

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADA BOTTARO ARUFFO

## **Proprietà della convessificazione**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 85 (1991), p. 55-78

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1991\\_\\_85\\_\\_55\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1991__85__55_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Proprietà della convessificazione.

ADA BOTTARO ARUFFO(\*)

**SUMMARY** - In this work we examine functional inequality (that we introduced in [BA 3] and studied also in [BA 4] and in [BA 5]) to search connections with some operation, as convexification; we give sufficient conditions to obtain that a couple of double Fenchel conjugates (with respect to the last variable) verifies a functional inequality if the couple of functions verifies the same condition; moreover we prove that the double Fenchel conjugate with respect to the last variable of a normal integrand  $f$  on  $T \times (X \times Y)$ , which verifies a suitable functional inequality with respect to the norm composed with the projection on  $Y$ , is again a normal integrand which verifies the same condition.

### Introduzione.

Si considera, dati un insieme  $Z$ ,  $\mathcal{R} \subset 2^Z$ , una classe  $\mathcal{A} \subset \{a: Z \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ funzioni}\}$ , la seguente condizione su coppie di funzioni  $(g, h)$ , ove  $g, h: Z \rightarrow [-\infty, +\infty]$ :

esista  $Z_0 \subset Z$  con  $Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $a_\varepsilon \in \mathcal{A}$  per cui

$$h(z) \leq a_\varepsilon(z) + \varepsilon g(z)$$

per ogni  $z \in Z_0$  per il quale  $h(z) > -\infty$ ,  $g(z) < +\infty$ ,  $a_\varepsilon(z) < +\infty$ .

Tale condizione (detta maggiorazione funzionale) rappresenta una generalizzazione del concetto di «maggiorazione integrale» (cfr. [BL], [CS]), è stata introdotta (cfr. Osservazione 0.9) in [BA 3] e viene studiata, sotto vari aspetti, in [BA 3], in [BA 4], in [BA 5], in [BA 6] ed in [BA 7].

In questo lavoro ci si occupa soprattutto dello studio di tali maggiorazioni funzionali, in rapporto all'operazione di convessificazione sulle

(\*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova, via L. B. Alberti 4, 16132 Genova.

due funzioni della coppia che verifica la condizione e di alcuni legami con le integrande normali.

In particolare, nel § 1, dopo aver fornito condizioni sufficienti affinché dalla verifica della condizione per una coppia  $(g, h)$  si possa dedurre una analoga proprietà per la coppia  $(g^{**}, h^{**})$  formata dalle doppie coniugate di Fenchel, rispetto alla seconda variabile, delle funzioni precedenti (nel Teorema 1.0), nelle Osservazioni 1.1 si mostra con esempi come le ipotesi del Teorema 1.0 non si possano indebolire in alcune direzioni.

Nel § 2, tramite risultati relativi agli involucri convessi degli epigrafici di funzioni sequenzialmente semicontinue inferiormente definite su  $T \times E \times V$  che, insieme alla norma composta con la proiezione su  $V$ , formano coppie di funzioni che verificano un'opportuna maggiorazione funzionale, si dimostra (Teorema 2.4) che se  $f$  è un'integranda normale su  $T \times (X \times Y)$  tale che  $(f, (t, x, y) \in T \times X \times Y \mapsto |y|_Y \in [0, +\infty[)$  verifichi un'opportuna maggiorazione funzionale allora anche la doppia coniugata di Fenchel di  $f$  rispetto all'ultima variabile è un'integranda normale che verifica la stessa condizione.

Infine, nei risultati del § 3, si forniscono ipotesi sotto cui, se  $(\alpha, \beta \circ (pr_T, \gamma))$  è una coppia di funzioni definite su  $T \times X$  che verifica la condizione descritta, si possa ottenere che  $(\psi, \beta)$  è una coppia di funzioni che verifica ancora un'analoga condizione, ove  $\psi: T \times W \rightarrow [-\infty, +\infty]$  è definita in ogni punto come l'estremo inferiore di  $\alpha$  su opportuni insiemi oppure  $\psi$  è la doppia coniugata di Fenchel, rispetto alla seconda variabile, di tale estremo inferiore; si prova anche (Teorema 3.4) che tale doppia coniugata di Fenchel è un'integranda normale e si caratterizzano (Teorema 3.6) anche in altro modo le funzioni  $\psi$  di cui sopra.

Desidero ringraziare il Prof. J. P. Cecconi, che ha discusso con me i risultati del presente lavoro.

