RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAMADOU SANGHARÉ

**Sur quelques classes d'anneaux liées au lemme de Fitting**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 87 (1992), p. 29-37

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1992__87__29_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 87 (1992)

# Sur quelques classes d'anneaux lieés au lemme de Fitting..

MAMADOU SANGHARÉ (*)

## 1. Introduction.

Soit $A$ un anneau non nécessairement commutatif et $M$ un $A$-module à gauche. On dit que $M$ vérifie la propriété $(I)$ si tout endomorphisme injectif de $M$ est un automorphisme de $M$, on dit que $M$ vérifie la propriété $(S)$ si tout endomorphisme surjectif de $M$ est un automorphisme de $M$ et on dit que $M$ vérifie la propriété $(F)$ si, pour tout endomorphisme $f$ de $M$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'on ait $M = \operatorname{Im} f^n \oplus \ker f^n$. Il est claire que tout module artinien vérifie $(I)$; que tout module noethérien vérifie $(S)$ et que tout module de longueur finie vérifie $(F)$.

Le but de cet article est l'étude des trois classes d'anneaux suivantes:

1) les anneaux sur lesquels tout module vérifiant $(I)$ est artinien,

2) les anneaux sur lesquels tout module vérifiant $(S)$ est noethérien,

3) les anneaux sur lesquels tout module vérifiant $(F)$ est de longueur finie.

Un anneau de la première classe sera appelée $I$-anneau à gauche; un anneau de la deuxième classe $S$-anneau à gauche, et un anneau de la troisième classe $F$-anneau à gauche.

Dans tout cet article les anneaux considérés sont associatifs, unitaires; et les modules des modules à gauche, unitaries.

(*) Adresse actuelle de l'auteur: Università degli Studi di Trento, Dipartimento di Matematica, 38050 Povo (Trento), Italia.

Addresse permanent de l'auteur: Université Ch. A.D., Fac. Sciences, Dép. Maths., Dakar, Senegal.

## 2. Caractérisation des $I$-anneaux, des $S$-anneaux et des $F$-anneaux: cas des anneaux commutatifs.

PROPOSITION 2.1. *Soit $A$ un anneau commutatif intègre. Si $A$ est un $I$-anneau ou un $S$-anneau ou un $F$-anneau, alors $A$ est un corps.*

DÉMONSTRATION. Soit $K$ le corps des fractions de $A$. Comme le $A$-module $K$ vérifie les propriétés ($I$), ($S$) et ($F$), il en résulte que si $A$ est un $I$-anneau (resp. $S$-anneau, resp. $F$-anneau), alors le $A$-module $K$ est artinien (resp. Noethèrien, resp. de longueur finie), d'où $A = K$.

COROLLAIRE 1. *Soit $A$ un anneau commutatif. Si $A$ est un $I$-anneau ou un $S$-anneau ou un $F$-anneau, alors tout idéal premier de $A$ est maximal.*

DÉMONSTRATION. Soit $P$ un idéal premier de $A$. Si $A$ est un $I$-anneau (resp. $S$-anneau, resp. $F$-anneau), alors l'anneau-quotient $A/P$ est un $I$-anneau (resp. $S$-anneau, resp. $F$-anneau), donc $A/P$ est un corps.

PROPOSITION 2.2. *Soit $A$ un anneau commutatif. Si $A$ est un $I$-anneau ou un $S$-anneau ou un $F$-anneau alors $A$ est artinien.*

DÉMONSTRATION. Posons $S$ l'ensemble des éléments réguliers de $A$, et $AS^{-1}$ l'anneau total des fractions de $A$. Si $f$ est un endomorphisme du $A$-module $AS^{-1}$ pour tout élément $as^{-1} \in AS^{-1}$, on a

$$sf(as^{-1}) = f(sas^{-1}) = f(a) = af(1),$$

d'où

$$f(as^{-1}) = as^{-1}f(1).$$

Il en résulte que tout endomorphisme du $A$-module $AS^{-1}$ est une multiplication par un élément de $AS^{-1}$ par conséquent le $A$-module $AS^{-1}$ vérifies les propriétés ($I$), et ($S$).

Donc

— Si $A$ est un $I$-anneau, alors le $A$-module $AS^{-1}$ est artinien, et don $A$ est artinien.

— Si $A$ est un $S$-anneau, alors le $A$-module est noethérien, et, par conséquent, $A$ est noethérien. Comme tout idéal premier de $A$ est maximal, Corollaire 1, donce $A$ est artinien.

