} y^{-ip^{n-1}} = a^{i(1 + t_a p^{n-s}) - i^2 p^{n-1}} y^l.$$

Quindi, posto $m = 1 + hp^k$, si ottiene

$$i\sigma_m(l) \equiv i(1 + t_a p^{n-s}) - i^2 p^{n-1} \pmod{p^n}$$

e dunque

$$2 + 2t_a p^{n-s} - 2p^{n-1} \equiv 2\sigma_m(l) \equiv 2 + 2t_a p^{n-s} - 4p^{n-1} \pmod{p^n},$$

cioè

$$2p^{n-1} \equiv 4p^{n-1} \pmod{p^n},$$

il che è assurdo. ■

LEMMA 10. *Sia G un p-gruppo, $p \neq 2$, $\langle x \rangle$ un sottogruppo ciclico di ordine massimo e quasinormale in G. Allora*

i) *$\Omega_1(\langle x \rangle)$ è centrale;*

ii) *se $|G/\Omega_1(\langle x \rangle)|$ è modulare ed $\langle u \rangle$ è un sottogruppo ciclico di ordine massimo e non quasinormale in G, esiste un elemento v in G tale che $\langle u, v \rangle$ non è quasi-hamiltoniano e $\langle u, x \rangle \wedge \langle v \rangle = \{1\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X = \Omega_1(\langle x \rangle)$. i) Se $g \in G$ allora $\langle x, g \rangle$ è quasi-hamiltoniano per [H] 11.5 Satz e [NZ] Hilfssatz 1.4. Se segue, per il Lemma 6, che ogni g in G centralizza X, dunque X è centrale. ii) Poichè $\langle u \rangle$ non è quasinormale esiste un elemento v^* in G tale che $\langle u, v^* \rangle$ non è quasi-hamiltoniano. $\langle uX, v^*X \rangle$ è quasi-hamiltoniano perchè sottogruppo del gruppo quasi-hamiltoniano G/X, dunque il suo reticolo è isomorfo a quello di un gruppo abeliano. Ne segue che, essendo uX di periodo massimo in G (si noti che $\langle u \rangle \wedge \langle x \rangle = \{1\}$, essendo $\langle u \rangle$ non quasinormale), esiste un elemento v di G tale che $\langle uX, vX \rangle = \langle uX, v^* X \rangle$ e $\langle u \rangle \wedge \langle v \rangle \leq X$ (e quindi $\langle u \rangle \wedge \langle v \rangle = \{1\}$). Poichè $X\mho_1(\langle u, v^* \rangle) = \phi(\langle u, v^* \rangle)$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle u, v^* \rangle$. Se $\Omega_1(\langle v \rangle) \leq \Omega_1(\langle x, u \rangle)$ $(= \Omega_1(\langle u \rangle) X)$, allora $\Omega_1(\langle v \rangle)$ sarebbe centrale in $\langle u, v \rangle$ e $X \leq \Omega_1(\langle u \rangle)\Omega_1(\langle v \rangle)$ il che è assurdo perchè $\langle u, v \rangle$ non è quasi-hamiltoniano. Dunque $\langle v \rangle \wedge \langle u, x \rangle = \{1\}$. ■

OSSERVAZIONE. Con la dimostrazione precedente si è provato anche che per ogni elemento v^* di G tale che $\langle u, v^* \rangle$ non è quasi-hamiltoniano esiste un complemento ciclico $\langle v \rangle$ di $\langle u \rangle$ in $\langle u, v^* \rangle$ con $\langle u, x \rangle \wedge \langle v \rangle = \{1\}$.

LEMMA 11. *Sia G un gruppo di esponente p^n, $p \neq 2$, u ed x due elementi di G di periodo p^n con le seguenti proprietà:*

i) *$\langle x \rangle$, $\langle xu \rangle$, $\langle x^2 u \rangle$ sono quasinormali in G;*

ii) *$[G/\Omega_1(\langle x \rangle)]$ è modulare;*

iii) *$\langle u \rangle$ non è quasinormale in G.*

Allora u non normalizza $\langle x \rangle$.