## 0. Notazioni e preliminari.

0.0 NOTAZIONI. Siano  $Z, W$  spazi vettoriali topologici su  $\mathbf{R}$  in dualità. Allora  $\langle z, w \rangle_{Z \times W} = \langle w, z \rangle_{W \times Z}$  indica il prodotto di dualità tra  $z \in Z$  e  $w \in W$ ;  $Z'$  indica il duale continuo di  $Z$ ,  $w(Z)$  indica la topologia debole su  $Z$  indotta dalla dualità con  $Z'$ ; se  $Z$  è uno spazio normato su  $\mathbf{R}$  allora  $|z|_Z$  indica la norma in  $Z$  di  $z \in Z$  e  $S_Z(a, r) = \{z \in Z: |z - a|_Z < r\}$  ( $a \in Z, r > 0$ ); se  $T$  ed  $S$  sono insiemi,  $\mathcal{L}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $T$  e  $\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $S$ ,  $\mathcal{L} \times \mathcal{M}$  indica la più piccola  $\sigma$ -algebra su  $T \times S$  che contiene la classe  $\{A \times B: A \in \mathcal{L}, B \in \mathcal{M}\}$ ; se  $E \in \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}|_E$  indica la  $\sigma$ -algebra indotta su  $E$  da  $\mathcal{L}$ . Si abbrevierò s.c.i. per indicare «semicontinua infe-

riormente», s.s.c.i. per indicare «sequenzialmente semicontinua inferiormente», s.c.s. per indicare «semicontinua superiormente». Se  $E, F$  sono insiemi,  $G \subset E$ ,  $D \subset E \times F$ , allora  $2^E$  indica l'insieme delle parti di  $E$ ;  $I_G: E \rightarrow [0, +\infty]$  indica la funzione tale che

$$I_G(e) = \begin{cases} 0 & \text{se } e \in G \\ +\infty & \text{se } e \in E \setminus G \end{cases};$$

se  $f: E \rightarrow F$  è un'applicazione, allora  $f|_G$  indica la restrizione di  $f$  a  $G$  e, se  $H \supset f(G)$ , allora  $f_{G,H}: G \rightarrow H$  indica l'applicazione tale che  $f_{G,H}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in G$ ; se  $K$  è un insieme e  $k: E \rightarrow K$  è un'applicazione, allora  $(f, k): E \rightarrow F \times K$  indica l'applicazione tale che  $(f, k)(x) = (f(x), k(x))$  per ogni  $x \in E$ ;  $pr_E: E \times F \rightarrow E$  indica l'applicazione tale che  $pr_E(x, y) = x$  per ogni  $(x, y) \in E \times F$ ;  $D_x = \{y \in F: (x, y) \in D\}$  per ogni  $x \in E$ ; se  $\lambda: E \rightarrow [-\infty, +\infty]$  è una funzione,  $\text{epi } \lambda = \{(e, \alpha) \in E \times \mathbf{R}: \lambda(e) \leq \alpha\}$  indica l'epigrafico di  $\lambda$ ,  $\text{dom } \lambda = \{e \in E: \lambda(e) < +\infty\}$ ;  $\mathcal{X}(E) = \{k: E \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ funzioni}\}$ . Siano  $V, U$  spazi vettoriali topologici su  $\mathbf{R}$ , localmente convessi in dualità; se  $A \subset V$ , allora  $\overline{\text{co}}A$  indica la chiusura dell'involucro convesso di  $A$ ;  $\varphi^*$  indica la coniugata di Fenchel (rispetto alla dualità di  $V$  con  $U$ ) di una funzione  $\varphi: V \rightarrow [-\infty, +\infty]$  e  $\varphi^{**}$  indica la coniugata di Fenchel (rispetto alla dualità di  $U$  con  $V$ ) di  $\varphi^*$  (se si omette chi è  $U$ , si intende che sia  $U = V'$ ). Se  $(Z, \zeta), (W, \vartheta)$  sono spazi topologici,  $E \subset Z$ , allora  $\zeta \times \vartheta$  indica la topologia prodotto di  $\zeta$  e di  $\vartheta$  su  $Z \times W$ ,  $\zeta|_E$  indica la topologia indotta su  $E$  da  $\zeta$ ,  $\overline{E}^\zeta$  indica la chiusura di  $E$  secondo  $\zeta$  (si omette « $\zeta$ » se non ci sono confusioni),  $\mathcal{B}(\zeta)$  indica la  $\sigma$ -algebra di Borel su  $(Z, \zeta)$ ;  $\eta$  indica la topologia euclidea su  $[-\infty, +\infty]$ . Si conviene inoltre che sia  $\sup \emptyset = -\infty$  e  $\inf \emptyset = +\infty$ .