Supposon maintenant que $A$ soit un $F$-anneau. Comme tout idéal premier de $A$ est maximal, Corollaire 1, donc tout $A$-module de type fini vèrifié la propriété $(I)$ [1]. Comme $A$ est un anneau commutatif, tout $A$-module de type fini vérifié la propriété $(S)$ [1]. Il en résult donc, d'après [4], que tout $A$-module de type fini vérifié la propriété $(F)$. Par conséquent le $A$-module $A$ vérifié la propriété $(F)$, donc le $A$-module $A$ est de longuer finie.

La Proposition 2.2 permet de restreindre l'étude des $I$-anneaux, $S$-anneaux et $F$-anneaux commutatifs aux cas des anneaux commutatifs artiniens locaux.

On va reprendre ici les notations de [5]. Soit $A$ un anneau commutatif local artinien tel que $A = C \oplus bC$ (somme directe de $C$-modules), où $C$ est un sous-anneau de $A$, artinien local d'idéal maximal $aC \neq \{0\}$, avec

$$a^2 = ab = b^2 = 0 \qquad \text{et } b \neq 0 .$$

On pose $M$ l'anneau total des fractions de l'anneau des polynomes $C[x]$ à coefficients dans $C$, et note par $\sigma$ l'endomorphisme du $C$-module $M$, défini, pour tout $m \in M$, par $\sigma(m) = axm$. Posons $\phi$ l'homomorphisme d'anneaux de $A$ dans l'anneau $\mathrm{End}_C M$ des $C$-endomorphismes du $C$-module $M$, défini, pour tout $\alpha + \beta b \in A$, où $\alpha$, $\beta \in C$, par

$$\phi(\alpha + \beta b) = \alpha \,\mathrm{id}_M + \beta\sigma .$$

On considère sur $M$ la structure de $A$-module définie par $\phi$.

C'est à dire: pour tout $\alpha + \beta b \in A$ et pour tout $m \in M$, on pose

$$(\alpha + \beta b)\, m = \phi(\alpha + \beta b)(m) = (\alpha \,\mathrm{id}_M + \beta\sigma)(m) = \alpha m + \beta a x m .$$

Dans la suite de ce paragraphe la structure de $A$-module de $M$ est celle dèfinie par $\phi$. Ainsi les $A$-endomorphisme du $A$-module $M$ sont les $C$-endomorphismes de $M$ qui commutent avec $\sigma$.

On notera que $M$ est un anneau local d'idéal maximal a $M$ et que $(aM)^2 = \{0\}$. Ce qui confère à $aM$ une structure de $k = M/aM$-espace vectoriel de dimension 1 dont une base est $\{a\}$. Avec ces notations on a:

PROPOSITION 2.3.

i) *La restriction à $aM$ de tout $A$-endomorphisme $f$ du $A$-module $M$ est une multiplication par un élément de $M$.*

ii) *Pour tout entier $n \geqslant 1$, le $A$-module $M^n$ vèrifie $(I)$.*

iii) *Pour tout entier $n \geqslant 1$, le $A$-module $M^n$ vèrifie $(S)$.*

iv) *Pour tout entier $n \geqslant 1$, le $A$-module $M^n$ vèrifie $(F)$.*

v) *Le $A$-module $M$ n'est pas de longuer finie.*

DÉMONSTRATION. i) Soit $m \in M$. De la relation $f(bm) = bf(m)$ on a

$$f(axm) = axf(m). \tag{1}$$

Comme $f$ est aussi $C$-linèaire on $a$

$$f(axm) = xf(am), \qquad \text{car } a \in C. \tag{2}$$

De (1) et de (2) il résulte que, pour tout $h \in C[x]$, on a

$$f(ahm) = ahf(m) = hf(am). \tag{3}$$

Donc en écrivant $m = c/d$, où $c$, $d \in C[x]$ et $d \notin aC[x]$ et an appliquant (3) avec $h = d$, on obtient

$$f(adm) = adf(m) = df(am).$$

Ce qui implique

$$f(ac) = df(am).$$

Donc

$$acf(1) = df(am),$$

d'où

$$f(am) = amf(1).$$

Soit $f$ un $A$-endomorphisme du $A$-module $M^n$. On $af = (f_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où les $f_{ij}$ sont des éléments de $\mathrm{End}_A M$.

