RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO MIRANDA

Sulla variazione totale del gradiente di una funzione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 88 (1992), p. 229-243

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1992__88__229_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 88 (1992)

Sulla variazione totale del gradiente di una funzione.

MARIO MIRANDA (*)

Se u è una funzione reale definita su R^n e sommabile, la variazione totale del suo gradiente può essere calcolata mediante la seguente operazione

$$\sup\left\{\int_{R^n} u(x)\operatorname{div}\phi(x)\,dx \mid \phi\in[C_0^1(R^n)]^n,\ |\phi(x)|\leq 1\ \forall x\right\}.$$

Tale variazione totale viene spesso indicata con il simbolo

$$\int_{R^n}|Du|;$$

e, nel caso in cui $u\in C^1(R^n)$, o più generalmente abbia gradiente localmente sommabile, si avrà

$$\int_{R^n}|Du| = \int_{R^n}|Du(x)|\,dx.$$

Una proprietà generale dell'operatore $\int_{R^n}|Du|$, di verifica immediata, è la semicontinuità:

$$\lim_h \int_{R^n}|u_h-u|\,dx=0 \Rightarrow \min\lim_h \int_{R^n}|Du_h| \geq \int_{R^n}|Du|.$$

Se poi $\{\tau_h\}$ è una successione di funzioni regolari approssimanti la misura di Dirac, avremo

$$\lim_h \int_{R^n}|u*\tau_h-u|\,dx=0 \quad \text{e} \quad \lim_h \int_{R^n}|D(u*\tau_h)(x)|\,dx=\int_{R^n}|Du|$$

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Facoltà di Scienze dell'Università di Trento, 38050 Povo (Trento), Italia.

dove $u * \tau_h$ sta ad indicare il prodotto di convoluzione

$$(u * \tau_h)(x) = \int_{R^n} u(y)\,\tau_h(x-y)\,dy.$$

Ricordiamo che possono prendersi funzioni τ_h contenute in $C_0^\infty(R_n)$ con $\tau_h(x)=0$ per $|x|>h^{-1}$, oppure funzioni analitiche reali come

$$h^n \sqrt{\pi}^{-n} e^{-h^2|x|^2},$$

che verificano

$$\int_{R^n} \tau_h(x)\,dx = 1, \qquad \forall h \text{ e } \lim_h \tau_h(x) = 0, \qquad \forall x \neq 0.$$

Ricordiamo anche che può definirsi una successione regolarizzante $\{v_h\}$ di funzioni a supporto compatto con le proprietà:

$$\lim_h \int_{R^n} |v_h - u|\,dx = 0, \qquad \int_{R^n} |Dv_h(x)|\,dx \leq \int_{R^n} |Du| + 2^{-h}, \qquad \forall h;$$

per le quali vale ancora ovviamente

$$\lim_h \int_{R^n} |Dv_h(x)|\,dx = \int_{R^n} |Du|.$$

Una grande novità in questo tipo di approssimazioni fu presentata da Luciano Modica e Stefano Mortola nel 1977. In un articolo del Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, essi provarono che per ogni $u \in L^1(R^n)$ e ogni $\{u_h\} \subset L^1(R^n)$ con $\{|Du_h|\} \subset L^1(R^n)$ e con

$$\lim_h \int_{R^n} |u - u_h|\,dx = 0,$$

vale

$$\min\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1}|Du_h(x)|^2 + h\,\mathrm{sen}^2[\pi h\,u_h(x)]\}\,dx \geq \frac{4}{\pi}\int_{R^n} |Du|.$$

Essi provarono altresì l'esistenza di successioni di funzioni $\{w_h\}$ lipschitziane, convergenti ad u in $L^1(R^n)$, con

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1}|Dw_h(x)|^2 + h\,\mathrm{sen}^2[\pi h\,w_h(x)]\}\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{R^n} |Du|.$$

Questo risultato di Modica e Mortola vogliamo estendere ad un'ampia classe di funzioni continue, che possono prendere il posto della funzione trigonometrica nel funzionale approssimante.

