

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

UWE OSTENDORF

**Projektivitätstypen torsionsfreier abelscher
Gruppen vom Rang 1**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 86 (1991), p. 183-191

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1991__86__183_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Projektivitätstypen torsionsfreier abelscher Gruppen vom Rang 1.

UWE OSTENDORF(*)

In einer Arbeit über Projektivitäten abelscher Gruppen mit torsionsfreiem Rang 1 bestimmten E. Gasperini und C. Metelli im Fall torsionsfreier Gruppen die Gruppe der Autoprojektivitäten. Ausgehend von diesen Ergebnissen wird im ersten Teil der vorliegenden Arbeit für torsionsfreie Gruppen vom Rang 1 ein Projektivitätstyp definiert, der durch eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Höhenfolgen eigengeführt wird.

Der zweite Teil behandelt gemischte abelsche Gruppen mit torsionsfreiem Rang 1. Dabei werden für eine Gruppe, deren Torsionsuntergruppe ein direkter Summand ist, genau die projektiven Bilder charakterisiert.

$P = \{p_1, p_2, \dots\}$ bezeichne die Menge der Primzahlen in natürlicher Weise geordnet. Die Gruppe der Autoprojektivitäten der Gruppe G sei $P(G)$ und $A(G) \leq P(G)$ die Untergruppe der durch Automorphismen induzierten Autoprojektivitäten von G .

Für eine abelsche Gruppe G und $g \in G$ sei $h_{p_i}^G(g)$ die p_i -Höhe von g in G . Für eine Gruppe R mit $Z \leq R \leq Q$ heißt $\chi(R) = (h_{p_i}^R(1))_{i \in \mathbb{N}}$ die Charakteristik von R . Auf der Menge der Höhenfolgen ist eine Äquivalenzrelation $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ definiert durch $(\alpha_i = \infty \text{ oder } \beta_i = \infty) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\alpha_j = \beta_j$ für fast alle $j \in \mathbb{N}$. Die Äquivalenzklasse modulo \sim der Charakteristik von R bezeichnet den Typ von R .

Mit $\chi(R) = (\alpha)_{i \in \mathbb{N}}$ sei für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definiert: $N_\alpha(R) := \{i \in \mathbb{N}; \alpha_i = \alpha\}$.

HILFSSATZ 1 (Gasperini, Metelli [1]). Es gilt $P(Q) = A(Q) \rtimes \text{Stab}_{P(Q)}(Z)$, wobei $\text{Stab}_{P(Q)}(Z) \cong S_{\mathbb{N}}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, Olshausenstr. 40-60, 2300 Kiel 1, BR Deutschland.

Im Beweis des Hilfssatzes wird für $\sigma \in S_N$ eine Bijektion $\bar{\sigma}: Q \rightarrow Q$ definiert durch:

$$0^{\bar{\sigma}} := 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{Z}: \left(\prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i} \right)^{\bar{\sigma}} := \prod_{i=1}^n p_{\sigma(i)}^{\alpha_i}$$

und $\forall q \in Q_{>0}: (-q)^{\bar{\sigma}} := -q^{\bar{\sigma}}$.

$\bar{\sigma}$ induziert dann eine Autoprojektivität f_σ von Q , genauer gilt $f_\sigma \in \text{Stab}_{P(Q)}(\mathbb{Z})$.

HILFSSATZ 2 (Gasparini, Metelli [1]). Seien $Z \leq R, S \leq Q$. Zu jeder Projektivität $f: R \rightarrow S$ existiert eine eindeutig bestimmte Autoprojektivität φ von Q mit $\varphi|_R = f$.

HILFSSATZ 3. Sei $Z \leq R \leq Q$ mit $\chi(R) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und sei $q \in Q_{>0}$ mit $q = \prod_{i=1}^n p_i^{t_i}, t_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

(i) $Z \leq qR \Leftrightarrow t_i \leq \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Für $Z \leq qR$ ist $\chi(qR) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, wobei für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\beta_i := \begin{cases} \alpha_i - t_i & \text{für } i \leq n \\ \alpha_i & \text{für } i > n \end{cases} \quad (\text{mit } \alpha_i - t_i = \infty, \text{ für } \alpha_i = \infty).$$

(iii) Für $\sigma \in S_N$ gilt: $\chi(f_\sigma(R)) = (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$.

