RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BERNHARD FREY
OTTO MUTZBAUER

Regulierende Untergruppen und der Regulator fast vollständig zerlegbarer Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 88 (1992), p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1992__88__1_0>

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 88 (1992)

Regulierende Untergruppen und der Regulator fast vollständig zerlegbarer Gruppen.

Bernhard Frey - Otto Mutzbauer (*)

1. Einleitung.

Eine *fast vollständig zerlegbare Gruppe* G ist eine torsionsfreie abelsche Gruppe endlichen Ranges, die eine vollständig zerlegbare Untergruppe von endlichem Index enthält. Die (endlich vielen) vollständig zerlegbaren Untergruppen von minimalem Index heißen regulierende Untergruppen. Der Durchschnitt aller regulierenden Untergruppen, der sogenannte Regulator ist nach Burkhardt [Bu] ebenfalls eine vollständig zerlegbare Untergruppe (von endlichem Index) und der Isomorphietyp der Faktorgruppe nach dem Regulator ist eine Invariante der Gruppe.

In der Arbeit [KM] wurde 1984 eine Klassifikation fast vollständig zerlegbarer Gruppen vorgenommen und als endliches Problem erkannt, sofern Gruppen von gleichem Quasiisomorphietyp und mit isomorphen Regulatorquotienten verglichen werden. Dort wurden eine Reihe expliziter Probleme benannt, von denen hier einige aufgegriffen werden. Es werden regulierende Untergruppen charakterisiert und eine Methode vorgestellt, aus einer beliebigen vollständig zerlegbaren Untergruppe von endlichem Index, eine regulierende Untergruppe zu bestimmen. Daraus erhält man dann alle regulierenden Untergruppen und den Regulator. Anschließend wird in gewissen Spezialfällen die Anzahl der regulierenden Untergruppen bestimmt.

Bezeichnungen und Notationen sind Fuchs [Fu] entnommen. Mit $A(\tau) := \{a \in A \mid t(a) \geqslant \tau\}$ und $A^{\#}(\tau) := \langle\{A(\sigma) \mid \sigma > \tau\}\rangle_*$ werden wie üblich die Typenuntergruppen von A für den Typ τ bezeichnet.

Für eine fast vollständig zerlegbare Gruppe G sei $i(G)$ der Index einer regulierenden Untergruppe von G und $T(G) := \{\tau \mid G(\tau) \neq G^{\#}(\tau)\}$

(*) Indirizzo degli AA.: Mathematisches Institut, Universität Würzburg, Am Hubland, 8700 Würzburg, Deutschland.

die *Zerlegungstypenmenge* von G. Weiter bezeichne W_τ einen maximalen τ-homogenen direkten Summanden einer vollständig zerlegbaren Gruppe W.

Ist $W = \bigoplus_{\tau \in T(G)} W_\tau$ eine regulierende Untergruppe der fast vollständig zerlegbaren Gruppe G, dann gilt die *Butlergleichung* $G(\tau) = W_\tau \oplus \oplus G^{\#}(\tau)$ für alle $\tau \in T(G)$, vgl. [La]. Weiter sei reg G die Menge der regulierenden Untergruppen von G.

2. Standardisierte Elemente.

Eine Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ einer vollständig zerlegbaren Gruppe U heißt *Zerlegungsbasis* von U, wenn $U = \bigoplus_{i=1}^{n} \langle x_i \rangle_*$ gilt. Erfüllt eine Zerlegungsbasis für die natürliche Zahl m die Bedingung

$$h_p^U(x_i) \in \{0, \infty\} \text{ für alle } i, \text{ und alle Primzahlen } p \text{ mit } p \mid m,$$

so spricht man von einer *m-Basis* von U. Eine m-Basis, die zusätzlich

$$\chi(x_i) \wedge \chi(x_j) = \chi(x_k) \text{ für alle } i, j, k \text{ mit } t(x_i) \wedge t(x_j) = t(x_k),$$

erfüllt, heißt *m-Koehler-Basis* von U. Ist $\mathcal{B}$ eine m-Koehler-Basis, so gilt $\chi(x_i) \leqslant \chi(x_j)$ für alle i, j mit $t(x_i) \leqslant t(x_j)$ und $\mathcal{B}$ ist auch eine k^r-Koehler-Basis für $k \mid m$ und $r \in \boldsymbol{N}$. Jede vollständig zerlegbare Gruppe besitzt m-Koehler-Basen [Ko]. Im folgenden wird eine vollständig zerlegbare Gruppe U meist in der Form $U = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$ mit m-(Koehler-)Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $1 \in S_i \subset \boldsymbol{Q}$ angegeben, wobei $\chi^{S_i}(1) = \chi^U(x_i)$, also $S_i x_i = \langle x_i \rangle_*^U$ gilt. Für eine torsionsfreie abelsche Gruppe U und ein $g \in \boldsymbol{Q}U$ bezeichne $\omega_U(g) := o(g + U)$ die Ordnung von g bezüglich U. Liegt U fest, so spricht man kurz von der *Faktorordnung* $\omega(g)$ *von* g. Sei U eine vollständig zerlegbare Gruppe mit Zerlegungsbasis $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann heißt $g \in \boldsymbol{Q}U$ *standardisiert bezüglich* $\mathcal{B}$, oder kürzer $\mathcal{B}$*-standardisiert*, wenn in der Darstellung

$$\omega_U(g)\, g = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j,$$

für alle j gilt: $a_j \in \boldsymbol{Z}$ und $0 \leqslant a_j < w_j := |\langle x_j \rangle_*^U / \omega_U(g) \langle x_j \rangle_*^U|$.

Ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element $g \in \boldsymbol{Q}U$, das in der Nebenklasse $\bar{h} = h + U \in \boldsymbol{Q}U/U$ liegt, heißt $\mathcal{B}$*-standardisiertes Urbild von* $\bar{h}$. Das eindeutig bestimmte $\mathcal{B}$-standardisierte Urbild der Nebenklasse $0 + U$ ist 0.

LEMMA 2.1. *Sei U eine vollständig zerlegbare Gruppe mit einer m-Basis $\mathcal{B}$. Dann hat jedes Element $\overline{h} \in m^{-1}U/U$ ein eindeutig bestimmtes B-standardisiertes Urbild h mit $\overline{h} = h + U$.*

BEWEIS. *Existenz*: Sei $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $U = \bigoplus_{j=1}^{n} S_j x_j$. Sei h_0 ein beliebiges Urbild von $\overline{h}$ und $\omega := \omega_U(h_0)$, so ist $\omega h_0 = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \in U$, wobei $a_j \in S_j$. Sei $a_1 = b/c$ in gekürzter Form mit $b, c \in \boldsymbol{Z}$. Dann existiert eine natürliche Zahl v, so daß für $d := \mathrm{ggT}(c^v, \omega)$ gilt $\mathrm{ggT}(d, \omega/d) = 1$. Nach dem Satz von Bezout existieren $r, s \in \boldsymbol{Z}$ mit $rcd + s\omega = d$. Damit ergibt sich $da_1 = rcda_1 + s\omega a_1$ und man erhält

$$\frac{1}{\omega} a_1 x_1 = \frac{rcd}{\omega d} a_1 x_1 + \frac{s\omega}{d\omega} a_1 x_1 = \frac{rc}{\omega} a_1 x_1 + \frac{s}{d} a_1 x_1 .$$

Da jeder Primteiler p von d auch ein Teiler von c ist, folgt für $p \mid d$ wegen $1/c \in S_1$, daß $h_p^U(x_1) > 0$. Weiter gilt $d \mid \omega$ und $\omega \mid m$, d.h. diese p-Höhen sind ∞, da $\mathcal{B}$ eine m-Basis ist. Damit ergibt sich $dS_1 = S_1$, also $(s/d)\, a_1 x_1 \in U$ und $(1/\omega)\, a_1 x_1$ läßt sich modulo U durch $(rc/\omega)\, a_1 x_1 = (rb/\omega)\, x_1$ ersetzen. Setze $h_1 = (1/\omega)\left(rbx_1 + \sum_{j=2}^{n} a_j x_j\right)$, dann ist $\omega = \omega(h_1)$. Weiter gilt $h_1 + U = h_0 + U$ und $\omega(h_1)\, h_1$ hat bei x_1 den ganzzahligen Koeffizienten rb. Analog konstruiert man für $j = 2, \ldots, n$ die Elemente h_j, so daß schließlich ωh_n nur noch ganzzahlige Koeffizienten f_j hat und $\omega = \omega(h_n)$ gilt. Sei $w_j := |S_j/\omega S_j|$ für $j = 1, \ldots, n$. Wähle nun $u \in U$ mit

$$u = \sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{\omega} u_j x_j \qquad \text{wobei } u_j \in \boldsymbol{Z},$$

so daß $0 \leq f_j + w_j u_j < w_j$ gilt. Die Existenz solcher u_j folgt aus der Division mit Rest in $\boldsymbol{Z}$. Dann ist $h = h_n + u$ standardisiert bezüglich $\mathcal{B}$ und es gilt $h + U = h_n + U = h_0 + U$.