Dimostreremo innanzitutto e facilmente che, per ogni

$$g: R \to R$$

continua e limitata, per la quale esista il

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^t |g(s)|\, ds = \lambda \in R,$$

vale

$$\min_h \lim \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(hu_h(x))\}\, dx \geq 2\lambda \int_{R^n} |Du|,$$

ogni volta che la successione $\{u_h\}$ converga ad u in $L^1(R^n)$.

Dimostreremo inoltre, come in Modica-Mortola, che se g è periodica di periodo 1 e $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei suoi zeri, allora per ogni u sommabile esiste una successione $\{w_h\}$ di funzioni lipschitziane, convergente ad u in $L^1(R^n)$ e verificante

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1} |Dw_h(x)|^2 + hg^2(hw_h(x))\}\, dx = 2\lambda \int_{R^n} |Du|.$$

1. Per ogni $\{u_h\} \subset L^1(R^n)$ con $Du_h(x)$ misurabile, vale la diseguaglianza

$$h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(hu_h(x)) \geq 2|Du_h(x)|\ |g(hu_h(x))|, \quad \forall h, \quad \forall x.$$

D'altra parte, posto

$$G_h(t) = h^{-1} \int_0^{ht} |g(s)|\, ds,$$

nei punti $x \in R^n$ in cui esista $Du_h(x)$ varrà

$$|Du_h(x)|\ |g(hu_h(x))| = |DG_h(u_h(x))|.$$

Avendo allora indicato con λ il limite

$$\lim_{t \to \infty} t^{-1} \int_0^1 |g(s)|\, ds,$$

supposto esistente e finito, avremo:

$$\lim_h G_h(t) = \lambda t, \qquad \forall t \in R;$$

quindi anche, avendo supposta g limitata, in tutti i punti x nei quali sia $\lim_h u_h(x) = u(x)$,

$$\lim_h G_h(u_h(x)) = \lambda u(x).$$

Poiché possiamo assumere, ai fini della dimostrazione della nostra diseguaglianza, che valga per quasi ogni x

$$\lim_h u_h(x) = u(x),$$

e poiché la successione $\{G_h\}$ è di funzioni equilipschitziane, avremo

$$\min\lim_h \int_{R^n} |DG_h(u_h(x))|\, dx \geq \lambda \int_{R^n} |Du|.$$

Da cui

$$\min\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1}|Du_h(x)|^2 + hg^2(hu_h(x))\}|\, dx \geq 2\lambda \int_{R^n} |Du|.$$

2. Assumendo ora che la g sia, oltreché continua, 1-periodica e nulla nei soli punti di $\mathbb{Z}$, cominciamo col provare l'esistenza della speciale successione minimizzante $\{w_h\}$ nel caso particolare

$$n = 1, \qquad u(x) = 1 \text{ per } x > 0 \text{ e } u(x) = 0 \text{ per } x \leq 0.$$

In queste speciali condizioni proveremo l'esistenza di una successione di funzioni non decrescenti

$$w_h : R \to [0, 1],$$

lipschitziane, nulle in $(-\infty, 0]$ e tendenti ad 1 in ogni punto $x > 0$, con

$$\lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}|Dw_h(x)|^2 + hg^2(hw_h(x))\}\, dx = 2\lambda,$$

dove

$$\lambda = \int_0^1 |g(s)|\, ds = \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t |g(s)|\, ds.$$

Per comodità di dimostrazione assumeremo la seguente ipotesi, non necessaria per la validità della tesi:

$$\int_0^1 |g(s)|^{-1} ds < +\infty .$$

Posto

$$Y(t) = \int_{1/2}^{t} |g(s)|^{-1} ds, \qquad \forall t \in [0, 1],$$

e indicati con a e b i valori della funzione Y nei punti 0 e 1, avremo

$$Y: [0, 1] \to [a, b],$$

con continuità e crescendo, allo stesso modo della sua inversa

$$Y^{-1}: [a, b] \to [0, 1].$$

La Y^{-1}, che più semplicemente denoteremo con y, risolve l'equazione differenziale

$$y' = |g(y)|,$$

nel suo intervallo di definizione ed ha valore 1/2 nel punto 0, interno ad esso.