BEWEIS. (i) \Leftarrow : Sei $Z \leq qR$. Dann gilt $1 \in qR$, also $1/q \in R$. Damit ist auch für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ $1/p_i^{t_i} = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{t_j} \right) (1/q) \in R$. Es folgt $\alpha_i = h_{p_i}^R(1) \geq t_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

\Rightarrow : Sei $t_i \leq \alpha_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$ $(1/p_i^{t_i}) \in R$ und damit

$$\left(\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{t_j} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n p_i^{t_i} \right)^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^{t_i}} \in R.$$

Da q und $q' := \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{t_j}$ teilerfremd sind, existieren $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $aq' + bq = 1$. Es folgt $1/q - b = (1 - bq)/q = aq'/q \in R$ und somit $1/q \in R$, also $Z \leq qR$.

(ii) Sei $Z \leq qR$. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\frac{1}{p_i^m} \in R \Leftrightarrow \frac{q}{p_i^m} \in qR \Leftrightarrow \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{t_j} \right) \cdot (p_i^{m-t_i})^{-1} \in qR.$$

Da p_i und $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n p_j^{t_j}$ teilerfremd sind, folgt $1/p_i^m \in R \Leftrightarrow 1/p_i^{m-t_i} \in qR$. Damit ist

$$h_{p_i}^{qR}(1) = \begin{cases} \alpha_i - t_i & \text{für } \alpha_i < \infty \\ \infty & \text{für } \alpha_i = \infty. \end{cases}$$

Für alle $i \in \mathbb{N}$ mit $i > n$ sind q und $p_i^{t_i}$ teilerfremd, also gilt für alle $m \in \mathbb{N}_0$: $1/p_i^m \in R \Leftrightarrow q/p_i^m \in qR \Leftrightarrow 1/p_i^m \in qR$. Somit ist $h_{p_i}^{qR}(1) = \alpha_i$.

(iii) Sei $\sigma \in S_N$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}_0$: $rp_i^m = 1 \Leftrightarrow r^\sigma p_{\sigma(i)}^m = (rp_i^m)^\sigma = 1^\sigma = 1$, also $\alpha_i = h_{p_i}^R(1) = h_{p_{\sigma(i)}}^{R^\sigma}(1) = \beta_{\sigma(i)}$. Damit gilt $\chi(f_\sigma(R)) = \chi(R^\sigma) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} = (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$.

DEFINITION 1. Seien $Z \leq R_1, R_2 \leq Q$ mit $\chi(R_1) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\chi(R_2) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Dann wird durch $\chi(R_1) \approx \chi(R_2)$ genau dann, wenn ein $\sigma \in S_N$ mit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ existiert, eine Äquivalenzrelation \approx definiert. Für $Z \leq R \leq Q$ definiere den Projektivitätstyp von R durch $pt(R) := \chi(R) / \approx$.

SATZ 1. Seien $Z \leq R, S \leq Q$. Dann sind R und S projektiv genau dann, wenn $pt(R) = pt(S)$ gilt.

BEWEIS. « \Rightarrow »: Seien R und S projektiv. Nach Hilfssätzen 1 und 2 existieren dann $q \in Q_{>0}$ und $\sigma \in S_N$ mit $S = \bar{q}f_\sigma(R)$. Sei $\chi(R) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\chi(S) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Dann folgt:

$$(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} = \chi(S) = \chi(\bar{q}f_\sigma(R)) \sim \chi(f_\sigma(R)) = (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{also } \chi(R) \approx \chi(S).$$

« \Leftarrow »: Es gelte $pt(R) = pt(S)$. Sei $\chi(R) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\chi(S) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Dann existiert ein $\sigma \in S_N$ mit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Wegen $\text{Typ}(f_\sigma(R)) = [(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}] = [(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}] = \text{Typ}(S)$ gilt $f_\sigma(R) \cong S$. Damit sind $f_\sigma(R)$ und S projektiv und folglich auch R und S projektiv.

Die Aussage des Satzes 1 entspricht einer Bemerkung von L. Fuchs ([2], S. 305):

Sind G und H torsionsfreie Gruppen mit distributivem Untergruppenverband, so sind G und H projektiv genau dann, wenn die Typen $\text{Typ}(G) = [(l_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ und $\text{Typ}(H) = [(k_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ durch eine Permutation ineinander überführt werden.