Eindeutigkeit: Seien h_1, h_2 standardisierte Urbilder von $\overline{h}$, so gilt $h_1 = h_2 + u$ für ein $u \in U$ und $\omega := \omega(h_1) = \omega(h_2)$. Da $\omega h_1, \omega h_2, u \in U$, haben diese Elemente bezüglich der m-Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmte Darstellungen $\omega h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ und $u = \sum_{j=1}^{n} u_j x_j$. Wegen $\omega h_1 = \omega h_2 + \omega u$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} (a_{2,j} + \omega u_j)\, x_j ,$$

also $a_{1,j} = a_{2,j} + \omega u_j$, wobei die $a_{i,j}$ ganzzahlig sind, d.h. auch ωu_j ist ganzzahlig. Nun ist ω ein Vielfaches von w_j, etwa $\omega = rw_j$ mit $r \in \boldsymbol{Z}$. Da

$u_j \in S_j$ und $\mathcal{B}$ als m-Basis auch eine ω-Basis ist, ist w_j relativ prim zum Nenner von u_j. Also ist $ru_j \in \boldsymbol{Z}$. Desweiteren gilt $0 \leq a_{i,j} < w_j$, also $0 \leq \leq |a_{1,j} - a_{2,j}| = |\omega u_j| = w_j r |u_j| < w_j$ und es folgt $a_{1,j} = a_{2,j}$ und damit $h_1 = h_2$. ■

Liegt keine m-Basis vor, so gilt Lemma 2.1 nicht, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei q eine Primzahl, $G = (1/q^2)\boldsymbol{Z}x$, also zyklisch, und $U = qG = (1/q)\boldsymbol{Z}$ eine (vollständig zerlegbare) Untergruppe mit Zerlegungsbasis $\{x\}$. Dann hat kein $0 \neq h + U \in G/U$ ein standardisiertes Urbild in G. Ist nämlich $h = (1/\omega(h))\,ax \in G \setminus U$ standardisiert bezüglich $\{x\}$, so gilt nach Definition $a \in \boldsymbol{Z}$ und nach Konstruktion $\omega(h) = q$. Andererseits gilt aber $h = (1/q)\,ax = (a/q)\,x \in U$, da $(a/q) \in (1/q)\boldsymbol{Z}$, was im Widerspruch zur Wahl von h steht.

Jedes $g \in G$ hat nun, bezüglich einer m-Basis $\mathcal{B}$, eine eindeutige Darstellung $g = h + u$, wobei h das $\mathcal{B}$-standardisierte Urbild der Restklasse $g + U$ ist, und $u \in U$. Ist die Darstellung $g_1 = h_1 + u_1$ und $g_2 = = h_2 + u_2$, sowie $n \in \boldsymbol{Z}$ gegeben, so ist in aller Regel $h_1 + h_2$ bzw. nh_1 nicht das $\mathcal{B}$-standardisierte Urbild von $(g_1 + g_2) + U$ bzw. $ng_1 + U$.

Sei U eine vollständig zerlegbare Gruppe und $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Zerlegungsbasis von U. Für ein $g \in m^{-1}U$ mit der Darstellung $\omega(g)\,g = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ bezüglich $\mathcal{B}$ bezeichne $I_{\mathcal{B}}(g) := \{i \mid a_i \neq 0\}$ den *$\mathcal{B}$-Träger von g*. Desweiteren heißt a_i die *i-te $\mathcal{B}$-Koordinate von g* und $a_i/\omega(g)$ der *i-te $\mathcal{B}$-Koeffizient von g*. Liegt $\mathcal{B}$ fest, so spricht man kürzer vom Träger $I(g)$ und der i-ten Koordinate bzw. dem i-ten Koeffizienten.

LEMMA 2.2. *Sei U eine vollständig zerlegbare Gruppe und $\mathcal{B} = = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine m-Basis von U. Ist $h \in m^{-1}U$ ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element, dann hat h den kleinsten Träger in der Nebenklasse $h + U$. Ist $g = h + u$ mit $u \in U$, so gilt $I(g) = I(h) \cup I(u)$.*

Desweiteren gilt $t(g) = t(h) \wedge t(u)$, das bedeutet $t(h) \geq t(g)$ und $t(u) \geq t(g)$. Insbesondere gibt es unter Typen der Elemente einer Nebenklasse einen eindeutig bestimmten größten Typ, der vom $\mathcal{B}$-standardisierten Urbild dieser Nebenklasse angenommen wird.

BEWEIS. Sei $U = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$ und sei $g = h + u = \sum_{i=1}^{n} (a_i/\omega_U(g) + + u_i)\,x_i$ mit $0 \leq a_i < |\langle x_i\rangle_*^U / \omega_U(g)\langle x_i\rangle_*^U|$, $a_i \in \boldsymbol{Z}$ und $u_i \in S_i$. Dann gilt $a_i/\omega_U(g) + u_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0 = u_i$, denn für $a_i \neq 0 \neq u_i$ ist $1/\omega_U(g) \notin S_i$, also enthält $\omega_U(g)$ einen zum Nenner von u_i teilerfremden Faktor. Also gilt $I(g) = I(h) \cup I(u)$.

Weiter gilt

$$t(h) \wedge t(u) = \left(\bigwedge \{t(x_i) \mid i \in I(h)\}\right) \wedge \left(\bigwedge \{t(x_i) \mid i \in I(u)\}\right) =$$

$$= \bigwedge \{t(x_i) \mid i \in I(h) \cup I(u)\} = \bigwedge \{t(x_i) \mid i \in I(g)\} = t(g). \quad \blacksquare$$

Die Aussagen von Lemma 2.2 gelten im allgemeinen nur für die Typen, nicht aber für die Charakteristiken, wie folgendes Beispiel zeigt:

Seien p, q zwei verschiedene ungerade Primzahlen. Sei $U = \boldsymbol{Q}^{(p)}x \oplus \boldsymbol{Z}y$, dann ist $\{x, y\}$ eine pq-Koehler-Basis von U. Das Element $h := (x + 2y)/pq \in (pq)^{-1}U$ ist standardisiert bezüglich $\{x, y\}$ und $2^{-1}h \notin (pq)^{-1}U$. Für $u = x/p \in U$ gilt ebenfalls $2^{-1}u \notin (pq)^{-1}U$. Aber für $g := h + u \in (pq)^{-1}U$ gilt $2^{-1}g = 2^{-1}(((q+1)x + 2y)/pq) \in (pq)^{-1}U$, da $2 \mid q + 1$, also $\chi(h) \ngeq \chi(g) \nleq \chi(u)$. In diesem speziellen Fall gilt sogar $\chi(h) < \chi(g)$.

Die folgenden einfachen Sachverhalte werden häufiger verwendet.

Bemerkung 2.3. Sei G eine torsionsfreie abelsche Gruppe und U eine Untergruppe vom endlichen Index m. Die Charakteristiken eines Elements $u \in U$ in G bzw. U sind sowieso äquivalent und unterscheiden sich nur für Primteiler von m.

Ist G insbesondere fast vollständig zerlegbar, $U \subseteq G$ eine vollständig zerlegbare Untergruppe von endlichem Index mit m-Koehler-Basis $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so folgt für ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element h aus $t(h) \geq t(x_j)$ bereits $\chi^G(h) \geq \chi^U(x_j)$. Ist nämlich $h = 1/\omega_U(h) \sum_{i \in I(h)} a_i x_i$, so gilt $\chi^G(h) \geq \chi^U(\omega_U(h)\, h) = \bigwedge_{i \in I(h)} \chi^U(a_i x_i) \geq \bigwedge_{i \in I(h)} \chi^U(x_i) \geq \chi^U(x_j)$, da $\mathcal{B}$ eine m-Koehler-Basis ist.

3. Regulierende Untergruppen.

Nun wird ein Verfahren vorgestellt, wie man aus einer beliebigen vollständig zerlegbaren Untergruppen von endlichem Index eine regulierende Untergruppe bestimmen kann. Desweiteren werden notwendige und hinreichende Bedingungen für $W \in \operatorname{reg} G$ an die bezüglich einer $[G : W]$-(Koehler)-Basis standardisierten Elemente aus G bewiesen.

Lemma 3.1. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe. Eine vollständig zerlegbare Untergruppe $U \subseteq G$ vom endlichen Index m ist regulierend, wenn für alle, bezüglich einer beliebigen m-Basis von U standardisierten Elemente $h \in G$ mit $t(h) \in T(G)$ gilt $h \in G^{\#}(t(h))$.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{B}$ eine m-Basis von $U = \bigoplus_{\tau \in T(G)} U_\tau$, so daß alle $\mathcal{B}$-standardisierten Elemente $h \in G$ mit $t(h) \in T(G)$ in $G^{\#}(t(h))$ liegen. Es genügt dann für jeden Typ $\tau \in T(G)$ die Butlergleichung $G(\tau) = U_\tau \oplus \oplus G^{\#}(\tau)$ zu zeigen, d.h. hier $G(\tau) \subseteq U_\tau \oplus G^{\#}(\tau)$.

Sei $g = h + u \in G(\tau)$ mit $u \in U$ und dem $\mathcal{B}$-standardisierten Urbild h von $g + U$, so gilt nach Lemma 2.2 $t(h) \geqslant \tau$, $t(u) \geqslant \tau$, also muß $h \in U_\tau \oplus \oplus G^{\#}(\tau)$ gezeigt werden. Ist $t(h) = \tau$, so gilt nach Voraussetzung $h \in \in G^{\#}(\tau)$, falls $t(h) > \tau$, gilt sowieso $h \in G(t(h)) \subseteq G^{\#}(\tau)$. ∎

Es genügt nicht, wenn die Bedingung $h \in G^{\#}(t(h))$ aus Lemma 3.1 für die $\mathcal{B}$-standardisierten Urbilder eines Erzeugendensystems $\{\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n\}$ von G/U erfült ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $G = \langle U, (x_1 + x_2)/p, (x_3 + (p-1)x_2)/p \rangle$, und $\{x_1, x_2, x_3\}$ eine p-Koehler-Basis von $U = S_1 x_1 \oplus S_2 x_2 \oplus S_3 x_3$ mit rationalen Gruppen S_i, so daß $h_p^U(x_i) = 0$ und $t(x_1) > t(x_3)$, $t(x_1) \| t(x_2)$, $t(x_3) \| t(x_2)$. Dann gilt zwar

$$h_1 = \frac{x_1 + x_2}{p} \in G^{\#}(t(h_1)) \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{x_3 + (p-1)x_2}{p} \in G^{\#}(t(h_2)).$$

Sei

$$h' = h_1 + h_2 = \frac{x_1 + x_2}{p} + \frac{x_3 + (p-1)x_2}{p} = \frac{x_1 + x_3}{p} + x_2,$$

dann ist das $\mathcal{B}$-standardisierte Urbild $h = (x_1 + x_3)/p$ der Nebenklasse $h' + U$, und h widerspricht der Bedingung $h \in G^{\#}(t(h)) = G^{\#}(t(x_3))$. Die Untergruppe U ist nach Lady auch nicht regulierend, da $[G:U] = = p^2$ aber $i(G) = p$. Eine regulierende Untergruppe wäre hier $U' := = S_1 x_1 \oplus S_2 x_2 \oplus S_3 h$, womit dann gilt $G = \langle U', (x_1 + x_2)/p \rangle$ und $[G:U'] = p$.