Indichiamo ancora con y l'estensione della funzione a tutto R coi valori 0 in $(-\infty, a)$ e 1 in $(b, +\infty)$. Indichiamo quindi con y_h la successione di funzioni

$$y_h(x) = h^{-1} y(h^2 x).$$

Avremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} y_h'^2(x) + hg^2(hy_h(x))\}\, dx = \int_{a:h^2}^{b:h^2} \{h^{-1} y_h'^2(x) + hg^2(hy_h(x))\}\, dx =$$

$$= h \int_{a:h^2}^{b:h^2} \{y'^2(h^2 x) + g^2(y(h^2 x))\}\, dx = h^{-1} \int_a^b \{y'^2(x) + g^2(y(x))\}\, dx =$$

$$= 2h^{-1} \int_a^b y'(x) |g(y(x))|\, dx = 2h^{-1} \int_a^b |g(x)|\, dx = 2h^{-1} \lambda .$$

Per ogni intero positivo k poniamo

$$y_{h,k}(x) = y_h\left(x - \frac{b-a}{h^2}k + \frac{b}{h^2}\right).$$

Avremo che ciascuna delle $y_{h,k}$ verifica

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} y'^2_{h,k}(x) + hg^2(hy_{h,k}(x))\}\, dx = 2h^{-1}\lambda\,;$$

e, per i diversi valori di k, le $y_{h,k}$ sono non decrescenti con valori compresi nell'intervallo $[0, 1 : h]$ ed hanno valori diversi dai valori minimo e massimo in intervalli privi di punti interni comuni. Avremo pertanto, per ogni intero positivo K posto $y_{h,K} = \sum_{k=1}^{K} y_{h,k}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} y'^2_{h,K}(x) + hg^2(hy_{h,K}(x))\}\, dx = 2Kh^{-1}\lambda\,.$$

Nel caso particolare $K = h$ la successione $\{w_h\} = \{y_{h,h}\}$ ha la proprietà desiderata, essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} w'^2_h(x) + hg^2(hw_h(x))\}\, dx = 2\lambda\,, \quad \forall h\,;$$

$$w_h(x) = 0, \quad \forall h, \quad \forall x \leqslant 0\,; \qquad w_h(x) = 1, \quad \forall h, \quad \forall x \geqslant \frac{b-a}{h}\,;$$

w_h lipschitziana non decrescente $\forall h$.

Se poi, per α reale positivo, poniamo

$$w_h^{(\alpha)} = y_{h,[\alpha h]} = \sum_{k=1}^{[\alpha h]} y_{h,k}\,,$$

dove $[\alpha h]$ indica la parte interna di αh, avremo una successione approssimante, con le proprietà desiderate della funzione $\alpha\chi_{[0,+\infty)}$, dove $\chi_{[0,+\infty)}$ è la funzione caratteristica di $[0, +\infty)$.

Vogliamo ora liberarci dell'ipotesi di comodo

$$\int_0^1 |g(s)|^{-1} ds < +\infty\,.$$

Poniamo allora, per ogni scelta del bivettore $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, dove

$\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$, $\varepsilon_2 \in (0, 1/2)$ verificano le

$$|g(\varepsilon_1)| < |g(1:2)|, \ |g(1-\varepsilon_2)| < |g(1:2)|:$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\varepsilon(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\varepsilon_1}}|g(\varepsilon_1)|, \qquad \text{per } x \in [0, \varepsilon_1],\\
&= |g(\varepsilon_1)|, \qquad \text{per } x \in [\varepsilon_1, 1:2],\\
&= |g(1-\varepsilon_2)|, \qquad \text{per } x \in (1:2, 1-\varepsilon_2],\\
&= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{\varepsilon_2}}|g(1-\varepsilon_2)|, \qquad \text{per } x \in [1-\varepsilon_2, 1].
\end{aligned}$$