In der Arbeit von E. Gasparini und C. Metelli wird ebenfalls ein «Projektivitätstyp» definiert. Die entsprechende Äquivalenzrelation \approx^* wird durch die Bedingungen

- (i) $|N_\infty(R_1)| = |N_\infty(R_2)|$,
- (ii) $|N_\alpha(R_1)| = |N_\alpha(R_2)|$ für fast alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$,
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0: |N_\alpha(R_1)| \neq |N_\alpha(R_2)| \Rightarrow |N_\alpha(R_1)|, |N_\alpha(R_2)| < \infty$

für $Z \leq R_1, R_2 \leq Q$ definiert. Ein einfaches Beispiel zeigt jedoch, daß diese drei Bedingungen nicht hinreichend für die Existenz einer Projektivität sind.

BEISPIEL. Seien R und S mit $Z \leq R, S \leq Q$ gegeben und gelte $\chi(R) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}, \chi(S) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha_i = i$ und $\beta_i = i - 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gelten $|N_\infty(R)| = 0 = |N_\infty(S)|$, für alle $\alpha \in \mathbb{N}: |N_\alpha(R)| = 1 = |N_\alpha(S)|$ sowie $|N_0(R)| = 0 \neq 1 = |N_0(S)|$. Somit sind die Bedingungen (i)-(iii) erfüllt.

Wären R und S projektiv, dann wäre nach Satz 1 und Definition 1 $\chi(R) \approx \chi(S)$, also existierte ein $\sigma \in S_N$ mit $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \sim (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Nach Definition von \sim gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq n}: m - 1 = \beta_m = \alpha_{\sigma^{-1}(m)} = \sigma^{-1}(m)$, d.h. $\sigma(m - 1) = m$. Da σ bijektiv ist, wäre dann $\sigma(\{1, \dots, m - 1\}) = \{1, \dots, m - 2\}$; Widerspruch.

DEFINITION 2. Seien $Z \leq R_1, R_2 \leq Q$. Dann wird durch $\chi(R_1) \approx^* \chi(R_2)$ genau dann, wenn (i), (ii), (iii) und

- (iv) $\exists \alpha \in \mathbb{N}_0: |N_\alpha(R_1)| = \infty = |N_\alpha(R_2)|$ oder

$$\{\alpha \in \mathbb{N}_0; |N_\alpha(R_1)| \neq |N_\alpha(R_2)|\} = \\ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \Rightarrow \sum_{i=1}^k |N_{\alpha_i}(R_1)| = \sum_{i=1}^k |N_{\alpha_i}(R_2)|,$$

eine Äquivalenzrelation \approx^* definiert.

SATZ 2. Seien $Z \leq R, S \leq Q$. Dann sind R und S projektiv genau dann, wenn $\chi(R) \approx^* \chi(S)$ gilt.

BEWEIS. Seien $Z \leq R, S \leq Q$.

« \Rightarrow »: Seien R und S projektiv. Dann existiert ein $q \in Q_{>0}$ und ein $\sigma \in S_N$ mit $S = \bar{q}f_\sigma(R)$. Wegen $\chi(f_\sigma(R)) = [(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}]$ gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$: $N_\alpha(f_\sigma(R)) = \{i \in \mathbb{N}; \sigma^{-1}(i) \in N_\alpha(R)\}$ und damit $|N_\alpha(f_\sigma(R))| = |N_\alpha(R)|$. Es folgt $\chi(f_\sigma(R)) \approx^* \chi(R)$. Setze $R_1 := f_\sigma(R)$. Dann ist $Z \leq S = \bar{q}f_\sigma(R) = qR_1$. Sei $q = \prod_{i=1}^n p_i^{t_i}$, $t_i \in \mathbb{Z}$. Mit $\chi(R_1) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ folgt nach Hilfssatz 3 für alle $i \in \{1, \dots, n\}: t_i \leq \beta_i$. Setze für alle