DIMOSTRAZIONE. Posto $X = \Omega_1(\langle x \rangle)$, X è centrale per il Lemma 10 e, quindi, da ii) G/X è quasi-hamiltoniano. Poichè $\langle u \rangle$ non è quasinormale, $\langle u \rangle \wedge \langle x \rangle = \{1\}$. Ne segue che in G/X l'elemento uX ha periodo massimo. Supponiamo per assurdo che u normalizzi $\langle x \rangle$. Allora uX normalizza $\langle xX \rangle$ nel gruppo quasi-hamiltoniano G/X e quindi, per il Lemma 4, $\langle xX \rangle \trianglelefteq G/X$, cioè $\langle x \rangle \trianglelefteq G$. Sia $v \in G$ tale che $\langle u, v \rangle$ non sia quasi-hamiltoniano (un tale elemento esiste per il Lemma 10). Poichè $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, risulta $x^{u^{-1}} = x^r$ ed $x^v = x^s$ per degli interi r ed s. Inoltre, essendo G/X quasi-hamiltoniano, risulta $u^v = u^h v^k x^{tp^{n-1}}$ per degli interi h, k, t, con $(t, p) = 1$. Poichè (per $i = 1, 2$) $\langle x^i u \rangle$ è quasinormale, esistono degli interi l_i ed m_i tali che

$$(x^i u)^{l_i} v^{m_i} = (x^i u)^v = x^{is + tp^{n-1}} u^h v^k$$

(si ricordi che $\Omega_1(\langle x \rangle)$ è centrale).

Essendo $\langle x, u\rangle \wedge \langle v\rangle = \{1\} = \langle x\rangle \wedge \langle u\rangle$, risulta, analogamente al Lemma 9, che $k \equiv m_i \pmod{o(v)}$, $h \equiv l_i \pmod{p^n}$ e $i\mathfrak{S}_r(h) \equiv is + tp^{n-1} \pmod{p^n}$ da cui si ottiene $2tp^{n-1} \equiv tp^{n-1} \pmod{p^n}$ il che è assurdo. ∎

LEMMA 12. *Sia G un p-gruppo finito, $p \neq 2$. Allora G è un X-gruppo se e solo se il suo esponente è strettamente maggiore di quello di $Q(G)$.*

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che, se $\exp(Q(G)) < \exp(G)$ allora G è un X-gruppo. Viceversa sia G un controesempio di ordine minimo. Poichè G è generato da sottogruppi ciclici quasinormali, il suo esponente è strettamente maggiore di p (altrimenti G sarebbe abeliano).

PASSO 1. *Dimostriamo che*

a) $G = HK$ *con* K *ciclico e* $H = \langle u, v\rangle$ *non quasi-hamiltoniano;*

b) $o(u) = |K| = \exp(G)$;

c) per ogni elemento x in $G \setminus Q(G)$ risulta $o(x) = \exp(G)$, il gruppo quoziente $G/\Omega_1(\langle x\rangle)$ è quasi-hamiltoniano e $H \wedge \langle x\rangle = \Omega_1(\langle x\rangle)$;

d) $o(v) < \exp(G)$, $\langle u\rangle \wedge \langle v\rangle = \{1\}$ e $|G| = o(u)o(v)|K|$.