Poniamo inoltre

$$g_\varepsilon(x) = \max\{|g(x)|, \gamma_\varepsilon(x)\}, \qquad \text{per } x \in [0, 1],$$

e prolunghiamo g_ε a tutto R per periodicità. Avremo allora verificata per g_ε la ipotesi di comodo, anzi con precisione avremo:

$$-a_\varepsilon = \int_0^{1:2} g_\varepsilon^{-1}(s)\,ds \leqslant \int_0^{1:2} \gamma_\varepsilon^{-1}(s)ds = (2\varepsilon_1 + 1/2 - \varepsilon_1)|g(\varepsilon_1)|^{-1} \leqslant |g(\varepsilon_1)|^{-1},$$

$$b_\varepsilon \leqslant |g(1-\varepsilon_2)|^{-1}.$$

Avremo inoltre

$$\lambda_\varepsilon = \int_0^1 g_\varepsilon(s)\,ds \leqslant \int_0^1 |g(s)|\,ds + \int_0^1 \gamma_\varepsilon(s)\,ds < \lambda +$$
$$+ 1/2\{|g(\varepsilon_1)| + |g(1-\varepsilon_2)|\}.$$

Quindi

$$2\lambda_\varepsilon < 2\lambda + |g(\varepsilon_1)| + |g(1-\varepsilon_2)|.$$

Indicata allora con $\{w_{h,\varepsilon}\}$ la successione di funzioni lipschitziane approssimanti la $\chi_{[0,+\infty)}$, relativamente alla g_ε, avremo per ogni h

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} w_{h,\varepsilon}'^2(x) + h g_\varepsilon^2(h w_{h,\varepsilon}(x))\}\, dx < 2\lambda + |g(\varepsilon_1)| + |g(1-\varepsilon_2)|\,.$$

A maggior ragione per ogni h sarà

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} w_{h,\varepsilon}'^2(x) + h g^2(h w_{h,\varepsilon}(x))\}\, dx < 2\lambda + |g(\varepsilon_1)| + |g(1-\varepsilon_2)|\,.$$

Osserviamo inoltre che ogni $w_{h,\varepsilon}$ è non decrescente, vale 0 in $(-\infty, 0]$ e 1 in $[(b_\varepsilon - a_\varepsilon)/h, +\infty)$. Inoltre è

$$\frac{b_\varepsilon - a_\varepsilon}{h} < [h|g(\varepsilon_1)|]^{-1} + [h|g(1-\varepsilon_2)|]^{-1}.$$

Per tutti gli $h > |g(1:2)|^{-2}$, potremo scegliere

$$\varepsilon_1(h) = \min\{s \in [0,1] \,|\, \sqrt{h}\,|g(s)| = 1\},$$

$$\varepsilon_2(h) = \min\{s \in [0,1] \,|\, \sqrt{h}\,|g(1-s)| = 1\}.$$

Posto allora

$$w_h = w_{h,\varepsilon(h)},$$

avremo

$$w_h(x) = 1 \quad \text{per} \quad x > (\sqrt{h})^{-1},$$

mentre è

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} w_h'^2(x) + h g^2(h w_h(x))\}\, dx < 2\lambda + 2(\sqrt{h})^{-1}.$$

Di conseguenza è

$$w_h \to \chi_{[0,+\infty)} \qquad \text{e} \qquad \lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1} w_h'^2(x) + h g^2(h w_h(x))\}\, dx = 2\lambda\,.$$

3. Abbiamo dimostrato che per ogni numero reale positivo α esiste una successione $\{w_h^{(\alpha)}\}$ di funzioni reali lipschitziane di una variabile reale, non decrescenti, con le ulteriori proprietà

$$w_h^{(\alpha)} = 0 \text{ in } (-\infty, 0], \qquad w_h^{(\alpha)} = \frac{[\alpha h]}{h} \text{ in } \left[2\frac{\alpha+1}{\sqrt{h}}, +\infty\right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}|Dw_h^{(\alpha)}(x)|^2 + hg(hw_h^{(\alpha)}(x))\}\,dx \leq 2\alpha\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{h}}\right),$$

dove $\lambda = \int_0^1 |g(s)|\,ds$; e ciò per una qualunque funzione continua g, 1-periodica, con $\{s \in R \mid g(s) = 0\} = \mathbb{Z}$. In altre parole, per la funzione $\alpha\chi_{[0,+\infty)}$ abbiamo provato l'esistenza della approssimazione secondo Modica-Mortola.

Vogliamo ora ampliare la validità di tale proprietà ad ogni dimensione e alle funzioni caratteristiche degli aperti regolari limitati.