Posons $f'$ la restriction de $f$ a $faaM^n$, on a $f' = (f'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $f'_{ij}$ est la restriction de $f_{ij} aaM$ a $aM$. Donc, d'après i), $f' = (f_{ij}(1))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Comme chaque $f'_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ est aussi un endomorphism de $aM$, $aM$ etant considéré comme $k = M/aM$-espace vectoriel, il en résulte que $f'$ peut être considéré comme èlément de $\mathrm{End}_k(aM^n)$.

Si $f$ est injectif, alors $f'$ est injectif. Par consequence $f'$ est un automorphisme de $aM^n$ car $\dim_k aM^n = n < \infty$. Soit maintenant $y \in M^n$. Il existe $z \in M^n$ tel que $f(az) = ay$. Ce qui implique

$$a[f(z) - y] = 0.$$

On a donc $f(z) - y \in aM^n = \mathrm{Im}\, f'$ et, pair suite, $y \in \mathrm{Im} f$, d'où ii).

iii) Si $f$ est surjectif, alors $f'$ est surjectif et, par consequent $f'$ est un automorphisme de $aM^n$, car $\dim_k aM^n = n < \infty$. Soit $y$ un èlément non nul de $M^n$. Si $y \in aM^n$, alors $f(y) = f'(y) \neq 0$. Si $y \notin aM^n$, alors $ay$ est un élément non nul de $aM^n$ et on a $af(y) = f'(ay) \neq 0$ d'où $f(y) \neq 0$. Soit $m \in M^n$. Comme $aM^n$ est un $k$-espace vectoriel de dimension finie

$n$ et que $f'$ est un endomorphisme du $k$-espace vectoriel $aM^n$, il existe un entir $q \geqslant 1$ tel que

$$aM^n = \operatorname{Im} f'^q \oplus \operatorname{Ker} f'^q. \tag{4}$$

Soit $m \in M^n$. Il existe $m_1, m_2 \in M^n$ tels que

$$am = f^q(am_1) + am_2, \qquad \text{avec } f^q(am_2) = 0. \tag{5}$$

La relation $af^q(m_2) = f^q(am_2) = 0$ entrainant $f^q(m_2) \in aM^n$, il existe d'apres (4), $z_1, z_2 \in M^n$ tel que

$$f^q(m_2) = f^q(az_1) + az_2, \qquad \text{avec } f^q(az_2) = 0. \tag{6}$$

Ce qui implique

$$f^q[f^q(m_2) - f^q(az_1)] = f^q(az_2) = 0.$$

Et on a

$$f^{2q}(m_2 - az_1) = 0, \qquad \text{d'où } m_2 \in az_1 + \operatorname{Ker} f^{2q} \tag{7}$$

or $aM^n = \operatorname{Im} f'^{2q} + \operatorname{Ker} f'^{2q}$, donc il existe $y_1, y_2 \in M^n$ tels que

$$az_1 = f^{2q}(ay_1) + ay_2, \qquad \text{avec } f^{2q}(ay_2) = 0. \tag{8}$$

D'après (7) et (8), on peut écrire

$$m_2 = f^{2q}(ay_1) + y_1' \qquad \text{avec } f^{2q}(y_1') = 0. \tag{9}$$

En remplaçant $m_2$ par $f^{2q}(ay_1) + y_1'$ dans l'èqualité

$$am = f^q(am_1) + am_2$$

on obient

$$am = f^q(am_1) + ay_1' \qquad \text{car } af^{2q}(ay_1) = f^{2q}(a^2y_1) = f^{2q}(0) = 0.$$

Ecrivons finalement $am_1 = f^q(ax_1) + ax_2$ avec

$$x_1, x_2 \in M^n \qquad \text{et} \qquad f^q(ax^2) = 0.$$

On a alors

$$am = f^q[f^q(ax_1) + ax_2] + ay_1'.$$

Ce qui implique

$$am = f^{2q}(ax_1) + ay_1', \qquad \text{car } f^q(ax_2) = 0.$$

Il en résulte que

$$a[m - f^{2q}(x_1) - y_1'] = 0.$$

C'est à dire

$$(m - f^{2q}(x_1) - y_1') \in aM^n = \mathrm{Im}\, f'^{2q} + \mathrm{Ker}\, f'^{2q}.$$

Ce qui implique

$$m \in \mathrm{Im}\, f^{2q} + \mathrm{Ker}\, f^{2q}, \qquad \text{car } f^{2q}(y_1') = 0.$$