Sia p^n l'esponente di G. Per il Lemma 6 esiste un sottogruppo ciclico non quasinormale $\langle u\rangle$ di ordine p^n e, quindi, esiste un elemento b di G tale che $\langle u, b\rangle$ non è quasi-hamiltoniano. Poniamo $H = \langle u, b\rangle$. Sia z un elemento di ordine minimo in $G \setminus Q(G)$. Allora $G = \langle u, b, z\rangle$. Per il Lemma 6, il sottogruppo $\Omega_1(\langle u\rangle)$ è centrale ed il gruppo quoziente $G/\Omega_1(\langle u\rangle)$ è ancora un X-gruppo non quasi-hamiltoniano; in particolare $\langle u\rangle\Omega_1(\langle u\rangle)$ è contenuto in $Q(G/\Omega_1(\langle u\rangle))$. Poichè $|G/\Omega_1(\langle u\rangle)| < |G|$, il periodo di $z\Omega_1(\langle u\rangle)$, non essendo questo (per il Lemma 1.*c*) contenuto in $Q(G/\Omega_1(\langle u\rangle))$, è strettamente maggiore del periodo di $u\Omega_1(\langle u\rangle)$. Quindi $o(z)$ deve coincidere con $o(z\Omega_1(\langle u\rangle))$ e $\langle u\rangle \wedge \langle z\rangle = \{1\}$. Da ciò, essendo z di periodo minimo in $G \setminus Q(Q)$, risulta che ogni sottogruppo ciclico non contenuto in $Q(G)$ ha ordine p^n ed intersezione identica con $\langle u\rangle$. Sia ora x un qualsiasi elemento di $G \setminus Q(G)$. Poniamo $K = \langle x\rangle$ ed $X = \Omega_1(K)$. Sia inoltre L definito da $L/X = Q(G/X)$. Per il Lemma 1.*c*, L è contenuto in $Q(G)$ e, dunque, non contiene K. Ne segue, essendo G un controesempio minimo, che $\exp(L/X) < |K/X| = p^{n-1}$ e, quindi $\exp(L) \leq p^{n-1}$.

In particolare u non appartiene a L ed inoltre, ricordando che $\langle u\rangle$ ha intersezione identica con K ed entrambi hanno ordine strettamente maggiore dell'esponente di L, il gruppo $\langle u, x\rangle L/L$ non è ciclico. Questo implica che $(G/X)/(L/X)$ non è ciclico e, quindi, per il Lemma 5, il gruppo quoziente G/X è quasi-hamiltoniano. Poichè $H/\mho_1(H)$ non è quasi-hamiltoniano per [H] 11.5 Satz e [NZ] Hilfssatz 1.4, risulta, per il Lemma 2.b, $H \wedge K = X$. Per l'osservazione al Lemma 10 si vede che esiste un elemento v di H tale che $H = \langle u, v \rangle$ e $\langle u, x \rangle \wedge \langle v \rangle = \{1\}$. Dev'essere $o(v) < \exp(G)$, altrimenti $G/\Omega_1(\langle v \rangle)$ contraddirebbe l'ipotesi di minimilità di G. Infine, poichè H ha ordine $o(u)\,o(v)\,|X|$ (essendo H/X quasi-hamiltoniano) si ottiene

$$|G| = |H|\,|K|/|H \wedge K| = o(u)\,o(v)\,|X|\,|K|/|X| = o(u)\,o(v)\,|K|\,.$$

PASSO 2. *Sia N un sottogruppo di $\mho_1(H)$ massimale rispetto alla proprietà di essere normale in G. Allora*

a) N è ciclico;

b) $\mho_1(H)/N$ è ciclico;

c) H/N è nilpotente di classe 2.

Poichè N è contenuto in $\mho_1(H)$, i gruppi H/N e, quindi, G/N non sono quasi-hamiltoniani. Dunque, per il passo precedente, $N \wedge \langle z \rangle = \{1\}$ per ogni z in $G \setminus Q(G)$. Ne segue, per la legge modulare di Dedekind, che ogni sottogruppo di N è normale in G. Questo implica, essendo G un controesempio minimo, che l'unico sottogruppo di ordine p in N è $\Omega_1(\langle u \rangle)$ e, quindi, essendo p dispari, N è ciclico. Per il Lemma 7, $\mho_1(H)/N$ è ciclico dunque il gruppo metaciclico H/XN ha un sottogruppo massimale ciclico e, quindi, $[uN, vN]$ è del tipo $x^* h^* N$con x^* in X ed $h^* N$ in $\mho_1(H/N) \wedge \Omega_1(H/N)$. Ne segue che il centro di H/N contiene il sottogruppo (di ordine p) generato da $x^* h^* N$ che coincide quindi con $(H/N)'$.