Der angekündigte Algorithmus ist im folgenden Lemma 3.2 gegeben.

LEMMA 3.2. *Sei eine fast vollständig zerlegbare Gruppe G und eine vollständig zerlegbare Untergruppe von endlichem Index $U = = \bigoplus_{j=1}^{n} S_j x_j$ mit $[G:U]$-Koehler-Basis $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ gegeben. Widerspricht ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element $h = \omega_U(h)^{-1} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ der Trägerdebingung*

(1) $\qquad j \notin I(h), \quad$ *falls* $t(x_j) = t(h)$,

in der i-ten Koordinate, so ist $V := S_i h \oplus \bigoplus_{j \neq i} S_j x_j$ *eine vollständig zerlegbare Untergruppe von* G *mit* $[G:V] < [G:U]$.

Ist außerdem $\omega_U(h)$ *teilerfremd zur i-ten Koordinate* a_i, *so existiert ein* $\mathcal{B}$*-standardisiertes Element* h' *mit* $V' = S_i h' \oplus \bigoplus_{j \neq i} S_j x_j \supset U$.

Beweis. O.B.d.A. widerspreche h für $i = 1$ der Bedingung (1).

Für den Fall, daß $\operatorname{ggT}(\omega_U(h), a_1) = 1$ ist, kann o.B.d.A. $a_1 = 1$ angenommen werden. Falls $a_1 \neq 1$ gibt es nach dem Satz von Bezout $v, w \in \mathbf{Z}$ mit $va_1 + w\omega_U(h) = 1$. Dann hat das standardisierte Urbild h' von $g + U$ mit $g := vh + w\omega_U(h) x_1$ die erste Koordinate 1. Wegen $\operatorname{ggT}(v, \omega_U(h)) = 1$ gilt $\langle h' + U \rangle = \langle g + U \rangle = \langle h + U \rangle$. Wegen $t(h') = t(h) = t(x_1)$ widerspricht auch h' der Bedingung (1), d.h. es kann mit h' an Stelle von h gearbeitet werden.

Da $\mathcal{B}$ eine $[G:U]$-Koehler-Basis ist, und $t(h) = t(x_1)$ gilt, folgt nach Bemerkung 2.3 $\chi^G(h) \geqslant \chi^U(x_1) = \chi^{S_1}(1)$. Also gilt $V := S_1 h \oplus \bigoplus_{j=2}^{n} S_j x_j \subseteq G$.

Nun gilt $\omega_V(x_1) \mid a_1$, da $a_1 x_1 \in V$, d.h. falls $a_1 = 1$ gilt $U \subset V$. Sei $W = S_1 \omega_V(x_1) x_1 \oplus \bigoplus_{j=2}^{n} S_j x_j \subseteq U \cap V$, dann hat G/W die homomorphen Bilder G/U und G/V mit den Kernen U/W und V/W. Wegen $|U/W| = \omega_V(x_1) \mid a_1$ und $a_1 < \omega_U(h) = \omega_{U \cap V}(h) \leqslant \omega_W(h) \leqslant |V/W|$ ergibt sich $[G:U] > [G:V]$. ■

Da nicht jede vollständig zerlegbare Untergruppe $U \subset G$ in einer regulierenden Untergruppe von G enthalten ist, gilt i.a. nicht $V \supset U$.

Bemerkung 3.3. Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe, und U eine vollständig zerlegbare Untergruppe von endlichem Index mit $[G:U]$-Koehler-Basis $\mathcal{B}$, dann ist die Trägerbedingung äquivalent zu der Bedingung, daß jedes $\mathcal{B}$-standardisierte Element h in $G^{\#}(t(h))$ liegt.

Satz 3.4. *Sei* G *eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und* $W \subseteq G$ *eine vollständig zerlegbare Untergruppe vom endlichen Index* m. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Untergruppe* W *ist regulierend.*

(ii) *Für jede* m*-Koehler-Basis* $\mathcal{B}$ *von* W *genügen alle* $\mathcal{B}$*-standardisierten Elemente* h *der Trägerbedingung* (*Bedingung* (1)) *und liegen in* $G^{\#}(t(h))$.

(iii) *Es gibt eine* m*-Basis* $\mathcal{B}$ *von* W, *so daß alle* $\mathcal{B}$*-standardisierten Elemente* $h \in G$ *mit* $\tau = t(h) \in T(G)$ *in* $G^{\#}(\tau)$ *liegen.*

(iv) *Sei* $\varphi\colon G \mapsto G/W$ *der kanonische Epimorphismus, dann gilt für alle* $\tau \in T(G)$ *die Gleichung* $\varphi(G(\tau)) = \varphi(G^{\#}(\tau))$.

BEWEIS. (i) impliziert (ii) nach Lemma 3.2, der Minimalität von $i(G)$ und Bemerkung 3.3. Ebenso folgt (iv) aus (i) durch Anwendung von φ auf die Butlergleichung. Aus (ii) folgt sofort (iii), und (iii) impliziert (i) nach Lemma 3.1. Es bleibt zu zeigen, daß (iii) aus (iv) folgt. Sei h ein bezüglich einer m-Basis von W standardisiertes Element mit $t(h) = \tau \in T(G)$. Wegen $\varphi(h) \in \varphi(G(\tau)) = \varphi(G^{\#}(\tau))$, findet sich in $h + W$ ein $g \in G^{\#}(\tau)$. Nach Lemma 2.2 gilt $I(h) \subset I(g)$, also folgt $h \in G^{\#}(\tau)$. ■

Die bisher gezeigten Sätze dieses Abschnittes ergeben einen Algorithmus, wie man aus einer beliebigen vollständig zerlegbaren Untergruppe U, die endlichen Index m in G hat, eine regulierende Untergruppe $W \subseteq G$ bestimmen kann, indem man das Verfahren aus dem Beweis von Lemma 3.2 iterativ anwendet.

Sei $m/i(G) = p_1 \dots p_k$ eine Zerlegung in Primzahlen, dann sind höchstens k Iterationen notwending und es gilt $k \leq \log_2(m)$. Bei jeder Iteration muß für höchstens m standardisierte Elemente die Trägerbedingung getestet werden, und eine Koordinate bezüglich der neuen Basis neu berechnet werden. Insgesamt benötigt der Algorithmus also höchstens $2km \in O(m \log_2(m))$ Schritte.

BEMERKUNG 3.5. Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und sei $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i \in \operatorname{reg} G$ mit $i(G)$-(Koehler-)Basis $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Aus der Butlergleichung folgt dann $\chi^G(x_i) = \chi^W(x_i) = \chi^{S_i}(1)$.

Ist $V \in \operatorname{reg} G$ eine weitere regulierende Untergruppe, so besitzt V eine $i(G)$-(Koehler-)Basis $\{y_1, \dots, y_n\}$ mit $\chi^V(y_i) = \chi^{S_i}(1)$, also $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i y_i$, da $W \cong V$.

LEMMA 3.6. *Seien eine fast vollständig zerlegbare Gruppe G und $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i \in \operatorname{reg} G$ mit $i(G)$-Koehler-Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ gegeben. Seien $h_i \in G^{\#}(t(x_i))$ mit $\chi^G(h_i) \geq \chi^G(x_i)$, dann ist auch*

$$W' := \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + h_i), \tag{2}$$

eine regulierende Untergruppe von G, und $\{x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n\}$ ist eine $i(G)$-Koehler-Basis von W'. Weiter sind W und W' genau dann gleich, wenn alle h_i in W liegen.

BEWEIS. Wir konstruieren induktiv für $j = 0, \ldots, n$ regulierende Untergruppen $W_j = \left(\bigoplus_{i=1}^{j} S_i(x_i + h_i)\right) \oplus \bigoplus_{i=j+1}^{n} S_i x_i$, d.h. $W_0 = W$ und $W_n = W'$.

Angenommen für ein $n \geqslant j > 0$ sei bereits $W_{j-1} \in \operatorname{reg} G$ gezeigt. Sei $\tau = t(x_j)$ und $y_i = x_i + h_i$ für $i < j$ bzw. $y_i = x_i$ für $i > j$. Da nach Induktionsannahme $W_{j-1} \in \operatorname{reg} G$ ist, gilt $G(\tau) = S_j x_j \oplus H$, mit $H = (\bigoplus_{t(y_i)=\tau} S_i y_i) \oplus G^{\#}(\tau)$. Nun ist $h_j \in G^{\#}(\tau) \subseteq H$ und $\chi^G(h_j) \geqslant \chi^G(x_j) = \chi^{W_{j-1}}(x_j) = \chi^{S_j}(1)$ nach Bemerkung 3.5. Also gilt $G(\tau) = \langle x_j \rangle_*^G \oplus H$ und nach [Me, Lemma 2.2*a*] folgt $G(\tau) = \langle x_j + h_j \rangle_*^G \oplus H$. Da $\chi^G(x_j + h_j) = \chi^G(x_j) \wedge \chi^G(h_j) = \chi^G(x_j)$ folgt $G(\tau) = S_j(x_j + h_j) \oplus H$. Für $\tau \neq \sigma \in T(G)$ unterscheiden sich die maximalen σ-homogenen direkten Summanden von W_{j-1} und W_j nicht, und es gilt $G(\sigma) = G^{\#}(\sigma) \oplus \bigoplus_{t(y_i)=\sigma} S_i y_i$, d.h. $W_j \in \operatorname{reg} G$. Da $\chi^{W'}(x_i + h_i) = \chi^{S_i}(1) = \chi^W(x_i)$, ist auch $\{x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n\}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis von W'.