**0.1 DEFINIZIONE.** Siano  $\mathcal{L}$   $\sigma$ -algebra su  $T$ ,  $(X, \rho)$  spazio topologico,  $f: T \rightarrow X$ . Allora  $f$  si dice  $\mathcal{L}$ -misurabile se  $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}$  per ogni  $A \in \rho$ .

**0.2 DEFINIZIONE.** Siano  $\mathcal{L}$   $\sigma$ -algebra su  $T$ ,  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  misura,  $(X, \rho)$  spazio topologico,  $f: T \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Allora si dice che  $f$  è un'integranda normale se  $f$  è  $(\mathcal{L} \times \mathcal{B}(\rho))$ -misurabile ed  $f(t, \cdot)$  è s.s.c.i. per q.o.  $t \in T$ .

**0.3 DEFINIZIONI.** Siano  $(T, \tau)$  spazio topologico,  $\mathcal{L}$   $\sigma$ -algebra su  $T$ ,  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  misura. Allora si dice che:

a)  $\mu$  è internamente regolare se per ogni  $A \in \mathcal{L}$  ed  $\varepsilon > 0$  vale la seguente condizione

(0.3.0) esiste  $K_{A,\varepsilon}$  compatto e chiuso in  $\tau$ ,  $K_{A,\varepsilon} \in \mathcal{L}$  tale che  $K_{A,\varepsilon} \subset A$ ,  $\mu(A \setminus K_{A,\varepsilon}) < \varepsilon$ ;

b)  $\mu$  è internamente regolare sugli insiemi di misura finita se la condizione (0.3.0) è verificata per ogni  $A \in \mathcal{L}$  con  $\mu(A) < +\infty$  e per ogni  $\varepsilon > 0$ .

0.4 DEFINIZIONE. Uno spazio susliniano è uno spazio  $S$  topologico  $T_2$  tale che esistano uno spazio  $P$  metrico completo e separabile e un'applicazione  $\varphi$  continua e surgettiva,  $\varphi: P \rightarrow S$ .

0.5 TEOREMA. Sia  $X$  spazio vettoriale topologico localmente convesso  $T_2$  su  $\mathbf{R}$  e sia  $f: X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Se  $f$  ammette una minorante affine e continua si ha:

$$\text{epi } f^{**} = \overline{\text{co}} \text{epi } f.$$

DIMOSTRAZIONE [ET] (Cap. I, Proposizioni 3.2 e 4.1).

0.6 OSSERVAZIONE. Siano  $X$  insieme,  $Y$  spazio vettoriale topologico localmente convesso  $T_2$  su  $\mathbf{R}$ ,  $C$  chiuso e convesso di  $Y$ ,  $f: X \times C \rightarrow [-\infty, +\infty]$  funzione,  $\tilde{f}: X \times C \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tale che

$$\tilde{f}(x, y) = \left( z \in Y \mapsto \begin{cases} f(x, z) & \text{se } z \in C \\ +\infty & \text{se } z \in Y \setminus C \end{cases} \right)^{**} (y)$$

per ogni  $(x, y) \in X \times C$ .

Allora

$$\text{dom } \tilde{f} = \{(x, y) \in X \times C: y \in I_x\},$$

ove

$$I_x = C \cap \text{dom} \left( z \in Y \mapsto \begin{cases} f(x, z) & \text{se } z \in C \\ +\infty & \text{se } z \in Y \setminus C \end{cases} \right)^{**}$$

(e quindi  $(\text{dom } f)_x \subset I_x \subset \overline{\text{co}}(\text{dom } f)_x$  se

(0.6.0) esiste una funzione  $f_x: Y \rightarrow \mathbf{R}$  affine e continua tale che  $f_x(y) \leq f(x, y)$  per ogni  $y \in C$ ,

$I_x = C$  se non vale (0.6.0) (cfr. Teorema 0.5 ed [ET], Cap. I, Proposizione 4.1)),

$$\text{dom}(-\tilde{f}) = \{x \in X: \text{vale (0.6.0)}\} \times C$$

(cfr. [ET], Cap. I, Proposizione 4.1).