PASSO 3. $o(uN) > o(vN)$.

Sia per assurdo $o(uN) \leq o(vN)$, mostriamo che G verifica le ipotesi del Lemma 9, dal che seguirà la contraddizione. Per il Passo 2 esiste un intero r tale che $u^p N = v^{rp} N$. Posto $a = uv^{-r}$, risulta, per [R], 5.3.5, che $a^p N = u^p v^{-rp} [v^{-r}, u]^{\binom{p}{2}} N = 1_{G/N}$. Dunque $\langle a^p \rangle = N$ perchè N è ciclico e di ordine minore di p^n cioè di $o(a)$; inoltre $\langle a, v \rangle = \langle u, v \rangle$. Per l'osservazione al Lemma 10 esiste un complemento ciclico $\langle b_1 \rangle$ di $\langle a \rangle$ in $\langle a, v \rangle$. Poichè per ipotesi v^p non è contenuto in $\langle a \rangle$, segue che $o(b_1) = o(b_1 N) > p$. Inoltre, per l'ipotesi di minimalità, $\Omega_1(\langle b_1 \rangle)$ non è centrale. Per il Lemma 9 l'elemento x appartiene a $Q(G)$ il che è una contraddizione.

OSSERVAZIONE. Poichè $\mho_1(H)/N$ è ciclico, $v^p N$ è contenuto in $\langle uN\rangle$; per l'osservazione al Lemma 10, esiste un elemento c in H, tale che $\langle cN\rangle$ sia un complemento di $\langle uN\rangle$ in H/N. Dev'essere, allora, $o(cN) = p$ e $\langle u, c\rangle = \langle u, c, N\rangle = H$, essendo N contenuto in $\phi(H)$.

PASSO 4. *Con le notazioni dell'osservazione precedente, N coincide con $\langle c^p\rangle$ e ciò esclude che $o(c) = p$.*

Osserviamo che, essendo $o(cN) = p$, l'elemento c^p appartiene a N che, quindi, coincide con $\langle c^p\rangle$ se $o(c) > |N|$. Sia dunque, per assurdo, $o(c) \leqslant |N|$. Allora, essendo $\langle c, N\rangle$ metaciclico non ciclico, esiste un complemento $\langle c'\rangle$ di N in $\langle c, N\rangle$, di ordine p. È facile ora verificare che il gruppo G soddisfa le ipotesi del Lemma 8 il che è una contraddizione, perchè $x \notin Q(G)$.

OSSERVAZIONE. Si vede facilmente che G verifica le ipotesi del Lemma 11, dunque nessun sottogruppo generato da un elemento z, con z in $G \setminus Q(G)$, è normalizzato da u. Ne segue che, essendo $\langle u, x\rangle$ metaciclico di ordine p^{2n} e $o(u) = o(x) = p^n$, deve esistere un elemento d in $\langle u, x\rangle$ tale che x normalizza $\langle d\rangle$ e $\langle u, x\rangle = \langle d, x\rangle$.