Sei $W = W'$, dann folgt $h_i = (x_i + h_i) - x_i \in W$ für $i = 1, \ldots, n$. Gelte nun andererseits $h_i \in W$ für $i = 1, \ldots, n$. Aus $\chi^G(h_i) \geqslant \chi^G(x_i) = \chi^W(x_i)$ nach Bemerkung 3.5 folgt $\chi^G(x_i + h_i) \geqslant \chi^G(x_i)$. Nach Bemerkung 2.3 folgt dann $\chi^W(x_i + h_i) \geqslant \chi^W(x_i)$ und damit $S_i(x_i + h_i) \subseteq W$, also $W' \subseteq W$. Da $W' \in \operatorname{reg} G$, also $[G : W'] = i(G) = [G : W]$ folgt $W = W'$. ■

SATZ 3.7. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und $W \in \operatorname{reg} G$, dann läßt sich jedes $W' \in \operatorname{reg} G$ aus W gemäß Gleichung* (2) *konstruieren.*

BEWEIS. Sei $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$ mit $i(G)$-Koehler-Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$, dann gibt es nach Bemerkung 3.5 eine $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{B} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ von W' mit $W' = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i y_i$. Seien nun $h_1, \ldots, h_n$ die $\mathcal{B}$-standardisierten Urbilder der Nebenklassen $-x_1 + W', \ldots, -x_n + W'$. Nach Lemma 2.2 gilt $t(h_i) \geqslant t(x_i) = t(y_i)$. Desweiteren erfüllen die h_i nach Satz 3.4 die Trägerbedingung, liegen also in $G^{\#}(t(x_i))$. Nach Bemerkung 2.3 gilt $\chi^G(h_i) \geqslant \chi^{W'}(y_i) = \chi^W(x_i)$. Also ist die gemäß (2) konstruierte Gruppe $V := \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + h_i) \in \operatorname{reg} G$ mit $i(G)$-Koehler-Basis $\{x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n\}$ nach Lemma 3.6.

Nun gilt nach Konstruktion $h_i = -x_i + w_i$ mit $w_i \in W'$, also $x_i + h_i \in W'$. Desweiteren gilt $\chi^{W'}(y_i) = \chi^{S_i}(1) = \chi^V(x_i + h_i) = \chi^G(x_i + h_i)$ nach Bemerkung 3.5. Aus $\chi^G(x_i + h_i) \geqslant \chi^{W'}(y_i)$ folgt nach Bemerkung 2.3 dann $\chi^{W'}(x_i + h_i) \geqslant \chi^{W'}(y_i) = \chi^{S_i}(1)$, d.h. $S_i(x_i + h_i) \in W'$, also $V \subseteq W'$. Da $[G : V] = i(G) = [G : W']$ folgt $V = W'$. ■

4. Anzahl der regulierenden Untergruppen.

LEMMA 4.1. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe. Seien W, V zwei regulierende Untergruppen und $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis von W. Für eine $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{A} = \{x_1 + g_1, \dots, x_n + g_n\}$ von V, die aus $\mathcal{B}$ gemäß Gleichung (2) konstruiert wird, gilt für alle $a \in G$ die Gleichung $J_{\mathcal{B}}(a) := \{i \mid t(x_i)$ minimal bezüglich $i \in I_{\mathcal{B}}(a)\} = J_{\mathcal{A}}(a) := \{i \mid t(x_i)$ minimal bezüglich $i \in I_{\mathcal{A}}(a)\}$. Weiter ist für $i \in J_{\mathcal{B}}(a)$ der i-te $\mathcal{B}$-Koeffizient von a gleich dem i-ten $\mathcal{A}$-Koeffizienten von a.*

BEWEIS. Sei $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$, $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i (x_i + g_i)$ und $a \in G$ beliebig. Wir zeigen zuerest, daß für $i \in I_{\mathcal{B}}(a)$ ein $j \in I_{\mathcal{A}}(a)$ existiert mit $t(x_j) \leqslant \leqslant t(x_i)$. Sei

$$a = \frac{1}{\omega_W(a)} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = \frac{1}{\omega_V(a)} \sum_{k=1}^{n} a_k (x_k + g_k)$$

mit $a_k, b_k \in S_k$. Ist $i \in I_{\mathcal{B}}(a)$, dann muß $i \in I_{\mathcal{B}}(x_j + g_j)$ für mindestens ein $j \in I_{\mathcal{A}}(a)$ gelten. Das bedeutet, entweder ist sowieso $i = j$, oder $i \in \in I_{\mathcal{B}}(g_j)$. Da $g_j \in G^{\#}(t(x_j))$ folgt $t(x_i) > t(x_j)$ und damit die Zwischebehauptung.

Da sich umgekehrt auch $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ gemäß Gleichung (2) konstruieren läßt, folgt aus Symmetriegründen, daß zu jedem $j \in I_{\mathcal{A}}(a)$ ein $i \in I_{\mathcal{B}}(a)$ existiert mit $t(x_i) \leqslant t(x_j)$. Damit ergibt sich die Gleichheit von $J_{\mathcal{A}}(a)$ und $J_{\mathcal{B}}(a)$.

Sei $i \in J_{\mathcal{B}}(a)$, dann gilt wegen $g_j \in G^{\#}(t(x_j))$ und der Minimalität von $t(x_i)$, daß $i \notin I_{\mathcal{B}}(g_j)$ für alle j gilt. Koeffizientenvergleich und Symmetrie liefern die letzte Behauptung des Lemmas. ∎

LEMMA 4.2. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe. Seien W, V zwei regulierende Untergruppen und $\mathcal{B}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis von W. Dann hat ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element h den größten Typ in der Nebenklasse $h + V$.*

Weiter is 0 das einzige $\mathcal{B}$-standardisierte Element in G, das in einer regulierenden Untergruppe liegt.

BEWEIS Sei $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$, $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$, dann läßt sich V nach Satz 3.7 gemäß Gleichung (2) als $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i (x_i + g_i)$ mit der $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{A} = \{x_1 + g_1, \dots, x_n + g_n\}$ darstellen.

Sei g das $\mathcal{A}$-standardisierte Urbild der Nebenklasse $h + V$, dann gilt für ein $v \in V$

$$h - g = \frac{1}{\omega_W(h)}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i\right) - g = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i + g_i) = v,$$

mit $d_i, c_i \in S_i$. Nach Lemma 4.1 gilt $J := J_{\mathcal{B}}(v) = J_{\mathcal{A}}(v)$. Wegen $h - g = v$ folgt $J_{\mathcal{B}}(h) \setminus J = J_{\mathcal{B}}(g) \setminus J$. Ebenso gilt $J_{\mathcal{B}}(h) \cap J = J_{\mathcal{B}}(g) \cap J$. Gäbe es nämlich ein $j \in (J_{\mathcal{B}}(h) \cap J) \setminus J_{\mathcal{B}}(g)$, so wäre $d_j / \omega_W(h)$ gleich dem j-ten $\mathcal{B}$-Koeffizienten von v, welcher, da insbesondere $j \in J$ ist, nach Lemma 4.1 gleich dem j-ten $\mathcal{A}$-Koeffizienten von v, also gleich $c_j \in S_j$ wäre. Aber $d_j / \omega_W(h) \in S_j$ steht im Widerspruch zu Lemma 2.2. Analog zeigt man, daß es kein $i \in (J_{\mathcal{B}}(g) \cap J)/J_{\mathcal{B}}(h)$ gibt.

Insgesamt ist also $J_{\mathcal{B}}(h) = J_{\mathcal{B}}(g)$ gezeigt. Weither gilt $t(h) = \bigwedge \{t(x_i) \mid i \in J_{\mathcal{B}}(h)\} = t(g)$ und g hat nach Lemma 2.2 maximalen Typ in der Nebenklasse $g + V = h + V$. Ist insbesondere $h \in V$, so gilt $g = 0$ und $J_{\mathcal{B}}(h) = J_{\mathcal{B}}(g) = \emptyset$, woraus $h = 0$ folgt. ■

Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und $\mathcal{B}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis einer regulierenden Untergruppe $W \in \operatorname{reg} G$. Dann heißt $\mathcal{B}$ *faktortreu*, wenn in jeder Nebenklasse einer jeden regulierenden Untergruppe von G genau ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element liegt.

Die Gruppe G heißt *vollständig faktortreu*, wenn jede $i(G)$-Koehler-Basis einer jeden regulierenden Untergruppe von G faktortreu ist.

Bemerkungen. 1) Wegen $[G : V] = i(G) = [G : W]$ gibt es nach Lemma 2.1 genausoviele Nebenklassen von V in G wie es $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente in G gibt. Also ist die $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{B}$ einer regulierenden Untergruppe W genau dann faktortreu, wenn in keiner Nebenklasse einer (anderen) regulierenden Untergruppe V zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Element liegen.

Gibt es nur eine einzige regulierende Untergruppe W in G, so ist jede $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{B}$ von W faktortreu, d.h. G ist dann vollständig faktortreu.

Für eine Charakterisierung der fast vollständig zerlegbaren Gruppen, die nur eine regulierende Untergruppe besitzen siehe Satz 5.1.

2) Nicht jede $i(G)$-Koehler-Basis einer regulierenden Untergruppe ist faktortreu, wie das Beispiel in Bemerkung 4.9 zeigt.

3) Sei G vollständig faktortreu und für $i = 1,2$ seien $W_i \in \operatorname{reg} G$ mit $i(G)$-Koehler-Basen $\mathcal{B}_i$ und $h_i \in G$ standardisiert bezüglich $\mathcal{B}_i$. Dann muß aus $h_1 \in h_2 + W_2$ nicht unbedingt $h_2 \in h_1 + W_1$ folgen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei $\mathcal{B}_1 = \{x_1, \ldots, x_6\}$ und

$$W_1 = \bigoplus_{i=1}^{6} S_i x_i = \boldsymbol{Q}^{(3,5,7)} x_1 \oplus \boldsymbol{Q}^{(3,5,11)} x_2 \oplus$$

$$\oplus \boldsymbol{Q}^{(3,5)} x_3 \oplus \boldsymbol{Q}^{(3,11)} x_4 \oplus \boldsymbol{Q}^{(3)} x_5 \oplus \boldsymbol{Q}^{(11)} x_6$$

und

$$G = \left\langle W, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{x_5 + x_6}{2} \right\rangle.$$

Da $i(G) = 8$ ist G vollständig faktortreu, wie später in Satz 4.6 gezeigt wird. Sei $\mathcal{B}_2 = \{y_1, \ldots, y_6\}$, mit $y_3 = x_3 + (x_1 + x_2)/2$, $y_5 = x_5 + (x_3 + x_4)/2$, sowie $y_i = x_i$ für $i = 1,2,4,6$. Nach Lemma 3.6 ist dann auch $W_2 = \bigoplus_{i=1}^{6} S_i y_i$ eine regulierende Untergruppe von G.