**0.7 DEFINIZIONI.** Siano  $Z$  insieme,  $\mathcal{R} \subset 2^Z$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}(Z)$ .

a) Si definisce  $M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A}) = \{(g, h) \in \mathcal{X}(Z)^2: \text{esista } Z_0 \subset Z \text{ con } Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R} \text{ e per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esista } a_\varepsilon \in \mathcal{A} \text{ per cui } h(z) \leq a_\varepsilon(z) + \varepsilon g(z) \text{ per ogni } z \in \text{dom}(-h) \cap \text{dom } g \cap \text{dom } a_\varepsilon \cap Z_0\}$ .

b) Se  $\mathcal{M} \subset M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$ , si dice che gli elementi di  $\mathcal{M}$  equiappartengono a  $M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$  se esiste  $Z_0 \subset Z$  con  $Z \setminus Z_0 \in \mathcal{R}$  tale che per ogni  $(g, h) \in \mathcal{M}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $a_{\varepsilon, (g, h)} \in \mathcal{A}$  per cui si abbia  $h(z) \leq a_{\varepsilon, (g, h)}(z) + \varepsilon g(z)$  per ogni  $z \in \text{dom}(-h) \cap \text{dom } g \cap \text{dom } a_{\varepsilon, (g, h)} \cap Z_0$ .

**0.8 OSSERVAZIONI.** In questo lavoro talvolta ci si riferirà alle Definizioni 0.7 relativamente a:

a)  $Z = T \times X$ ,  $\mathcal{R} = \{S \times X: S \in \mathcal{S}\}$  (ove  $T$  e  $X$  sono insiemi,  $\mathcal{S} \subset 2^T$ ) ed  $\mathcal{A}$  una classe di funzioni indipendenti dalla seconda variabile, cioè una classe

$$(0.8.0) \quad \mathcal{A}(\mathcal{B}) = \{a: T \times X \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ funzioni: } a(\cdot, x) = a(\cdot, x') \in \mathcal{B} \text{ per ogni } x, x' \in X\},$$

ove  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}(T)$ ; ad esempio:

i)  $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}(\mathcal{B}_f)$ , ove  $\mathcal{B}_f = \{b: T \rightarrow \mathbf{R} \text{ funzioni}\}$ ,

ii)  $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}(\mathcal{B}_m)$ , ove  $\mathcal{B}_m = \{b: T \rightarrow \mathbf{R} \text{ funzioni } \mathcal{L}\text{-misurabili}\}$  (essendo  $\mathcal{L}$  una  $\sigma$ -algebra su  $T$ ,  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  una misura,  $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{L}: \mu(S) = 0\}$  (si noti che, con tale scelta,  $\mathcal{R}$  risulta essere un  $\sigma$ -anello)),

iii)  $\mathcal{A}'_p = \mathcal{A}(\mathcal{L}^p(\mu, \mathbf{R}))$  ( $p \in [1, \infty]$ ) (essendo  $\mathcal{L}$ ,  $\mu$ ,  $\mathcal{S}$  come in ii));

b) le seguenti classi  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}_c = \{a: Z \rightarrow \mathbf{R} \text{ funzioni costanti}\},$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{F}} = \{a: T \times X \rightarrow [0, +\infty]: \text{per ogni } t \in T \text{ esista } Y_{a,t} \in \mathcal{F} \text{ per cui } a(t, \cdot) = I_{Y_{a,t}}\} \text{ (ove } Z, \mathcal{R} \text{ sono come in a) e } \mathcal{F} \subset 2^X\}.$$

**0.9 OSSERVAZIONE.** La definizione di maggiorazione funzionale utilizzata in [BA 3], [BA 4], [BA 6] e [BA 7] è formalmente diversa da quella data qui nella Definizione 0.7 a), ma di fatto è la stessa poiché

$(g, h) \in M(\mathcal{R}, Z, \mathcal{A})$  (nel senso della Definizione 0.7 a)) se e solo se  $(g|_{\text{dom } g}, h|_{\text{dom } (-h)}) \in M(\mathcal{R}, Z, \{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{A}\})$  (nel senso della definizione utilizzata nei lavori citati).

Analogie dello stesso tipo sussistono anche tra Definizione 0.7 b) e Osservazioni 0.8 da un lato e [BA 3] (Definizione 1.0 b) e Osservazioni 1.2 a) e b)) dall'altro.

Pertanto, tenendo conto di queste considerazioni, nel seguito di questo lavoro si potranno applicare risultati dei lavori sopra citati, anche se relativi a definizioni formalmente diverse da quelle del n. 0.7.