PASSO 5. *Con le notazioni dell'osservazione precedente, $\langle d\rangle$ è normale in G.*

Osserviamo che $\langle d\rangle \wedge \langle v\rangle = \langle d, x\rangle \wedge \langle v\rangle = \{1\}$. Sia $p^s = o(v)$. Se $\langle d, v\rangle$ non è quasi-hamiltoniano, $\langle d, v\rangle$ ha ordine $o(d)\,o(v)\,|X| = p^{n+s+1}$ ed esistono degli interi t, q ed un elemento x^* in X tali che $d^v = d^{1+tp} v^{qp} x^*$. Per la minimalità di G, $\langle d, v^p\rangle$ è quasi-hamiltoniano. Esistono, quindi, degli interi i, m tali che $(d^p)^v = (d^v)^p = (d^{1+tp} v^{qp})^p x^{*p} = (d^{1+tp} v^{pq})^p = d^i v^m$. Dunque anche $\langle d^p, v\rangle$ è quasi-hamiltoniano ed ha ordine p^{n+s-1}. Segue da ciò, essendo $\langle d^p, v, x\rangle = \langle d^p, v\rangle\langle x\rangle$, che $\langle x\rangle \wedge \langle d^p, v\rangle = \{1\}$. Per la legge modulare di Dedekind, ricordando che x normalizza $\langle d\rangle$ e $\Omega_1(\langle xv\rangle) = X \nleqslant \langle d^p, v\rangle$ (essendo $o(v) < o(x)$), risulta $\langle d^p\rangle = \langle d^p\rangle(\langle d^p\rangle^{\langle v\rangle} \wedge \langle xv\rangle) = \langle d^p\rangle(\langle d^p\rangle^{\langle xv\rangle} \wedge \langle xv\rangle) = \langle d^p\rangle^{\langle xv\rangle} \wedge \langle d^p, xv\rangle$ che è normale in $\langle d^p, xv\rangle$. Dunque $\langle d^p\rangle$ è normale in $\langle d, xv, x\rangle$, cioè in tutto G. Sia N^* il sottogruppo di $\mho_1(\langle d, v\rangle)$ massimale rispetto alla proprietà di essere normale in G. N^* coincide con $\langle d^p\rangle$, quindi, essendo $\Omega_1(\langle v\rangle)$ non normale in G e $o(v) > p$, dev'essere $o(dN^*) < o(vN^*)$ il che si dimostra essere assurdo come il Passo 3 sostituendo d a u e N^* a N. Dunque $\langle d, v\rangle$ è quasi-hamiltoniano ed ha ordine p^{n+s}; ha quindi, intersezione identica con K e con $\langle xv\rangle$. Applicando nuovamente la legge modulare di Dedekind risulta $\langle d\rangle = \langle d\rangle(\langle d\rangle^{\langle v\rangle} \wedge \langle xv\rangle) = \langle d\rangle(\langle d\rangle^{\langle xv\rangle} \wedge \langle xv\rangle) = \langle d, xv\rangle \wedge \langle d\rangle^{\langle xv\rangle}$ che è normale in $\langle d, xv\rangle$. Come sopra risulta che $\langle d\rangle$ è normale in $\langle d, xv, x\rangle$, cioè in G.

OSSERVAZIONE. Per l'osservazione precedente al Passo 5 risulta, dunque, che d appartiene a $Q(G)$.

PASSO 6. *Con le notazioni del passo precedente, risulta* $|\langle v\rangle/C_{\langle v\rangle}(\langle d\rangle)| < |\langle x\rangle/C_{\langle x\rangle}(\langle d\rangle)|$ *e, quindi, esiste un'opportuna potenza* x^q *di* x *(con* $p|q$*) tale che* $[x^q v, d] = 1$.

Sia per assurdo $|\langle v\rangle/C_{\langle v\rangle}(\langle d\rangle)| \geqslant |\langle x\rangle/C_{\langle x\rangle}(\langle d\rangle)|$. Esiste allora una potenza v^r di v tale che $[xv^r, d] = 1$. Applicando il Lemma 3 al gruppo quasi-hamiltoniano G/X e ricordando che $\langle dX\rangle$ è normale e di esponente massimo, risulta $\langle xv^r X\rangle \trianglelefteq G/X$. Quindi $\langle xv^r\rangle \lhd G$, essendo $X = \Omega_1(\langle xv^r\rangle)$, ed $xv^r \notin Q(G)$, il che è assurdo perchè, per l'osservazione precedente al Passo 5, nessun elemento di $G \setminus Q(G)$ genera un sottogruppo normale in G.