Sia $\Omega \subset R^n$ un aperto limitato con frontiera regolare e si ponga

$$\rho(x) = \operatorname{dist}(x, R^n - \Omega).$$

La funzione $\rho\colon R^n \to R$ è regolare nell'aperto

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in R^n \mid 0 < \rho(x) < \varepsilon\},$$

per piccoli valori di ε, e verifica in quasi ogni punto $x \in \Omega_\varepsilon$ la identità $|D\rho(x)| = 1$.

Le funzioni della successione $\{w_h^{(\alpha)}(\rho(x))\}$ sono allora lipschitziane e hanno valori compresi negli intervalli

$$\left[0, \frac{[\alpha h]}{h}\right];$$

valgono 0 in $R^n - \Omega$ e $[\alpha h]/h$ in $\Omega - \Omega_\varepsilon$, non appena sia $h > 4((\alpha+1)/\varepsilon)^2$. Avremo allora, per tali valori di h:

$$\int_{R^n} h^{-1}|Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} h^{-1}|Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2\,|D\rho(x)|\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon h^{-1}|Dw_h^{(\alpha)}(t)|^2 H^{n-1}(\partial\Omega_t)\,dt \leq \{H^{n-1}(\partial\Omega) + \sigma(\varepsilon)\}\int_0^\varepsilon h^{-1}|Dw_h^{(\alpha)}(t)|^2\,dt$$

dove $\sigma(\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ e H^{n-1} è la misura di Hausdorff $(n-1)$ dimensionale. Analogamente si ha

$$\int_{R^n} hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))]\,dx = \int_{\Omega_\varepsilon} hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))]\,dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon hg^2(hw_h^{(\alpha)}(t))\,H^{n-1}(\partial\Omega_t)\,dt \leqslant \{H^{n-1}(\partial\Omega) + \sigma(\varepsilon)\} \int_0^\varepsilon hg^2(hw_h^{(\alpha)}(t))\,dt\,.$$

Da queste diseguaglianze e dalle ricordate proprietà della successione di funzioni $\{w_h^{(\alpha)}\}$, per $h > 4((\alpha+1)/\varepsilon)^2$ abbiamo

$$\int_{R^n} \{h^{-1}\,|Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2 + hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))]\}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \{H^{n-1}(\partial\Omega) + \sigma(\varepsilon)\}\,2\alpha\left(\lambda + \frac{1}{\sqrt{h}}\right).$$

Quindi

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1}\,|Dw_h^{(\alpha)}(\rho(x))|^2 + hg^2[hw_h^{(\alpha)}(\rho(x))]\}\,dx =$$

$$= 2\alpha\lambda\,H^{n-1}(\partial\Omega) = 2\lambda \int_{R^n} |D(\alpha\chi_\Omega)|\,.$$

Sia ora $\{\Omega_j\}$ un numero finito di aperti regolari con frontiere due a due disgiunte. La funzione

$$\Sigma_j\,\alpha_j\,\chi_{\Omega_j}\,,$$

dove i coefficienti α_j sono numeri reali positivi, è approssimabile mediante la successione

$$\{\Sigma_j\,w_h^{(\alpha_j)}(\rho_j(x))\}\,,$$

la quale verifica, per grandi valori di h,

$$\int_{R^n} \{h^{-1}\,|D\Sigma_j\,|^2 + hg^2(h\Sigma_j)\}\,dx =$$

$$= \Sigma_j \int_{R^n} \{h^{-1}\,|D[w_h^{(\alpha_j)}(\rho(x))]|^2 + hg^2[hw_h^{(\alpha_j)}(\rho_j(x))]\}\,dx\,.$$

Per provare l'approssimazione di Modica-Mortola nel caso generale facciamo, in un primo momento, l'ipotesi di comodo $u \in C_0^\infty(R^n)$. Avremo in tal caso

$$\int_{R^n} |Du(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H^{n-1}(\partial\{x \in R^n \,|u(x) > t\})\, dt.$$

Ed anche, per ogni intero h,

$$\int_{R^n} |Du(x)|\, dx = \sum_{|z| \leqslant h\max|u| + 1} \int_{z:h}^{(z+1):h} H^{n-1}(\partial\{u \in R^n \,|u(x) > t\})\, dt.$$

Esisteranno quindi, per ogni h e per ogni $z \in \mathbb{Z}$ con $|z| \leqslant h \max |u| + 1$, numeri reali $t_{h,z} \in (z:h, (z+1):h)$, tali che

$$\int_{R^n} |Du(x)|\, dx \geqslant \sum_{|z| \leqslant h\max|u| + 1} h^{-1} H^{n-1}(\partial\{x \in R^n \,|u(x) > t_{h,z}\}).$$

Potendosi richiedere anche che l'aperto $\{x \in R^n \mid u(x) > t_{h,z}\}$ sia regolare.