### 1. Studio delle maggiorazioni funzionali in rapporto alla convessificazione.

1.0 TEOREMA. Siano  $T$  insieme,  $S \subset 2^T$ ,  $Y$  spazio vettoriale topologico localmente convesso  $T_2$  su  $\mathbf{R}$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}(T \times Y)$ ,  $\mathcal{R} = \{S \times Y : S \in \mathcal{S}\}$ ,  $g, h: T \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]$ . Siano  $\tilde{g}$  e  $\tilde{h}$  relative a  $g$  e ad  $h$  (e a  $X = T$ ,  $C = Y$ ) come nell'Osservazione 0.6. Allora si ha:

a) se

$\mathcal{A} \subset \{a: T \times Y \rightarrow [-\infty, +\infty]: \text{esiste } S_a \subset T \text{ per cui } \text{dom } a = S_a \times Y$   
e  $a(t, \cdot)$  è concava, s.c.s. per ogni  $t \in S_a\}$

e se  $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ , risulta  $(\tilde{g}, \tilde{h}) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ ;

b) se  $S$  è un anello, se  $g$  è non negativa, se esiste  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}(T)$  tale che valgano

(1.0.0) esiste  $T_1 \subset T$  con  $T \setminus T_1 \in S$  tale che per ogni  $a \in \mathcal{A}$  esista  $b_a \in \mathcal{B}$  e per ogni  $t \in T_1$  esista  $Y_{a,t} \subset Y$  per cui  $\sup_{y \in Y_{a,t}} a(t, y) \leq b_a(t)$  e  $\sup_{y \in Y \setminus Y_{a,t}} h(t, y) \leq b_a(t)$

e

(1.0.1) gli elementi di  $\{(\tilde{g}, c): c \in \mathcal{A}(\mathcal{B})\}$  equiappartengono a  $M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$

(ove  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$  è relativa a  $\mathcal{B}$  come in (0.8.0) dell'Osservazione 0.8 a)) e se  $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ , risulta  $(\tilde{g}, \tilde{h}) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ .

DIMOSTRAZIONE. a) Poiché  $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$  e visto che  $\tilde{h}(t, y) \leq h(t, y)$  ( $(t, y) \in T \times Y$ ) per [ET] (Cap. I, Proposizione 4.1), risulta che  $(g, \tilde{h}) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ . Sia  $T_0 \subset T$ , con  $T \setminus T_0 \in S$ , relativo all'appartenenza di  $(g, \tilde{h})$  a  $M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$  e sia  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $a_\varepsilon \in \mathcal{A}$  tale

che

$$\tilde{h}(t, y) \leq a_\varepsilon(t, y) + \varepsilon g(t, y)$$

per ogni  $(t, y) \in \text{dom}(-\tilde{h}) \cap \text{dom} g \cap ((S_{a_\varepsilon} \cap T_0) \times Y)$ .

Sia ora  $t \in R_{\tilde{h}} \cap S_{a_\varepsilon} \cap T_0$  (ove  $R_{\tilde{h}}$  è tale che  $\text{dom}(-\tilde{h}) = R_{\tilde{h}} \times Y$  (cfr. Osservazione 0.6)); risulta quindi che

$$\frac{1}{\varepsilon} (\tilde{h}(t, y) - a_\varepsilon(t, y)) \leq g(t, y) \quad \text{per ogni } y \in Y$$

e d'altra parte

$$y \in Y \mapsto \frac{1}{\varepsilon} (\tilde{h}(t, y) - a_\varepsilon(t, y)) \in ] - \infty, + \infty [$$

è convessa e s.c.i. per l'ipotesi fatta su  $\mathcal{A}$  e per la definizione di  $\tilde{h}$ ; perciò, utilizzando [ET] (Cap. I, Proposizioni 3.1 e 4.1) si ottiene che

$$\frac{1}{\varepsilon} (\tilde{h}(t, y) - a_\varepsilon(t, y)) \leq \tilde{g}(t, y) \quad \text{per ogni } y \in Y.$$

b) Tenendo conto dell'Osservazione 0.9, utilizzando che  $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ , che  $\mathcal{S}$  è un anello, che  $g$  è non negativa e che vale (1.0.0), da [BA 4] (Corollario 1.6 b)) segue che  $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A}(\mathcal{B}))$  (ove  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$  è relativa a  $\mathcal{B}$  come in (0.8.0) dell'Osservazione 0.8 a)) e pertanto per la a) si ha che  $(\tilde{g}, \tilde{h}) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A}(\mathcal{B}))$ . Usando ora che  $\mathcal{S}$  è un anello e che vale (1.0.1), per [BA 4] (Corollario 1.6 a)) si conclude.