Sei

$$h_1 = \frac{x_5 + x_6}{2}, \qquad h_2 = \frac{4y_6 + 4y_5 + 6y_4 + 6y_3 + y_2 + y_1}{8}$$

und

$$h_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_5 + x_6}{2},$$

dann sind h_1, h_3 standardisiert bezüglich $\mathcal{B}_1$ und h_2 ist $\mathcal{B}_2$-standardisiert. Es gilt $h_1 \in h_2 + W_2$, denn

$$h_2 - y_4 - y_3 = \frac{4y_6 + 4y_5 - 2y_4 - 2y_3 + y_2 + y_1}{8} =$$

$$= \frac{4y_6 + 4y_5 - 2y_4 - 2x_3}{8} = \frac{4x_6 + 4x_5}{8} = \frac{x_5 + x_6}{2} = h_1.$$

Anderer seits gilt $h_2 \in h_3 + W_1$, also $h_2 \notin h_1 + W_1$, denn

$$h_3 + x_3 + x_4 = \frac{4x_6 + 4x_5 + 8x_4 + 8x_3 + 4x_2 + 4x_1}{8} =$$

$$= \frac{4y_6 + 4y_5 + 6x_4 + 6x_4 + 6x_3 + 4x_2 + 4x_1}{8} =$$

$$= \frac{4y_6 + 4y_5 + 6y_4 + 6y_3 + x_2 + x_1}{8} = h_2,$$

da $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$.

LEMMA 4.3. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$ eine regulierende Untergruppe mit $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Seien*

$$h_1 = \frac{1}{\omega_W(h_1)} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{1}{\omega_W(h_2)} \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente, die in derselben Nebenklasse einer (anderen) regulierenden Untergruppe liegen. Desweiteren sei

$$d_i := \frac{a_i}{\omega_W(h_1)} - \frac{b_i}{\omega_W(h_2)} \quad \text{und} \quad \tau = t(x_j)$$

minimal bezüglich $d_j \neq 0$. Dann gilt $d_j \in S_j$ und $|d_i| < 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

BEWEIS. Sei V eine regulierende Untergruppe von G, so daß h_1 und h_2 in derselben Nebenklasse von V liegen, also $h_1 - h_2 = v$ mit $v \in V$. Nach Satz 3.7 läßt sich V gemäß Gleichung (2) in der Form $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + g_i)$ darstellen. Das bedeutet

$$h_1 - h_2 = \frac{1}{\omega_W(h_1)} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \frac{1}{\omega_W(h_2)} \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i + g_i) = v$$

mit $c_i \in S_i$ und $a_i, b_i \in \mathbf{Z}$ unter den Nebenbedingungen $0 \leqslant a_i < w_i = |S_i/\omega_W(h_1)S_i|$ und $0 \leqslant b_i < w_i' = |S_i/\omega_W(h_2)S_i|$. Also gilt

$$0 \leqslant \frac{a_i}{\omega_W(h_1)} < \frac{w_i}{\omega_W(h_1)} \leqslant 1 \quad \text{und} \quad 0 \leqslant \frac{b_i}{\omega_W(h_2)} < \frac{w_i'}{\omega_W(h_2)} \leqslant 1.$$

Damit folgt dann $|d_i| = |a_i/\omega_W(h_1) - b_i/\omega_W(h_2)| < 1$.

Da $\tau = t(x_j) \in T(G)$ minimal bezüglich $d_j \neq 0$, gilt $d_k = 0$ für $t(x_k) < \tau$ und $g_s \in G^{\#}(\tau)$ für $t(x_s) = \tau$. Folglich ist $j \notin I_{\mathcal{B}}(c_i(x_i + g_i))$ für $i \neq j$, und die j-te $\mathcal{B}$-Koordinate von v ist gleich c_j. Ein Koeffizientenvergleich liefert $d_j = a_j/\omega_W(h_1) - b_j/\omega_W(h_2) = c_j \in S_j$. ■

LEMMA 4.4. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und W eine regulierende Untergruppe mit $i(G)$-Koehler-Basis $\mathcal{B}$. Haben zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente, die in derselben Nebenklasse einer (anderen) regulierenden Untergruppe liegen, die gleiche Ordnung bezüglich W, so sind sie schon gleich.*

Insbesondere ist $\mathcal{B}$ faktortreu, falls je zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Ele-

ment, die in derselben Nebenklasse einer (anderen) regulierenden Untergruppe liegen, gleiche Ordnung bezüglich W haben.

BEWEIS. Sei $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$. Weiter seien h_1, h_2 zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente, die in derselben Nebenklasse einer regulierenden Untergruppe liegen mit $\omega_W(h_1) = \omega_W(h_2) =: \omega$. Sei $h_1 = 1/\omega \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $h_2 = 1/\omega \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ und $d_i = (a_i - b_i)/\omega$. Sei $\tau = t(x_j)$ minimal bezüglich $d_j \neq 0$, dann gilt nach Lemma 4.3 $d_j \in S_j$, etwa $d_j = e/f$ in gekürzter Form mit $e, f \in \boldsymbol{Z}$ und $f > 0$. Also gilt $1/f \in S_j$ und $f \mid \omega$. Da h_1 und h_2 standardisiert bezüglich $\mathcal{B}$ sind, gilt $0 \leqslant a_j, b_j < |S_j/\omega S_j| \leqslant \omega/f$. Damit folgt $0 \leqslant a_j/\omega$, $b_j/\omega < 1/f$ und somit $|e/f| = |d_j| = |(a_j - b_j)/\omega| < 1/f$, also $e = 0 = d_j$, im Widerspruch zur Wahl von d_j. ∎

LEMMA 4.5. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine i(G)-Koehler-Basis der regulierenden Untergruppe $W \in \operatorname{reg} G$. Wenn für alle $\mathcal{B}$-standardisierten Elemente $h \neq 0$ und jedes $i \in I(h)$ gilt $h_p^W(x_i) = 0$ für $p \mid \omega_W(h)$, so ist $\mathcal{B}$ faktortreu.*

BEWEIS. Sei $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$ und seien h_1, h_2 zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente, die in derselben Nebenklasse einer regulierenden Untergruppe liegen. Sei

$$h_1 = \frac{1}{\omega_W(h_1)} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{1}{\omega_W(h_2)} \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

sowie $d_i = a_i/\omega_W(h_1) - b_i/\omega_W(h_2)$. Sei $\tau = t(x_j)$ minimal bezüglich $d_j \neq 0$, dann gilt nach Lemma 4.3 $d_j \in S_j$, etwa $d_j = e/f$ in gekürzter Form mit $e, f \in \boldsymbol{Z}$. Also gilt $1/f \in S_j$. Für eine Primzahl p mit $p \mid f$ gilt dann $p \mid \omega_W(h_1)$ oder $p \mid \omega_W(h_2)$. Da $j \in I(h_1)$ oder $j \in I(h_2)$ gilt nach Voraussetzung $h_p^W(x_j) = h_p^{S_j}(1) = 0$. Damit ergibt sich $f = 1$. Nach Lemma 4.3 gilt aber $|d_j| = |e/f| < 1$ und es folgt $d_j = 0$, im Widerspruch zur Wahl von d_j. Also folgt $h_1 = h_2$, und $\mathcal{B}$ ist faktortreu. ∎

SATZ 4.6. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe, dann ist G vollständig faktortreu, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *$i(G) = p^m$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl m.*

(ii) *$i(G) = p^m$ für Primzahlen p, q und eine natürliche Zahlm.*

(iii) *G enthält kein Element $g \neq 0$ mit $h_p^G(g) = \infty$ für $p \mid i(G)$.*

(iv) *G ist p-reduziert für Primzahlen p, die i(G) teilen, d.h. 0 ist die einzige p-divisible Untergruppe von G.*

Beweis. Seien W, V zwei beliebige regulierende Untergruppen von G und $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine beliebige $i(G)$-Koehler-Basis von $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$.

(i) Sei $h = 1/\omega_W(h) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \neq 0$ ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element aus G und $\omega_W(h) = p^k$. Falls $i \in I(h)$, so folgt für die i-te Koordinate $0 < a_i < |S_i/p^k S_i|$. Das bedeutet $p^k S_i \neq S_i$, mit anderen Worten $h_p^{S_i}(1) < \infty$. Da $\mathcal{B}$ eine p-Koehler-Basis ist, also $h_p^W(x_i) \in \{0, \infty\}$, folgt $h_p^W(x_i) = 0$ und $\mathcal{B}$ ist nach Lemma 4.5 faktortreu. Da $\mathcal{B}$ und W beliebig waren, ist G vollständig faktortreu.

(ii) Seien $h_1 = 1/\omega_W(h_1) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ und $h_2 = 1/\omega_W(h_2) \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente, die in derselben Nebenklasse von V liegen. Setze $d_i = a_i/\omega_W(h_1) - b_i/\omega_W(h_2)$. Sei nun $\tau = t(x_j) \in T(G)$ minimal bezüglich $d_j \neq 0$, dann gilt nach Lemma 4.3 $d_j \in S_j$, etwa $d_j = e/f$ in gekürzter Form mit $e, f \in \boldsymbol{Z}$ und $f > 0$. Also gilt $1/f \in S_j$. Falls $pq \mid f$ wäre sowohl die p-Höhe, als auch die q-Höhe von x_j gleich unendlich. Also wäre $|S_j/\omega_W(h_1) S_j| = |S_j/\omega_W(h_2) S_j| = 1$ und somit $a_j = b_j = 0$, da h_1 und h_2 beide $\mathcal{B}$-standardisiert sind. Damit folgt aber auch $d_j = 0$, im Widerspruch zur Wahl von d_j. Der Fall $f = 1$ scheidet ebenfalls aus, da $|d_j| < 1$ nach Lemma 4.3 und es verbleiben die Fälle $f = p^t$ und $f = q$.