PASSO 7. *Con le notazioni del passo precedente, posto* $T = \Omega_1(\langle x^q v\rangle)$, *risulta* $T \neq X$ *e, quindi,* $\Omega_1(\langle v\rangle) \leqslant XT$.

Sia per assurdo $T = X$. Allora G/T è quasi-hamiltoniano, $\langle dT\rangle$ è normale e di esponente massimo in G/T ed è centralizzato da $x^q vT$. Per il Lemma 3 $\langle x^q vT\rangle$ è normale in G/T e, quindi, $\langle x^q v\rangle$ è normale in G. Posto $S = \Omega_1(\langle dx\rangle)$, G/S è quasi-hamiltoniano per il Passo 1, essendo, per l'osservazione precedente al Passo 6, $dx \notin Q(G)$. Inoltre $\langle dS\rangle$ è normale e di esponente massimo in G/S (essendo $S \nleqslant \langle d\rangle$). Di nuovo per il Lemma 3, xS induce un automorfismo potenza (universale) su $C_{G/S}(\langle dS\rangle)$ e, quindi, esistono un intero t, con $t \equiv 1 \pmod p$, e degli elementi s_1 ed s_2 in S tali che $d^x = d^t s_1$ e $(x^q v)^x = (x^q v)^t s_2$. Poichè $\langle x^q v\rangle$ e $\langle d\rangle$ sono normali in G ed hanno intersezione identica con $\langle dx\rangle$, risulta $s_1 = s_2 = 1$ e, quindi, x induce un automorfismo potenza (universale e congruo a 1 modulo p) sul gruppo abeliano $\langle d, x^q v\rangle$. Ne segue che $G = \langle x, d, x^q v\rangle$ è quasi-hamiltoniano per [Su] Theorem 14, il che è una contraddizione.

PASSO 8. $\Omega_1(\langle v\rangle)$ *è centrale in G, da cui segue la contraddizione finale.*

$\langle x, d\rangle$ è quasinormale in G e, quindi, T, che ha ordine p induce su $\langle x, d\rangle$ un automorfismo potenza. Questo automorfismo è universale per [N2] Lemma 1.2, e quindi è identico essendo $T \leqslant C_G(\langle d\rangle)$. Ne segue che $C_G(T) = \langle x, d, x^q v\rangle = G$. Per il Passo 7 anche $\Omega_1(\langle v\rangle)$ è centrale, da cui la contraddizione finale, essendo $G/\Omega_1(\langle v\rangle)$ un controesempio di ordine strettamente minore di $|G|$. ∎

Se G è un gruppo, indichiamo con $U(G)$ l'intersezione di tutti i sottogruppi ciclici non contenuti in $Q(G)$. Chiaramente $U(G)$ è ciclico e caratteristico in G e, quindi, tale è anche ogni sottogruppo di $U(G)$.

LEMMA 13. *Sia G un p-gruppo di esponente finito, $p \neq 2$. Allora $G/U(G)$ è quasi-hamiltoniano.*

DIMOSTRAZIONE. Il lemma è trivialmente vero se $G = Q(G)$; infatti in questo caso $U(G)$ è l'intersezione dell'insieme vuoto e, quindi, coincide con G. Sia $G \neq Q(G)$ e $p^n = \exp(Q(G))$, dimostriamo l'asserto per induzione su n. Per il Lemma 11 esiste un elemento x di periodo p^{n+1} in $G \setminus Q(G)$. Sia $X = \Omega_1(\langle x \rangle)$. Per il Lemma 5 e per il Lemma 11, $X \leq U(G)$. Per il Lemma 1.c e per il Lemma 11, $\exp(Q(G/X)) < < o(xX) = p^n$. In particolare, se $n = 1$, G/X e, quindi, $G/U(G)$ sono quasi-hamiltoniani. Se $n > 1$; $G/X/U(G/X)$ è quasi-hamiltoniano per ipotesi induttiva e, quindi, anche $G/U(G)$ essendo, per il Lemma 1.c, $U(G)/X \geq U(G/X)$. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA C. Sia N il minimo sottogruppo di $U(G)$ tale che G/N sia quasi-hamiltoniano. Il teorema è allora dimostrato ponendo K un qualsiasi sottogruppo ciclico di ordine massimo in G ed H il sottogruppo di G tale che $H/N^p = Q(G/N^p)$. ■