$i \in \{1, \dots, n\}$: $R_{i+1} := p_i^{t_i} R_i$. Nach Hilfssatz 3 gilt dann für alle $i \in \{1, \dots, n\}$: $Z \leq R_{i+1}$ und

$$h_{p_j}^{R_{i+1}}(1) = \begin{cases} h_{p_j}^{R_i}(1) & \text{für } i \neq j \\ h_{p_j}^{R_i}(1) - t_i & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Wegen

$$R_{n+1} = \prod_{i=1}^n p_i^{t_i} R_1 = qR_1 = S,$$

also $\chi(R_{n+1}) = \chi(S)$ und $\chi(R) \approx^* \chi(f_\sigma(R)) = \chi(R_1)$, genügt es zu zeigen: $\chi(R_{i+1}) \approx^* \chi(R_1)$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Ist $h_{p_i}^{R_i}(1) = \infty$, so gilt $h_{p_i}^{R_{i+1}}(1) = \infty$. Es folgt $\chi(R_{i+1}) = \chi(R_i)$, also $\chi(R_{i+1}) \approx^* \chi(R_i)$. Ist $t_i = 0$, so folgt $\chi(R_{i+1}) = \chi(R_i)$ und damit $\chi(R_{i+1}) \approx^* \chi(R_i)$. Sei also $a := h_{p_i}^{R_i}(1) < \infty$ und $t_i \neq 0$. Dann gilt $a - t_i < \infty$ und es folgt $|N_\infty(R_{i+1})| = |N_\infty(R_i)|$, also (i); sowie für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0 \setminus \{a, a - t_i\}$: $|N_\alpha(R_{i+1})| = |N_\alpha(R_i)|$, also (ii). Weiter gilt $|N_a(R_{i+1})| = |N_a(R_i)| - 1$ und $|N_{a-t_i}(R_{i+1})| = |N_{a-t_i}(R_i)| + 1$. Damit gilt für alle $\alpha \in \{a, a - t_i\}$: $|N_\alpha(R_{i+1})| \neq |N_\alpha(R_i)| \Rightarrow |N_\alpha(R_{i+1})|, |N_\alpha(R_i)| < \infty$, also (iii). Falls für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ gilt: $|N_\alpha(R_i)| < \infty$, so folgt mit (iii) auch $|N_\alpha(R_{i+1})| < \infty$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Also ist $\{\alpha \in \mathbb{N}_0; |N_\alpha(R_{i+1})| \neq |N_\alpha(R_i)|\} = \{a, a - t_i\}$ und es gilt $|N_a(R_{i+1})| + |N_{a-t_i}(R_{i+1})| = |N_a(R_i)| + |N_{a-t_i}(R_i)|$, also (iv).

« \Leftarrow »: Es gelte $\chi(R) \approx^* \chi(S)$. Sei $\chi(R) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\chi(S) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Sei $\{\alpha \in \mathbb{N}_0; |N_\alpha(R)| \neq |N_\alpha(S)|\} = \{a_1, \dots, a_k\}$. Setze für alle $i \in \{1, \dots, k\}$: $n_i := |N_{a_i}(R)|$ und $m_i := |N_{a_i}(S)|$. Dann existieren $\sigma, \tau \in S_{\mathbb{N}}$ mit:

$$\chi(f_\sigma(R)) = (\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}} = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{n_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{n_2}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{n_k}, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \dots)$$

und

$$\chi(f_\tau(S)) = (\beta_{\tau^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}} = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{m_2}, \dots, \underbrace{a_k, \dots, a_k}_{m_k}, \dots, \beta_{\tau^{-1}(i)}, \dots).$$

Nach Definition von \approx^* gilt: (i) $\exists \alpha \in \mathbb{N}_0$: $|N_\alpha(R)| = \infty = |N_\alpha(S)|$ oder (ii)

$\sum_{i=1}^k n_i = \sum_{i=1}^k m_i$. Im Falle (i) setze $a := \alpha$, im Falle (ii) setze $a := 0$.

Definiere $u := \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{n_i} p_{\binom{i-1}{\sum_{l=1}^i n_l} + j}^{a_i - a}$ und $v := \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} p_{\binom{i-1}{\sum_{l=1}^i m_l} + j}^{a_i - a}$.