1) Fall $\omega_W(h_1) = p^r$, $\omega_W(h_2) = p^s$: Dann gilt $f = p^t$, also $h_p^W(x_j) = \infty$. Somit gilt $|S_j/\omega_W(h_1) S_j| = |S_j/\omega_W(h_2) S_j| = 1$ und folglich ist $a_j = b_j = 0$, da h_1 und h_2 beide $\mathcal{B}$-standardisiert sind. Damit folgt dann $d_j = 0$, im Widerspruch zur Wahl von d_j.

2) Fall $\omega_W(h_1) = p^r q$, $\omega_W(h_2) = p^r q$: Nach Lemma 4.4 folgt $h_1 = h_2$.

3) Fall $\omega_W(h_1) = p^r q$, $\omega_W(h_2) = p^s q$ und $r < s$: Falls $f = q$, ist $1/q \in S_j$, und es gilt $|S_j/\omega_W(h_1) S_j| \leqslant p^r$ und $|S_j/\omega_W(h_2) S_j| \leqslant p^s$. Da h_1 und h_2 jeweils $\mathcal{B}$-standardisiert sind, folgt $0 \leqslant a_j/\omega_W(h_1)$, $b_j/\omega_W(h_2) < 1/q$. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{q} > \left| \frac{a_j}{\omega_W(h_1)} - \frac{b_j}{\omega_W(h_2)} \right| = |d_j| \geqslant \frac{1}{f} = \frac{1}{q},$$

also ein Widerspruch, d.h. nur der Fall $f = p^t$ kann auftreten. Anders ausgedrückt, alle x_i mit $t(x_i) \in T := \{t(x_j) \mid t(x_j) \text{ minimal bezüglich } c_j \neq 0\}$ haben unendliche p-Höhe. Ebenso haben auch alle x_i, für die ein $\tau \in T$ mit $t(x_i) \geqslant \tau$ existiert, unendliche p-Höhe.

Sei nun $k \in I_{\mathcal{B}}(h_2)$ so gewählt, daß kein $\tau \in T$ existiert mit $t(x_k) \geqslant \tau$, dann gilt $d_k = 0$, also ist $a_k/\omega_W(h_1) = b_k/\omega_W(h_2)$. Das bedeutet $a_k/p^r q = b_k/p^s q$ und damit $1 \neq p^{s-r} \mid b_k$. Insgesamt ergibt sich damit $p^r q h_2 \in W$, im Widerspruch zu $\omega_W(h_2) = p^s q > p^r q$.

4) Fall $\omega_W(h_1) = p^r q$, $\omega_W(h_2) = p^s$: Falls $f = p^t$, ist $1/p \in S_j$ und damit gilt $h_p^W(x_j) = \infty$, da $\mathcal{B}$ eine pq-Koehler-Basis ist. Also gilt $h :=$ $:= h_2 - (b_j/p^s)x_j \in h_2 + W$, im Widerspruch zu $I(h_2) \subsetneq I(h)$ nach Lemma 2.2. Das bedeutet nur der Fall $f = q$ kann auftreten, also $1/q \in S_j$. Anders ausgedrückt, für alle x_i mit $t(x_i) \in T := \{t(x_j) \mid t(x_j)$ minimal bezüglich $c_j \neq 0\}$ ist $x_i/q \in W$. Ebenso sind alle $x_i/q \in W$, für die ein $\tau \in T$ existiert mit $t(x_i) \geqslant \tau$. Sei nun $k \in I_{\mathcal{B}}(h_1)$ so gewählt, daß kein $\tau \in T$ existiert mit $t(x_i) \geqslant \tau$, dann gilt $d_k = 0$, also ist $a_k/\omega_W(h_1) = b_k/\omega_W(h_2)$. Das bedeutet $a_k/p^r q = b_k/p^s$ und damit $q \mid a_k$. Insgesamt ergibt sich damit $p^r h_1 \in W$, im Widerspruch zu $\omega_W(h_1) = p^r q > p^r$.

Wegen $h_2 - h_1 = -v$, sind damit auch die Fälle mit vertauschten Ordnungen abgedeckt. Also folgt $h_1 = h_2$. Da V beliebig war, folgt, daß $\mathcal{B}$ faktortreu ist. Da $\mathcal{B}$ und W beliebig waren, folgt, daß G vollständig faktortreu ist.

(iii) Da $\mathcal{B}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis ist, gilt $h_p(x_i) \in \{0, \infty\}$ für $p \mid i(G)$ und es folgt nach Voraussetzung $h_p(x_i) = 0$ für $p \mid i(G)$. Also erfüllt $\mathcal{B}$ die Voraussetzungen von Lemma 4.5 und ist damit faktortreu. Da $\mathcal{B}$ und W beliebig waren folgt, daß G vollständig faktortreu ist.

(iv) Da G für $p \mid i(G)$ außer 0 keine p-divisible Untergruppe enthält, gibt es kein $0 \neq g \in G$ mit $h_p^G(g) = \infty$, da sonst $0 \neq \mathbf{Z}g$ eine p-divisible Untergruppe von G wäre. Also erfüllt G die Bedingung (iii) und ist vollständig faktortreu. ■

Definition 4.7. Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und $W \in \operatorname{reg} G$. Weiter sei $\mathcal{B}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis von W. Man sagt die Gruppe V geht durch *$\mathcal{B}$-Standardkonstruktion* aus W hervor, wenn sich V aus W gemäß Gleichung (2) konstruieren läßt, und dabei alle h_i bezüglich $\mathcal{B}$ standardisierte Element sind.

Geht V durch $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus der regulierenden Untergruppe W hervor, so ist auch V nach Lemma 3.6 eine regulierende Untergruppe von G.

Satz 4.8. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe, $W \in$ $\in \operatorname{reg} G$ und $\mathcal{B}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis von W. Ist $\mathcal{B}$ faktortreu, so geht jedes $V \in \operatorname{reg} G$ durch eine eindeutig bestimmte $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W hervor.*

BEWEIS. Sei $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$.

— *Existenz*: Nach Satz 3.7 läst sich V in der Form $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + g_i)$ mit $g_i \in G^{\#}(t(x_i))$ und $\chi^G(g_i) \geqslant \chi^G(x_i)$ darstellen. Da $\mathcal{B}$ faktortreu ist, gibt es in jeder Nebenklasse $g_i + V$ ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element h_i, und nach Lemma 4.2 gilt $t(h_i) \geqslant t(g_i) \geqslant t(x_i)$. Sei $h_i = g_i + v_i$ mit $v_i \in V$. Da h_i die Trägerbedingung erfüllt, gilt $h_i \in G^{\#}(t(h_i)) \subseteq G^{\#}(t(x_i))$ und nach Bemerkung 2.3 auch $\chi^G(h_i) \geqslant \chi^G(x_i)$. Also gilt für $v_i = h_i - g_i$ ebenfalls $v_i \in G^{\#}(t(x_i))$ und $\chi^G(v_i) \geqslant \chi^G(x_i)$. Wegen $v_i \in V$ gilt nach Lemma 3.6 dann $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i((x_i + g_i) + v_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + h_i)$, und V geht durch $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W hervor.

— *Eindeutigkeit*: Gehe $V = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + h_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i(x_i + h_i')$ durch die beiden angegebenen $\mathcal{B}$-Standardkonstruktionen aus W hervor. Wegen $x_i + h_i$, $x_i + h_i' \in V$ folgt $(x_i + h_i) - (x_i + h_i') = h_i - h_i' \in V$, also liegen h_i und h_i' in der gleichen Nebenklasse von V. Da $\mathcal{B}$ faktortreu ist, liegt in jeder Nebenklasse von V genau ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element, und es folgt $h_i = h_i'$ für alle i. ■

BEMERKUNG 4.9. Auf die Voraussetzung, daß $\mathcal{B}$ faktortreu ist, kann im Satz 4.8 nicht verzichtet werden, wie folgendes Beispiel zeigt:

Sei

$$W = \bigoplus_{i=1}^{7} S_i x_i = \boldsymbol{Q}^{(3)} x_1 \oplus \boldsymbol{Q}^{(5)} x_2 \oplus \boldsymbol{Q}^{(5,7)} x_3 \oplus$$
$$\oplus \boldsymbol{Q}^{(5,11)} x_4 \oplus \boldsymbol{Q}^{(3,7)} x_5 \oplus \boldsymbol{Q}^{(3,11)} x_6 \oplus \boldsymbol{Z} x_7,$$

und sei die fast vollständig zerlegbare Gruppe

$$G = \left\langle W, \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{3}, \frac{x_5 + x_6}{5} \right\rangle$$

gegeben, dann ist $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_7\}$ eine 30-Koehler-Basis von W. Sei h das $\mathcal{B}$-standardisierte Urbild einer beliebigen Nebenklasse

$$\left(a\frac{x_1 + x_2}{2} + b\frac{x_3 + x_4}{3} + c\frac{x_5 + x_6}{5} \right) + W$$

von W, dann gilt $1 \in I(h) \Leftrightarrow 2 \in I(h)$, sowie $3 \in I(h) \Leftrightarrow 4 \in I(h)$ und $5 \in I(h) \Leftrightarrow 6 \in I(h)$. Weiter gilt $7 \notin I(h)$. Falls $5, 6 \in I(h)$ folgt $t(x_5) > t(h) \leqslant$

$\leq t(x_1) = t(x_5) \wedge t(x_6) < t(x_6)$. Falls $3, 4 \in I(h)$ folgt $t(x_3) > t(h) \leq t(x_2) = t(x_3) \wedge t(x_4) < t(x_4)$. Falls $1, 2 \in I(h)$ folgt $t(x_1) > t(h) \leq t(x_7) = t(x_1) \wedge t(x_2) < t(x_2)$. Also erfüllen alle 30 möglichen $\mathcal{B}$-standardisierten Elemente in G die Trägerbedingung und $W \in \operatorname{reg} G$ nach Satz 3.4. Weiter gilt $i(G) = [G : W] = 30$.