D'où

$$M^n = \mathrm{Im}\, f^{2q} + \mathrm{Ker}\, f^{2q}.$$

Soit $m \in \mathrm{Im}\, f^{2q} \cap \mathrm{Ker}\, f^{2q}$. On a alors

$$am \in \mathrm{Im}\, f'^{2q} \cap \mathrm{Ker}\, f'^{2q}.$$

Ce qui implique $am = 0$, et par conséquent $m \in M^n$.
Soi $m' \in M^n$ tel que $m = f^{2q}(m')$. On a

$$af^{2q}(m') = am = 0 \qquad \text{donc } f^q(am') \in \mathrm{Im}\, f'^q \cap \mathrm{Ker}\, f'^q = \{0\}.$$

Donc $af^q(m') = 0$, et par conséquent $m = f^q(m') \in aM^n$. Comme

$$aM^n = \mathrm{Im}\, f'^q \oplus \mathrm{Ker}\, f'^q,$$

on peut ècrire

$$f^q(m') = f^q(am_1') + am_2', \qquad m_1' m_2' \in M^n \text{ et } f^q(am_2') = 0$$

et, on a, alors $f^{2q}(m') = f^{2q}(am_1')$. D'où

$$m = f^{2q}(am_1') \in \mathrm{Im}\, f^{2q}.$$

Comme $m \in aM^n$ et $f^{2q'}(m) = f^{2q}(m) = 0$, on a

$$m \in \mathrm{Im}\, f'^{2q} \cap \mathrm{Ker}\, f'^{2q} = \{0\}.$$

Donc

$$\mathrm{Im}\, f^{2q} \cap \mathrm{Ker}\, f^{2q} = \{0\},$$

d'où

$$M^n = \mathrm{Im}\, f^{2q} \oplus \mathrm{Ker}\, f^{2q}. \qquad \text{D' où iv).}$$

v) Est évident.

THÉORÈME 2.4. *Soit $A$ un anneau commutatif. Les conditions suivantes sont équivalent*

1) *$A$ est un $I$-anneau,*
2) *$A$ est un $S$-anneau,*
3) *$A$ est un $F$-anneau,*
4) *$A$ est artinien et tout idéal de $A$ est principal.*

DÉMONSTRATION. Soit $A$ un anneau commutatif. Si $A$ est un $I$-anneau, ou un $S$-anneau, ou un $F$-anneau, alors d'après la Proposition 2.2, $A$ est artinien. Comme tout anneau commutatif artinien admettant un idèal non principal posséde, d'après [2. chap. 9], un anneau-quotient $B$ de la forme $B = C \oplus bC$, où $C$ est un sous-anneau de $B$, artinien local d'ideal maximal $aC \neq \{0\}$ avec $a^2 = ab = b^2 = 0$ et $b \neq 0$, donc tout anneau commutatif artinien admettant un idéal non principal posséde, d'après la Proposition 2.3, un module qui n'est pas de longuer finie et qui vérifie le propriétés ($I$), ($S$) et ($F$). D'où les implications:

$$1) \Rightarrow 4), \qquad 2) \Rightarrow 4), \qquad \text{et} \qquad 3 \Rightarrow 4).$$

Supposons maintenant que $A$ soit artinian et que tout idéal de $A$ soit principal. Comme il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de $A$-modules cycliques, tout $A$-module $M$ qui n'est pas de longuer finie posséde un facteur direct $N$ qui est somme directe d'un membre infini de copies d'un module cyclique [3]. Il est clair qui un tel $A$-module $N$ ne vérifie aucune des propriétés ($I$), ($S$) et ($F$). D'où les implications

$$4) \Rightarrow 1), \qquad 4) \Rightarrow 2), \qquad \text{et} \qquad 4 \Rightarrow 3).$$

## 3. Etude d'un cas d'anneaux de groupes.

PROPOSITION 3.1. *Soit $K$ un corps de caractéristique $p > 0$ et $G$ un $p$-groupe fini. Les conditions suivantes son èquivalents*:

1) *$K[G]$ est un $I$-anneau,*
2) *$K[G]$ est un $S$-anneau,*
3) *$K[G]$ est un $F$-anneau,*
4) *$G$ est cyclique.*

DÉMONSTRATION. Si $G$ n'est pas cyclique; il existe un sous-groupe normal $H$ de $G$ tel que l'on ait $G/H = \langle\bar{x}\rangle \oplus \langle\bar{y}\rangle$ où

$$\bar{x} \neq 1, \qquad \bar{y} \neq 1 \qquad \text{et} \qquad \bar{x}^P = \bar{y}^P = 1.$$