Nach Hilfssatz 3 gilt dann: $Z \leq \bar{u}f_\sigma(R)$ und $Z \leq \bar{v}f_\tau(S)$, also

$$\chi(\bar{u}f_\sigma(R)) = \underbrace{(a, \dots, a, \dots, \alpha_{\sigma^{-1}(i)}, \dots)}_{\sum_{i=1}^k n_i}$$

und

$$\chi(\bar{v}f_\tau(S)) = \underbrace{(a, \dots, a, \dots, \beta_{\tau^{-1}(i)}, \dots)}_{\sum_{i=1}^k m_i}.$$

Setze $R_1 := \bar{u}f_\sigma(R)$ und $S_1 := \bar{v}f_\tau(S)$. Es folgt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$: $|N_\alpha(R_1)| = |N_\alpha(S_1)|$. Damit gibt es ein $\rho \in S_N$ mit $\chi(f_\rho(R_1)) = \chi(S_1)$. Wegen $Z \leq R_1$, also $Z \leq f_\rho(R_1)$ und $Z \leq S_1$ folgt $f_\rho(R_1) =: R_2 \cong S_1$. Sei also $\varphi: R_2 \rightarrow S_1$ ein Isomorphismus. Dann induziert φ eine Projektivität $\bar{\varphi}$ von R_2 nach S_1 . Nach Hilfssatz 3 existieren $q \in Q_{>0}$ und $\mu \in S_N$ mit $\bar{\varphi} = \bar{q}f_\mu$, also $S_1 = \bar{q}f_\mu(R_2)$.

Damit gilt $\bar{q}f_\mu f_\rho \bar{u}f_\sigma(R) = \bar{v}f_\tau(S)$, d.h. R und S sind projektiv.

Anwendung auf den Fall gemischter abelscher Gruppen mit torsionsfreiem Rang 1.

LEMMA (Baer [3]). Seien G, \bar{G} abelsche Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung. Sei $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$ eine Projektivität. Dann gilt:

- (a) $\forall p \in \pi(T(G)) \quad \forall Z \in L_1(G): (pZ)^\varphi = pZ^\varphi$,
- (b) $T(G)^\varphi = T(\bar{G})$ und $T(G) \cong T(\bar{G})$.

SATZ 3. Seien G, \bar{G} abelsche Gruppen mit $r_0(G) = 1 = r_0(\bar{G})$ und sei $\text{Typ}(G/T(G)) = [(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}]$. Sind G und \bar{G} projektiv, dann gilt:

- (a) $T(G) \cong T(\bar{G})$.
- (b) Es existiert ein $\sigma \in S_N$ mit
 - (i) $\forall i \in \mathbb{N}: p_i \in \pi(T(G)) \Rightarrow \sigma(i) = i$ und
 - (ii) $\text{Typ}(\bar{G}/T(\bar{G})) = [(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}]$.

BEWEIS. Sei $\varphi: G \rightarrow \bar{G}$ eine Projektivität. Nach Lemma, (b) gilt $T(G)^\varphi = T(\bar{G})$ und $T(G) \cong T(\bar{G})$. Weiter induziert φ eine Projektivität $\psi: G/T(G) \rightarrow \bar{G}/T(\bar{G}) = \bar{G}/T(\bar{G})$. Wegen $r_0(G) = 1 = r_0(\bar{G})$ existieren $Z \leq R$, $S \leq Q$ und Isomorphismen $\iota: G/T(G) \rightarrow R$ und $\varkappa: \bar{G}/T(\bar{G}) \rightarrow S$. Sei $\psi': R \rightarrow S$ definiert durch $\psi \iota = \varkappa \psi'$. Dann gibt es nach Hilfssätzen 1 und 2 ein $q \in Q_{>0}$ und ein $\sigma \in S_N$ mit $\bar{q}f_\sigma = \psi'$. Es folgt $S = \bar{q}f_\sigma(R)$ und

damit $S \cong f_\sigma(R)$. Also gilt:

$$\text{Typ}(\overline{G}/T(\overline{G})) = \text{Typ}(S) = \text{Typ}(f_\sigma(R)) = [(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}].$$