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA E. Usando le stesse notazioni del Teorema C, il gruppo quoziente G/N è quasi-hamiltoniano; dunque, per [Su], Theorem 14, pag. 13, $G/N = (A/N)(\langle x \rangle /N)$, dove A/N è abeliano e, per ogni elemento a di A, risulta $a^x = a^{1+p^t} x_a$, con t intero indipendente dalla scelta di a ed x_a in N. Inoltre, a meno di scambiare x con bx, dove b è un elemento di periodo massimo in A, possiamo supporre che x non appartenga a $Q(G)$. Da ciò segue che $G' = = \langle [a, x] \mid a \in A \rangle N$. Quindi è sufficiente dimostrare che per ogni coppia di elementi a e b in A risulta

$$([[a, x], [b, x]] = [a^{p^t}, b^{p^t}] =)[a, b]^{p^t} = 1 .$$

Questo discende dal fatto che, ricordando che $N \leq U(G)$ è centrale,

$$[a, b] = [a, b]^x = [a^{1+p^t} x_a, b^{1+p^t} x_b] = [a^{1+p^t}, b^{1+p^t}] =$$

$$= [a, b]^{(1+p^t)^2} = [a, b]^{1+2p^t+p^{2t}},$$

ossia $o([a, b]) \leq p^t$. ■

BIBLIOGRAFIA

[B] G. BUSETTO, *Proprietà d'immersione dei sottogruppi modulari localmente ciclici nei gruppi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **63** (1980), pp. 269-274.

[C] D. CAPPITT, *Generalized Dedekind Groups*, J. Algebra, **17** (1971), pp. 310-316.

[H] B. HUPPERT, *Endliche Gruppen I*, Berling-Heidelberg-New York (1967).

[I1] K. IWASAWA, *Über die endlichen Gruppen und die Verbände ihrer Untergruppen*, J. Univ. Tokyo, **4-3** (1941), pp. 171-199.

[I2] K. IWASAWA, *On the structure of infinite M-groups*, Jap. J. Math., **18** (1943), pp. 709-728.

[KM] M. I. KARGAPOLOV - JU. I. MERZLJAKOV, *Fundamental of the Theory of Groups*, New York-Heidelberg-Berlin (1979).

[N1] F. NAPOLITANI, *Sui p-gruppi modulari finiti*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **39** (1967), pp. 296-303.

[N2] F. NAPOLITANI, *Gruppi finiti minimali non modulari*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **45** (1971), pp. 229-248.

[NZ] F. NAPOLITANI - G. ZACHER, *Über das Verhalten der Normalteiler unter Projektivitäten*, Math. Z., **183** (1983), pp. 371-380.

[R] D. J. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, New York-Heidelberg-Berlin (1982).

[St1] S. E. STONEHEWER, *Permutable subgroups of infinite groups*, Math. Z., **125** (1972), pp. 1-16.

[St2] S. E. STONEHEWER, *Modular subgroup structure in infinite groups*, Proc. London Math. Soc., **32** (1976), pp. 63-100.

[Su] M. SUZUKI, *Structure of a Group and the Structure of its Lattice of Subgroups*, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1957).

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 gennaio 1990, e, in forma riveduta, il 29 maggio 1991.