Il en résulte que l'anneau artinien $K[G/H]$ est commutatif et posséde un idéal non principal, par exemple

$$J = K[G](1 - \bar{x}) \oplus K[G](1 - \bar{y}).$$

D'où, d'après le Théorème 2.3, les implications

$$1) \Rightarrow 4), \qquad 2) \Rightarrow 4), \qquad \text{et} \qquad 3 \Rightarrow 4).$$

Si $G$ est cyclique, alors $K[G]$ est un anneau de type de representation finie d'après [7], d'où les implications

$$4) \Rightarrow 1, \qquad 4) \Rightarrow 2), \qquad \text{et} \qquad 4) \Rightarrow 3).$$

THÉORÈME 3.2. *Soit $A$ un anneau commutatif local d'idéal maximal $m$ tel que le corps $A/m$ soit de caractéristique $p > 0$ et soit $G$ un $p$-groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) *$A[G]$ est un $I$-anneau,*

2) *$A[G]$ est un $S$-anneau,*

3) *$A[G]$ est un $F$-anneau,*

4) *a) $m = \{0\}$ et $G$ est cyclique, où b) $m \neq \{0\}$ et $G = \{1\}$ et $A$ est artinien à idéaux principaux.*

DÉMONSTRATION. Les implications $4) \Rightarrow 1)$, $4) \Rightarrow 2)$ et $4) \Rightarrow 3)$ rèsultent du Théorème 2.3 et de la Proposition 3.1. Supposons maintenant que $A[G]$ soit un $I$-anneau (resp. un $S$-anneau, resp. un $F$-anneau). Posons

$$L = \left\{ \sum_{g \in G} x_g \in A[G] / \sum_{g \in G} x_g = 0 \right\}$$

l'idéal d'augmentation de $A[G]$. De l'isomorphisme d'anneaux $A \cong A[G]/L$, il résulte que l'anneau $A$ est un $I$-anneau (resp. $S$-anneau, resp. $F$-anneau), donc, d'après le Théorème 2.3, $A$ est artinien et tout idéal de $A$ est principal. D'autre part comme l'anneau $A/m[G]$ est image homomorphe de l'anneau $A[G]$ (par exemple par l'homomorphisme d'anneaux:

$$A[G] \rightarrow A/m[G]$$

où $\phi$ est la

$$\sum_{g \in G} x_g g \rightarrow \sum_{g \in G} \phi(x_g) g$$

surjection canonique de $A$ sur $A/m$), il en résuslte que $A/m[G]$ est un $I$-anneau (resp. $S$-anneau, resp. $F$-anneau), donc, d'après la Proposition 3.1, $G$ est cyclique. On vient de démontrer, donc, que si $A[G]$ est un $I$-anneau (resp. $S$-anneau, resp. $F$-anneau), alors $A$ est artinien à idéaux principaux et $G$ est cyclique. Ce qui implique que l'anneau $A[G]$ est commutatif, et par conséquent artinien à idéaux principaux, d'aprés le Théorème 2.3. D'où les implications $1) \Rightarrow 4)$, $2 \Rightarrow 4)$, et $3) \Rightarrow 4)$.

*Remerciements.* Cet article a été écrit quand l'auteur séjournait à Trento dans le cadre des relations de copération et d'échange entre la Université de Trento et celle de Dakar, financés par le Ministère Italien des Relations Extérieures.

L'auteur remercie le Département de Mathématique de l'Université de Trento pour l'hospitalité dont il a été l'object.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] E. P. ARMENDARIZ - J. W. FISHER - R. L. SNIDER, *On injective and surjective endomorphisms of finitely generated modules*, Comm. Algebras, **6** (7) (1978), pp. 659-672.

[2] N. BOURBAKI, *Algebre Commutative*, chap. 8 et 9, Ed. Masson (1983).

[3] I. S. COHEN - I. KAPLANSKY, *Rings for which every module is direct sum of cyclic modules*, Math. Z., **54** (1951), pp. 97-101.

[4] Y. HIRANO, *On Fitting's lemma*, Hiroshima Math. J., **9** (1979), pp. 623-626.

[5] A. M. KAIDI - M. SANGHARE, *Une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux*, Lecture Notes in Math., **1328** (Springer-Verlag) (1988), pp. 245-254.

[6] A. M. KAIDI - M. SANGHARE, *Sur les S-anneaux dont les idéaux à gauche et les idéaux à droit sont bilatéres*, à paraître.

[7] R. S. PIERCE, *Associative Algebras*, Springer-Verlag.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 agosto 1990.