Sei $i \in \mathbb{N}$ mit $p_i \in \pi(T(G))$. Sei $g \in G$ mit $(g + T(G))' = 1 \in R$. Dann gilt $(\langle g \rangle \oplus T(G))' = \mathbb{Z} \leq R$. Nach Lemma, (a) gilt $(p_i \langle g \rangle)^\rho = p_i \langle g \rangle^\rho$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} qp_{\sigma(i)} \mathbb{Z} &= \bar{q} f_\sigma(p_i \mathbb{Z}) = (p_i \mathbb{Z})^{\psi'} = (p_i (\langle g \rangle \oplus T(G))')^{\psi'} = (p_i \langle g \rangle \oplus T(G))'^{\psi'} = \\ &= (p_i \langle g \rangle \oplus T(G))^{\psi \times} = ((p_i \langle g \rangle)^\rho \oplus T(G)^\rho)^\times = (p_i \langle g \rangle^\rho \oplus T(G)^\rho)^\times = \\ &= p_i (\langle g \rangle^\rho \oplus T(G)^\rho)^\times = p_i (\langle g \rangle \oplus T(G))^{\psi \times} = p_i (\langle g \rangle \oplus T(G))^{\psi'} = \\ &= p_i \mathbb{Z}^{\psi'} = p_i \bar{q} f_\sigma(\mathbb{Z}) = qp_i \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Somit ist $p_{\sigma(i)} = p_i$, also $\sigma(i) = i$.

FOLGERUNG. Seien G, \overline{G} abelsche Gruppen mit $r_0(G) = 1 = r_0(\overline{G})$. Sei $\text{Typ}(G/T(G)) = [(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}]$ und sei $T(G)$ direkter Summand von G . Dann sind G und \overline{G} projektiv genau dann, wenn gilt:

- (a) $T(G) \cong T(\overline{G})$,
- (b) $T(\overline{G})$ ist direkter Summand von \overline{G} ,
- (c) Es existiert ein $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ mit
 - (i) $\forall i \in \mathbb{N}: p_i \in \pi(T(G)) \Rightarrow \sigma(i) = i$ und
 - (ii) $\text{Typ}(\overline{G}/T(\overline{G})) = [(\alpha_{\sigma^{-1}(i)})_{i \in \mathbb{N}}]$.

BEWEIS. « \Rightarrow »: Seien G und \overline{G} projektiv. Dann gilt (a) und (c) nach Satz 3. Sei $\varphi: G \rightarrow \overline{G}$ eine Projektivität. Da $T(G)$ direkter Summand von G ist, gibt es ein $K \leq G$ mit $G = T(G) \oplus K$. Wegen $\overline{G} = G^\rho = (T(G) \cup K)^\rho = T(G)^\rho \cup K^\rho = T(\overline{G}) \cup K^\rho$ und $0 = 0^\rho = (T(G) \cap K)^\rho = T(G)^\rho \cap K^\rho = T(\overline{G}) \cap K^\rho$, folgt mit \overline{G} abelsch: $\overline{G} = T(\overline{G}) \oplus K^\rho$. Damit ist auch $T(\overline{G})$ direkter Summand von \overline{G} .

« \Leftarrow »: Es gelte (a)-(c). Da $T(G)$ direkter Summand von G ist, gilt $G \cong T(G) \oplus R$, wobei $\mathbb{Z} \leq R \leq \mathbb{Q}$ mit $\chi(R) = (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Genauso gilt $\overline{G} \cong T(\overline{G}) \oplus S$, wobei $\mathbb{Z} \leq S \leq \mathbb{Q}$ mit $\chi(S) = (\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Für $\pi := \pi(T(G))$ sei

$$\mathbb{Q}(\pi) := \left\{ q = \prod_{i=1}^n p_i^{r_i}; n \in \mathbb{N}, r_i \in \mathbb{Z} \text{ mit } r_i \neq 0 \Rightarrow p_i \in \pi \right\}.$$

Definiere entsprechend $\mathbb{Q}(\pi')$ für $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Dann existieren für alle

$q \in Q_{>0}$ eindeutig bestimmte $q_1 \in Q(\pi)$, $q_2 \in Q(\pi')$ mit $q = q_1 q_2$, insbesondere gilt dann $q_1^{\bar{r}} = q_1$ und $q_2^{\bar{r}} \in Q(\pi')$. Sei $\mu: T(G) \rightarrow T(\bar{G})$ ein Isomorphismus.

Konstruiere Bijektion $\alpha: L_2(T(G) \oplus R) \rightarrow L_2(T(\bar{G}) \oplus S)$ so, daß für alle $D, E \in L_2(T(G) \oplus R)$ gilt: $D \leq E \Leftrightarrow D^\alpha \leq E^\alpha$. Nach [4], Satz induziert dann α eine Projektivität von $T(G) \oplus R$ nach $T(\bar{G}) \oplus S$. Somit wären dann G und \bar{G} projektiv.