La somma a secondo membro dell'ultima diseguaglianza è la variazione totale del gradiente della funzione

$$-\left(\max|u| + \frac{2}{h}\right) + \sum_{|z| \leqslant h\max|u| + 1} h^{-1}\chi_{\{x \in R^n \,|\, u(x) > t_{h,z}\}},$$

la quale tende alla u in $L^1(R^n)$. Poiché questa funzione approssimante è a sua volta approssimabile nel senso di Modica-Mortola, potremo dedurre la approssimabilità delle $u \in C_0^\infty(R^n)$ e poi quella di ogni $u \in L^1(R^n)$, dalla seguente proprietà di continuità:

LEMMA. Se $v_h \to v$ in $L^1(R^n)$ e $\int_{R^n} |Dv_h| \to \int_{R^n} |Dv|$, e se le v_h sono approssimabili nel senso di Modica-Mortola, allora lo è anche la v.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni h sia $\{v_{h,k}\}_k$ una successione approssimante la v_h. Valgano cioè

$$\lim_k \int_{R^n} |v_{h,k} - v_h|\, dx = 0$$

e

$$\lim_k \int_{R^n} \{k^{-1} |Dv_{h,k}|^2 + kg^2(kv_{h,k})\} \, dx = 2\lambda \int_{R^n} |Dv_h| \, .$$

Esisterà allora una successione crescente di interi $\{\nu(h)\}$ con le seguenti proprietà

$$\int_{R^n} |v_{h,k} - v_h| \, dx < 2^{-h}, \qquad \forall k \geqslant \nu(h);$$

$$\int_{R^n} \{k^{-1} |Dv_{h,k}|^2 + kg^2(kv_{h,k})\} \, dx < 2\lambda \int_{R^n} |Dv_h| + 2^{-h}, \qquad \forall k \geqslant \nu(h).$$

Posto $h(k) = \max\{h | \nu(h) \leqslant k\}$, avremo che la successione $\{h(k)\}$ è non decrescente e divergente. Indicata con $\{w_k\}$ la successione di funzioni $\{v_{h(k),k}\}$ avremo

$$\int_{R^n} |w_k - v| \, dx \leqslant \int_{R^n} |w_k - v_{h(k)}| \, dx + \int_{R^n} |v_{h(k)} - v| \, dx;$$

quindi

$$\int_{R^n} |w_k - v| \, dx < 2^{-h(k)} + \int_{R^n} |v_{h(k)} - v| \, dx \xrightarrow[k]{} 0 \, .$$

Inoltre

$$\int_{R^n} \{k^{-1} |Dv_k|^2 + kg^2(kw_k)\} \, dx \leqslant 2\lambda \int_{R^n} |Dv_{h(k)}| + 2^{-h(k)},$$

da cui segue

$$\lim_k \int_{R^n} \{k^{-1} |Dw_k|^2 + kg^2(kw_k)\} \, dx \leqslant 2\lambda \int_{R^n} |Dv| \, . \qquad \text{c.v.d.}$$

4. Consideriamo ora la successione di valori

$$\int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} \, dx \, .$$

Avremo ancora, per quanto riguarda l'integrando,

$$h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x)) \geqslant 2|g(u_h(x))| \, |Du_h(x)| = 2|D\tilde{G}(u_h(x))| \, ,$$

dove si è posto $\tilde{G}(t) = \int_0^t |g(x)| \, ds$.