Sei $y_1 = x_1 + 4(x_5 + x_6)/5$, $y_2 = x_2 + 2(x_3 + x_4)/3$ und $y_i = x_i$ für $i = 3, \dots, 7$, dann ist $V = \bigoplus_{i=1}^{7} S_i y_i$ nach Lemma 3.6 ebenfalls eine regulierende Untergruppe von G. Sei $h_1 = (x_1 + x_2)/2$ und

$$h_2 = \frac{5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6}{30} =$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{3} + 2\frac{x_5 + x_6}{5} - \frac{x_1}{3} - 2\frac{x_2}{5} - \frac{x_3}{5} - \frac{x_4}{5} - \frac{x_5}{3} - \frac{x_6}{3} \in G,$$

dann sind h_1, h_2 zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente aus G, die in derselben Nebenklasse von V liegen, d.h. $\mathcal{B}$ ist nicht faktortreu. Es gilt nämlich

$$h_1 - h_2 = \frac{10x_1 + 12x_2 - 4x_3 - 4x_4 - 2x_5 - 2x_6}{30} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x_1 + 4\frac{x_5 + x_6}{5}\right) + \frac{2}{5}\left(x_2 + 2\frac{x_3 + x_4}{3}\right) - 2\frac{x_3}{5} - 2\frac{x_4}{5} - \frac{x_5}{3} - \frac{x_6}{3} =$$

$$= \frac{y_1}{3} + 2\frac{y_2}{5} - 2\frac{y_3}{5} - 2\frac{y_4}{5} - \frac{y_5}{3} - \frac{y_6}{3} \in \bigoplus_{i=1}^{6} S_i y_i \subset V.$$

Sei nun $z_i = z_i' = y_i$ für $i = 1, \dots, 6$ und $z_7 = x_7 + h_1$ sowie $z_7' = x_7 + h_2$, dann gehen die beiden regulierenden Untergruppen $U = \bigoplus_{i=1}^{7} S_i z_i$ und $U' = \bigoplus_{i=1}^{7} S_i z_i'$ durch zwei verschiedene $\mathcal{B}$-Standardkonstruktionen aus W hervor. Es gilt aber $u = z_7 - z_7' = h_1 - h_2 \in \bigoplus_{i=1}^{6} S_i y_i = \bigoplus_{i=1}^{6} S_i z_i \subset U$. Desweiteren ist $u \in U^{\#}(t(z_7)) \subset G^{\#}(t(z_7))$ und wegen $\mathbf{Z}u \in U$ auch $\chi^G(u) \geq \chi^G(z_7) = \chi^U(z_7)$ nach Bemerkung 3.5. Folglich ist $U = U'$ nach Lemma 3.6, denn U' läßt sich aus U gemäß Gleichung (2) mit Elementen aus U konstruieren.

$\mathcal{A} = \{y_1, \dots, y_7\}$ ist eine $i(G)$-Koehler-Basis von V nach Lemma 3.6. Da in einer Nebenklasse von V zwei $\mathcal{B}$-standardisierte Elemente liegen, gibt es eine Nebenklasse $g + V$, in der kein $\mathcal{B}$-standardisiertes

Element liegt. Sei o.B.d.A. g das $\mathcal{A}$-standardisierte Element in der Nebenklasse $g + V$. Es gilt $g + V \neq V$, da in der Nebenklasse $0 + V$ das $\mathcal{B}$-standardisierte Element 0 liegt. Da g standardisiert bezüglich $\mathcal{A}$ ist, muß wegen der Trägerbedingung $7 \notin I_{\mathcal{A}}(g)$ gelten, also $g \in G^{\#}(t(y_7))$. Sei $V' = \boldsymbol{Z}(x_7 + g) \oplus \bigoplus_{i=1}^{6} S_i y_i$. Angenommen V' ließe sich durch $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W konstruieren, etwa $V' = \bigoplus_{i=1}^{7} S_i(x_i + g_i)$, dann gilt insbesondere

$$v = x_7 + g - (x_7 + g_7) = g - g_7 \in V' \cap G^{\#}(t(x_7)) = \bigoplus_{i=1}^{6} S_i y_i \subset V.$$

Das führt zu einem Widerspruch, da dann das $\mathcal{B}$-standardisierte Element g_7 in der Nebenklasse $g + V$ läge. Also gibt es regulierende Untergruppen, die nicht durch $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W hervorgehen.

SATZ 4.10. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe, $W \in \operatorname{reg}(G)$ und $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine faktortreue $i(G)$-Koehler-Basis von W. Sei $\varphi\colon G \mapsto G/W$ der kanonische Epimorphismus und $\nu(i) :=$ $:= |\{h \mid h$ standardisiert bezüglich $\mathcal{B}$ und $t(h) \geqslant t(x_i)\}|$, dann gilt*

$$|\operatorname{reg} G| = \prod_{i=1}^{n} \nu(i) = \prod_{i=1}^{n} |\varphi(G(t(x_i)))| = \prod_{i=1}^{n} |\varphi(G^{\#}(t(x_i)))| =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} i(G(t(x_i))) = \prod_{\tau \in T(G)} i(G(\tau))^{rg(G(\tau)/G^{\#}(\tau))}.$$

BEWEIS. Nach Satz 3.4 erfüllen alle $\mathcal{B}$-standardisierten Elemente h die Trägerbedingung, liegen also in $G^{\#}(t(h))$. Für $t(h) \geqslant t(x_i)$ gilt also $h \in G^{\#}(t(h)) \subseteq G^{\#}(t(x_i))$ und $\chi^G(h) \geqslant \chi^G(x_i)$ nach Bemerkung 2.3. Also gibt es genau $\nu(i)$ Möglichkeiten für den Summanden $S_i(x_i + h_i)$ bei einer $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W, und es gibt genau $\prod_{i=1}^{n} \nu(i)$ Möglichkeiten für eine Gruppe, die durch $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W hervorgeht. Nach Lemma 3.6 ergibt jede $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W eine regulierende Untergruppe. Nach Satz 4.8 geht jede regulierende Untergruppe durch eine eindeutig bestimmte $\mathcal{B}$-Standardkonstruktion aus W hervor, also $|\operatorname{reg} G| = \prod_{i=1}^{n} \nu(i)$.

Der Rest der ersten Zeile ergibt sich aus Satz 3.4(iv). Direkt aus den Definitionen folgt, daß die Gruppe $G(t(x_i))$ fast vollständig zerlegbar ist, und daß $W(t(x_i)) \in \operatorname{reg} G(t(x_i))$ gilt. Aus $\varphi(G(t(x_i))) \cong$

$\cong G(t(x_i))/W(t(x_i))$ folgt dann die zweite Zeile der Behauptung. ■

Mit diesem Abschnitt ist der erste Schritt zur Bestimmung der Anzahl aller regulierenden Untergruppen einer fast vollständig zerlegbaren Gruppe getan. Ebenso hat man mit der Definition 4.7 und Satz 4.8 eine Art Normalform für regulierende Untergruppen erhalten.

Allerdings sind, wie das Beispiel in Bemerkung 4.9 zeigt, die Ergebnisse von einer faktortreuen Basis abhängig, so daß sich eine Reihe von Fragen ergibt:

Angenommen die regulierende Untergruppe W von G enthält eine faktortreue Basis. Sind dann schon alle $i(G)$-Koehler-Basen von W faktortreu, oder ist gar G dann schon vollständig faktortreu?

Gibt es fast vollständig zerlegbare Gruppen, so daß keine regulierende Untergruppe eine faktortreue Basis enthält? Falls es keine solche Gruppe gibt, wenn also jede fast vollständig zerlegbare Gruppe eine regulierende Untergruppe enthält, die eine faktortreue Basis besitzt, könnte die Gleichung $|\operatorname{reg} G| = \prod_{\tau \in T(G)} i(G(\tau))^{rg(G(\tau))}$ aus Satz 4.10 gefolgert werden.

Sei G eine vollständig zerlegbare Gruppe und $W \in \operatorname{reg} G$. Falls es eine Teilmenge $\{g_1, \dots, g_m\} \subset G$ gibt, so daß in jeder Nebenklasse einer jeden regulierenden Untergruppe genau ein Element g_i liegt, welches den größten Typ in dieser Nebenklasse annimmt, dann könnte man eine Konstruktion aus W mit diesen g_i analog zur Definition 4.7 definieren und könnte analog zum Satz 4.8 zeigen, daß sich jede regulierende Untergruppe mit dieser Konstruktion eindeutig darstellen läßt und auch Satz 4.10 würde gelten.

Sei $\mathcal{B}$ eine $i(G)$-Basis von W und seien $h_1, \dots, h_m$ alle $\mathcal{B}$-standardisierten Elemente in G, dann muß $\{g_1, \dots, g_m\} = \{h_1 + w_1, \dots, h_m + w_m\}$ mit Elementen $w_i \in W$ gelten, da insbesondere in jeder Nebenklasse $h_i + W$ von W genau ein Element g_j liegen soll.

Es bleibt jedoch die Frage, ob es überhaupt eine Teilmenge $\{g_1, \dots, g_m\}$ mit den geforderten Eigenschaften in jeder fast vollständig zerlegbaren Gruppe gibt.

5. Bestimmung des Regulators.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie man aus einer einzigen regulierenden Untergruppe einer fast vollständig zerlegbaren Gruppe den Regulator berechnen kann. Um den Regulator explizit zu bestimmen, berechnet man zuerst, mit dem in Abschnitt 3 beschriebenen Algorithmus, aus einer beliebigen, vollständig zerlegbaren Untergruppe von endlichem Index eine regulierende Untergruppe, um dann aus dieser, mit den in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden, den Regulator zu errechnen.