Sei $D \in L_2(T(G) \oplus R)$. Ist $D \leq T(G)$, dann sei $D^\alpha := D^\mu$. Sei also $D \notin T(G)$. Dann gibt es $g \in T(G) \oplus R$ mit $o(g) = \infty$ und $h \in T(G)$, so daß $D = \langle g \rangle \oplus \langle h \rangle$. Damit existieren $r \in R \setminus \{0\}$, $t, u \in T(G)$ mit $g = (t, r)$ und $h = (u, 0)$. Es ist also $D = \langle (t, r) \rangle \oplus \langle (u, 0) \rangle$. O.B.d.A. sei $r > 0$.

Definiere $D^\alpha := \langle (r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{r}}) \rangle \oplus \langle (u^\mu, 0) \rangle$. Insbesondere gilt dann: $T(D) = \langle (u, 0) \rangle$ und $T(D^\alpha) = \langle (u^\mu, 0) \rangle = \langle (u, 0) \rangle^\mu = T(D)^\mu$.

Da $r_2 \in Q(\pi')$, ist auch $r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} \in Q(\pi')$. Damit ist $r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} t^\mu \in \langle t^\mu \rangle \leq T(\bar{G})$. Es folgt $(r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{r}}), (u^\mu, 0) \in T(\bar{G}) \oplus S$, also $D^\alpha \in L_2(T(\bar{G}) \oplus S)$.

Seien $\bar{r} \in R_{>0}$, $\bar{t}, \bar{u} \in T(G)$ mit $D = \langle (\bar{t}, \bar{r}) \rangle \oplus \langle (\bar{u}, 0) \rangle$. Dann ex. $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $(\bar{t}, \bar{r}) = n(t, r) + m(u, 0)$ und es existieren $\bar{n}, \bar{m} \in \mathbb{Z}$ mit $(t, r) = \bar{n}(\bar{t}, \bar{r}) + \bar{m}(\bar{u}, 0)$. Es folgt $\bar{r} = nr$ und $r = \bar{n}\bar{r}$, also $n, \bar{n} \in \mathbb{N}$ mit $r = \bar{n}\bar{r} = \bar{n}nr$. Somit gilt $n = \bar{n} = 1$, also $r = \bar{r}$. Damit gilt $(\bar{t}, \bar{r}) = (t, r) + m(u, 0) = (t + mu, r)$, also $\bar{t} = t + mu$. Weiter existieren $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $(\bar{u}, 0) = k(t, r) + l(u, 0)$ und es existieren $\bar{k}, \bar{l} \in \mathbb{Z}$ mit $(u, 0) = \bar{k}(\bar{t}, \bar{r}) + \bar{l}(\bar{u}, 0)$. Es folgt $0 = kr$ und $0 = \bar{k}\bar{r}$, also $k = \bar{k} = 0$. Damit gilt $(u, 0) = \bar{l}(\bar{u}, 0)$ und $(\bar{u}, 0) = l(u, 0)$, also $\langle (u, 0) \rangle = \langle (\bar{u}, 0) \rangle$.

Wegen

$$\begin{aligned} \langle (r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{r}}) \rangle \oplus \langle (\bar{u}^\mu, 0) \rangle &= \langle (r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} (t^\mu + mu^\mu), r^{\bar{r}}) \rangle \oplus \langle (u^\mu, 0) \rangle = \\ &= \langle (r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{r}}) \rangle \oplus \langle (u^\mu, 0) \rangle \end{aligned}$$

ist somit α wohldefiniert.

Definiere $\beta: L_2(T(\bar{G}) \oplus S) \rightarrow L_2(T(G) \oplus R)$ analog mit $\bar{\sigma}^{-1}, \mu^{-1}$ statt $\bar{\sigma}, \mu$. Sei $D = \langle (t, r) \rangle \oplus \langle (u, 0) \rangle \in L_2(T(G) \oplus R)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D^{\alpha\beta} &= \langle (r_2^{\bar{r}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{r}}) \rangle \oplus \langle (u^\mu, 0) \rangle^\beta = \\ &= \langle (r_2^{\bar{\sigma}^{-1}} r_2^{\bar{\sigma}} r_2^{\bar{\sigma}^{-1}} r_2^{-1} t^{\mu\mu^{-1}}, r^{\bar{\sigma}\bar{\sigma}^{-1}}) \rangle \oplus \langle (u^{\mu\mu^{-1}}, 0) \rangle = \langle (t, r) \rangle \oplus \langle (u, 0) \rangle = D. \end{aligned}$$

Es folgt $\alpha\beta = id$ und genauso gilt $\beta\alpha = id$. Damit sind α und β bijektiv.