Facendo tendere h all'infinito e supponendo che per quasi ogni $x \in \in R^n$ sia

$$\lim_h u_h(x) = u(x),$$

avremo

$$\min_h \lim \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} \, dx \geqslant 2 \int_{R^n} |D\tilde{G}(u(x))| \, .$$

Osserviamo ora che se i valori della u sono interi relativi, cioè se $\{u(x) \mid x \in R^n\} \subset \mathbb{Z}$, allora

$$\tilde{G}(u(x)) = \lambda u(x);$$

dove $\lambda = \int_0^1 |g(x)| \, ds$ e g è supposta 1-periodica oltreché continua. Quindi, con tale restrizione sulla u, avremo

$$\min_h \lim \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} \, dx \geqslant 2\lambda \int_{R^n} |Du(x)| \, .$$

Questa disuguaglianza è peraltro valida in generale. Se infatti il codominio di u non è contenuto in $\mathbb{Z}$, se esiste cioè un insieme $X \subset R^n$ di misura positiva, nei punti del quale la u assume valori non interi, poiché

$$\min_h \lim \int_{R^n} g^2(u_h(x)) \, dx \geqslant \int_{R^n} g^2(u(x)) \, dx \geqslant \int_X g^2(u(x)) \, dx \, ;$$

assumendo che la g sia nulla solo nei punti di $\mathbb{Z}$, avremo

$$\int_X g^2(u(x)) \, dx > 0,$$

da cui

$$\min_h \lim \int_{R^n} hg^2(u_h(x)) \, dx \geqslant (\lim_h h) \int_X g^2(u(x)) \, dx = +\infty \, .$$

A maggior ragione

$$\min_h \lim \int_{R^n} \{h^{-1} |Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\} \, dx = +\infty \geqslant 2\lambda \int_{R^n} |Du| \, .$$

Resta aperta la questione dell'esistenza di una successione di funzioni lipschitziane $\{u_h\}$, approssimanti la u in $L^1(R^n)$ e tali che

$$\lim_h \int_{R^n} \{h^{-1}|Du_h(x)|^2 + hg^2(u_h(x))\}\,dx = 2\lambda \int_{R^n} |Du|\,,$$

nell'ipotesi che i valori della u siano interi relativi.

Per la dimostrazione di questo fatto ripercorreremo la strada già fatta nella prima parte, cominciando col considerare il caso

$$x \in R\,, \qquad u(x) = 0 \text{ per } x \leqslant 0\,, \qquad u(x) = 1 \text{ per } x > 0\,.$$

Assumiano ancora, per comodità di calcolo

$$\int_0^1 |g(s)|^{-1}\,ds < +\infty\,.$$

Posto

$$y_h(x) = y(hx)\,,$$

dove y, Y^{-1}, Y, a, b, hanno lo stesso significato della prima parte di questo articolo, avremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}y_h'^2(x) + hg^2(y_h(x))\}\,dx = \int_{a:h}^{b:h} \{h^{-1}y_h'^2 + hg^2(y_h)\}\,dx =$$

$$= h\int_{a:h}^{b:h} \{y'^2(hx) + g^2(y(hx))\}\,dx = \int_a^b \{y'^2(x) + g^2(y(x))\}\,dx =$$

$$= 2\int_a^b y'\,|g(y)|\,dx = 2\int_0^1 |g(s)|\,ds = 2\lambda\,.$$

Quindi direttamente

$$y_h \to \chi_{[0,+\infty)} \qquad \text{e} \qquad \lim_h \int_{-\infty}^{+\infty} \{h^{-1}y_h'^2 + hg^2(y_h)\}\,dx = 2\lambda\,.$$

È facilmente intuibile come si possano approssimare le $z\chi_{[0,+\infty)}$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e poi le $z\chi_\Omega$ per ogni aperto limitato regolare di R^n e, finalmente, le u sommabili a valori interi.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. MODICA - S. MORTOLA, *Un esempio di Γ^{-}-convergenza*, Boll. U.M.I., (5) 14-B (1977), pp. 285-299.

[2] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*, Rend. Mat. (IV) 8, 1 (1975), pp. 277-294.

[3] E. DE GIORGI - T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., 58 (1975), pp. 842-850.

[4] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).

[5] M. MIRANDA, *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), pp. 27-56.

Manoscritto pervenuto in redazione il 4 ottobre 1991.