SATZ 5.1. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und W eine vollständig zerlegbare Untergruppe von endlichem Index mit $[G:W]$-Koehler-Basis $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *W ist die einzige regulierende Untergruppe von G, d.h. W ist der Regulator.*

(ii) *Zu keinem $\mathcal{B}$-standardisierten Element $h \neq 0$ existiert ein x_i mit $t(h) \geqslant t(x_i) \in T(G)$.*

(iii) *$W \in \operatorname{reg} G$, und es gilt $G^{\#}(\tau) = W^{\#}(\tau)$ für alle $\tau \in T(G)$.*

(iv) *Es gilt $G(\tau) = W(\tau)$ für alle $\tau \in T(G)$.*

BEWEIS. (i)$\Rightarrow$(ii) Sei W der regulierende Regulator von G. Dann gibt es kein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element $h \neq 0$ mit $t(h) \geqslant \tau \in T(G)$, da sonst nach Lemma 3.6 eine weitere regulierende Untergruppe existierte.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Aus (ii) folgt die Trägerbedingung, also ist $W \in \operatorname{reg} G$. Sei $\tau \in T(G)$. Die Inklusion $W^{\#}(\tau) \subseteq G^{\#}(\tau)$ ist klar. Für die andere Inklusion betrachtet man ein $g \in G^{\#}(\tau)$. Sei $g = h + w$, wobei $w \in W$ und h das $\mathcal{B}$-standardisierte Urbild der Nebenklasse $g + W$ ist. Nach Lemma 2.2 gilt $t(h) \geqslant t(g) \geqslant \tau$. Nach Voraussetzung gilt also $h = 0$ und somit $g = w \in W$. Insgesamt folgt $g \in G^{\#}(\tau) \cap W = W^{\#}(\tau)$ und somit $G^{\#}(\tau) \subseteq W^{\#}(\tau)$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Da W vollständig zerlegbar ist, und $W \in \operatorname{reg} G$, folgt für $\tau \in T(G)$ aus der Butlergleichung $G(\tau) = W_\tau \oplus G^{\#}(\tau) = W_\tau \oplus W^{\#}(\tau) = W(\tau)$.

(iv)$\Rightarrow$(i) Sei $V \in \operatorname{reg} G$, dann gilt $W(\tau) = G(\tau) = V_\tau \oplus G^{\#}(\tau)$ für alle $\tau \in T(G)$. Das bedeutet insbesondere $V_\tau \subseteq W(\tau)$, also $V = \bigoplus_{\tau \in T(G)} V_\tau \subseteq \sum_{\tau \in T(G)} W(\tau) \subseteq W$, und somit $V = W \in \operatorname{reg} G$. ∎

Sei G eine torsionsfreie abelsche Gruppe mit endlicher Zerlegungstypenmenge $T(G)$. Dann bezeichnet man die Mengen $T_1, \ldots, T_r$ mit $T_1 := \{\tau \mid \tau \in T(G) \text{ maximal}\}$ und $T_{i+1} := \{\tau \in T(G) \setminus (T_1 \cup \ldots \cup T_i) \text{ maximal}\}$ als *Typenschichten* von G.

SATZ 5.2. *Sei G eine fast vollständig zerlegbare Gruppe und $W = \bigoplus_{\tau \in T(G)} W_\tau \in \operatorname{reg} G$. Sei f_τ für die Typenschichten $T_1, \ldots, T_r$ induktiv* *wie folgt definiert:* $f_\tau := 1$ *für* $\tau \in T_1$ *und* $f_\tau := \exp\{G^{\#}(\tau)/\bigoplus_{\sigma > \tau} f_\sigma W_\sigma\}$ *für* $\tau \in T_2, \ldots, T_r$. *Dann ist* $R := \bigoplus_{\tau \in T(G)} f_\tau W_\tau$ *der Regulator von* G.

BEWEIS. Die f_τ sind wohldefiniert, denn für $\tau \in T_i$, $i = 2, \ldots, r$ werden zur Berechnung von f_τ nur f_σ benötigt mit $\tau \in \bigcup_{j=1}^{i-1} T_j$. Zum Beweis wird direkt das Regulatorkriterium von Burkhardt [Bu] nachgewiesen. Es gilt $R_\tau = f_\tau W_\tau$, und $R = \bigoplus_{\tau \in T(G)} R_\tau$ ist vollständig zerlegbar, also $R^{\#}(\tau) = \bigoplus_{\sigma > \tau} f_\sigma W_\sigma$.

(i) $f_\tau^{-1} R_\tau = W_\tau \subseteq G$,

(ii) $f_\tau G(\tau) = f_\tau(W_\tau \oplus G^{\#}(\tau)) = f_\tau W_\tau \oplus f_\tau G^{\#}(\tau) \subseteq R_\tau \oplus R^{\#}(\tau) = R(\tau)$. ■

Aus Satz 5.2 läßt sich leicht ein Algorithmus zur expliziten Berechnung des Regulators ableiten. Sei $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine $i(G)$-Koehler-Basis der regulierenden Untergruppe $W = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i x_i$ und sei $f_i := f_{t(x_i)}$.

Induktiv über die Typenschichten können nun alle f_τ bestimmt werden. Sei $k > 1$, $\tau \in T_k$ und seien bereits alle f_σ mit $\sigma \in \bigcup_{i=1}^{k-1} T_i$ berechnet. Für ein $w \in W$ gilt $\omega_R(w) = \mathrm{kgV}\{f_i \mid i \in I(w)\}$, und für ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element h gilt $\omega_R(h) = \omega_W(h)\,\mathrm{kgV}\{f_i \mid i \in I(h)\}$. Sei $g = h + w \in G^{\#}(\tau)$, mit $w \in W$ und dem $\mathcal{B}$-standardisierten Urbild h der Nebenklasse $g + W$. Da $I(h) \subseteq I(g)$ nach Lemma 2.2, folgt $h \in G^{\#}(\tau)$ und damit auch $w \in G^{\#}(\tau) \cap W = W^{\#}(\tau)$. Es gilt $\omega_R(g) \mid \mathrm{kgV}(\omega_R(w), \omega_R(h))$ und $f_\tau = \mathrm{kgV}\{\omega_R(g) \mid g \in G^{\#}(\tau)\}$. Da für ein $g \in G^{\#}(\tau)$ bereits alle f_σ mit $\sigma = t(x_i)$ für $i \in I(g)$ bestimmt sind, läßt sich f_τ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} f_\tau = \mathrm{kgV}\,(&\mathrm{kgV}\{\omega_R(w) \mid w \in W^{\#}(\tau)\}, \\ &\mathrm{kgV}\{\omega_R(h) \mid h \in G^{\#}(\tau) \text{ standardisiert bezüglich } \mathcal{B}\}) = \\ &= \mathrm{kgV}\,(\mathrm{kgV}\{f_\sigma \mid \sigma > \tau\}, \mathrm{kgV}\{\omega_W(h)\,\mathrm{kgV}\{f_i \mid i \in I(h)\} \mid h \in G^{\#}(\tau) \\ &\qquad \text{standardisiert bezüglich } \mathcal{B}\}). \end{aligned}$$

So kompliziert diese Formel für f_τ auf den ersten Blick auch aussehen mag, f_τ ist, insbesondere mit einem Computer, sehr leicht zu berechnen. Es kommen insgesamt ja nur die Ordnungen der $i(G)$ standardisierten Elemente und die $|T(G)| \leq \mathrm{rg}(G)$ Zahlen f_τ vor. Desweiteren tauchen nur Primzahlen auf, die $i(G)$ teilen, so daß man, nachdem die Primteiler von $i(G)$ einmal bestimmt sind, die auftretenden kleinsten gemeinsamen Vielfachen leicht berechnen kann. Hinzu kommt noch, daß $f_\mu \mid f_\sigma$ für $\mu \geq \sigma$ gilt, d.h. es muß eigentlich nur das kgV über die f_σ mit den jeweils minimalen auftretenden Typen σ gebildet werden.

Offensichtlich gilt $R = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i f_i x_i$, und $\mathcal{B}' = \{f_1 x_1, \ldots, f_n x_n\}$ ist eine $i(G)$-Koehler-Basis von $R = R(G)$. Da alle Primteiler eines f_i auch Primteiler von $i(G)$ sind, also $[W:R]$ nur Primteiler von $i(G)$ enthält, folgt wegen $[G:R] = [G:W][W:R]$, daß $\mathcal{B}'$ auch eine $[G:R]$-Koehler-Basis ist. Weiter gilt $I_{\mathcal{B}}(g) = I_{\mathcal{B}'}(g)$ für alle $g \in G$. Sei $G = \langle W, h_1, \ldots, h_k \rangle$, dann gilt $G = \langle R, x_1, \ldots, x_n, h_1, \ldots, h_k \rangle$, wobei die x_i bereits $\mathcal{B}'$-standardisiert sind. Ist $h = (1/\omega_W(h)) \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ ein $\mathcal{B}$-standardisiertes Element und $f := \mathrm{kgV}\{f_i \mid i \in I(h)\}$, dann ist $h' = (1/\omega_R(h')) \sum_{i=1}^{n} f_i a_i x_i$ mit $\omega_R(h') = f\omega_W(h)$ ein $\mathcal{B}'$-standardisiertes Element.

LITERATURVERZEICHNIS

[Bu] R. Burkhardt, *On a special class of almost completely decomposable torsion free abelian groups I*, Abelian Groups and Modules, C.I.S.M., Udine (1984), pp. 141-150.

[Fu] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups I and II*, Academic Press (1970, 1973).

[Ko] J. Koehler, *Type set of a torsion-free group of finite rank*, Ill. J. Math., **9** (1965), pp. 66-86.

[KM] K.-J. Krapf - O. Mutzbauer, *Classification of almost completely decomposable groups*, Abelian Groups and Modules, C.I.S.M., Udine (1984), pp. 151-161.

[La] E. L. Lady, *Almost completely decomposable torsion free abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **45** (1974), pp. 41-47.

[Me] C. Metelli, *On type related properties of torsion free abelian groups*, Lecture Notes in Math., **1006** (1983), pp. 253-267.

Manoscritto pervenuto in redazione il 14 gennaio 1991.