Seien $D, E \in L_2(T(G) \oplus R)$. Bleibt z.z.: $D \leq E \Leftrightarrow D^\alpha \leq E^\alpha$.

« \Rightarrow »: Ist $D \leq T(G)$, dann folgt $D = T(D)$ und damit $D^\alpha = D^\mu = T(D)^\mu \leq T(E)^\mu = T(E^\alpha) \leq E^\alpha$. Sei also $D \notin T(G)$. Dann ex. $r, s \in R_{>0}$, $t, u, v, w \in T(G)$ mit $D = \langle (t, r) \rangle \oplus \langle (u, 0) \rangle$ und $E = \langle (v, s) \rangle \oplus \langle (w, 0) \rangle$.

Wegen $D \leq E$ existieren $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $(t, r) = n(v, s) + m(w, 0)$ und es ex. $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $(u, 0) = k(v, s) + l(w, 0)$. Dann gilt $r = ns$, also $n \in \mathbb{Z}$ und $0 = ks$, also $k = 0$. Es folgt: $(t, r) = n(v, s) + m(w, 0) = (nv + mw, ns)$ und $(u, 0) = l(w, 0) = (lw, 0)$, also $r = ns$, $u = lw$ und $t = nv + mw$.

Wegen $u = lw$ gilt $\langle (u^\mu, 0) \rangle = \langle (lw^\mu, 0) \rangle \leq \langle (w^\mu, 0) \rangle \leq E^\alpha$, und mit

$$\begin{aligned} (r_2^{\bar{\sigma}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{\sigma}}) &= (n_2^{\bar{\sigma}} s_2^{\bar{\sigma}} n_2^{-1} s_2^{-1} (nv^\mu + mw^\mu), n^{\bar{\sigma}} s^{\bar{\sigma}}) = \\ &= (n^{\bar{\sigma}} s_2^{\bar{\sigma}} s_2^{-1} v^\mu + n_2^{\bar{\sigma}} s_2^{\bar{\sigma}} n_2^{-1} s_2^{-1} mw^\mu, n^{\bar{\sigma}} s^{\bar{\sigma}}) = n^{\bar{\sigma}} (s_2^{\bar{\sigma}} s_2^{-1} v^\mu, s^{\bar{\sigma}}) + \\ &\quad + mn_2^{\bar{\sigma}} s_2^{\bar{\sigma}} n_2^{-1} s_2^{-1} (w^\mu, 0) \in \langle (s_2^{\bar{\sigma}} s_2^{-1} v^\mu, s^{\bar{\sigma}}) \rangle \oplus \langle (w^\mu, 0) \rangle \end{aligned}$$

folgt

$$D^\alpha = \langle (r_2^{\bar{\sigma}} r_2^{-1} t^\mu, r^{\bar{\sigma}}) \rangle \oplus \langle (u^\mu, 0) \rangle \leq E^\alpha.$$

« \Leftarrow »: Analog gilt mit β : $(D^\alpha)^\beta \leq (E^\alpha)^\beta$ und damit $D = D^{\alpha\beta} = (D^\alpha)^\beta \leq (E^\alpha)^\beta = E^{\alpha\beta} = E$.

LITERATUR

- [1] E. GASPARINI - C. METELLI, *On projectivities of abelian groups of torsion-free rank one*, Bollettino U.M.I. (6), 3-A (1984), S. 363-371.
- [2] L. FUCHS, *Abelian Groups*, Pergamon Press, New York, 1960.
- [3] R. BAER, *The significance of the system of subgroups for the structure of the group*, Amer. J. Math., 61 (1939), S. 1-39.
- [4] J. POLAND, *On verifying lattice-isomorphisms between groups*, Arch. Math., 44 (1985), S. 309-310.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 novembre 1990.