1.1 OSSERVAZIONI. a) Si noti che la a) del Teorema 1.0, nel caso particolare di  $\mathcal{S} = \{S \in \mathcal{L}: \mu(S) = 0\}$  (ove  $\mathcal{L}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $T$  e  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  è una misura) e di  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\{b \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{R}): b(t) \geq 0 \text{ per ogni } t \in T\})$  (si è usata la notazione di (0.8.0) dell'Osservazione 0.8 a)) e di  $g$  ed  $h$  non negative, era stata provata (cfr. anche [BA 3], Osservazione 1.2 c)) in [BL] (Cap. III, § 3, Proposizione 2), ove le ipotesi erano più restrittive anche riguardo agli spazi.

b) Si noti che, se  $T, \mathcal{S}, Y$  ed  $\mathcal{R}$  sono come nelle ipotesi del Teorema 1.0, se  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  e  $T \notin \mathcal{S}$  possono esistere classi  $\mathcal{A} \subset \{a: T \times Y \rightarrow [0, +\infty[: a(t, \cdot) \text{ è continua per ogni } t \in T\}$  e funzioni  $g, h: T \times Y \rightarrow [0, +\infty[$  tali che  $(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$  e  $(\tilde{g}, \tilde{h}) \notin M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$ .

Basta considerare  $Y = \mathbf{R}, G, H: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[$ ,

$$G(y) = \begin{cases} e^{-1/y^2} & \text{se } y \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases},$$

$$H(y) = \begin{cases} G(y) & \text{se } y \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \\ e^{-3/2} \left(3\sqrt{\frac{3}{2}}|y| - 2\right) & \text{se } y \in \mathbf{R} \setminus \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right], \end{cases}$$

$$A_\varepsilon: \mathbf{R} \rightarrow [0, +\infty[,$$

$$A_\varepsilon(y) = \begin{cases} (1 - \varepsilon)H(y) & \text{se } y \in \left[-\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right] \\ (1 + \varepsilon(\sqrt{6}|y| - 2))H(y) & \\ \text{se } y \in \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \setminus \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right] & (0 < \varepsilon < 1), \\ H(y) & \text{se } y \in \mathbf{R} \setminus \left[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right] \end{cases}$$

$g(t, y) = G(y)$ ,  $h(t, y) = H(y)$  per ogni  $(t, y) \in T \times \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{A} = \{(t, y) \in T \times \mathbf{R} \mapsto A_\varepsilon(y) \in [0, +\infty[ : 0 < \varepsilon < 1\}$ ; infatti  $G, H$  e  $A_\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) sono funzioni continue ed  $H$  è convessa (si può verificare che  $H''(y) \geq 0$  per ogni  $y \in \mathbf{R}$ ), per cui  $H = H^{**}$  (cfr. [ET], Cap. I, Proposizioni 3.1 e 4.1); inoltre se  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $y \in [-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ , risulta che  $A_\varepsilon(y) \geq (1 - \varepsilon)H(y)$  e pertanto  $H(y) \leq A_\varepsilon(y) + \varepsilon H(y) = A_\varepsilon(y) + \varepsilon G(y)$  e se  $y \in \mathbf{R} \setminus [-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$  si ha che  $H(y) = A_\varepsilon(y) \leq A_\varepsilon(y) + \varepsilon G(y)$ ; infine, visto che  $G^{**} = 0$  (cfr. [ET], Cap. I, Proposizione 4.1) e visto che  $A_\varepsilon(y) < H(y)$  per ogni  $y \in ]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}[$  e per ogni  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , la relazione  $H^{**}(y) \leq B_\sigma(y) + \sigma G^{**}(y)$  (con  $\sigma > 0$ ,  $B_\sigma \in \{A_\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1\}$ ) non vale per alcun  $y \in ]-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}[$ .

c) Se nella b) del Teorema 1.0 si sostituisce, alla validità di (1.0.1), la validità della seguente condizione

(1.1.0) gli elementi di  $\{(g, c) : c \in \mathcal{A}(\mathcal{B})\}$  equiappartengono a  $M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A})$

(ove  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$  è relativa a  $\mathcal{B}$  come in (0.8.0) dell'Osservazione 0.8 a)) e si lasciano invariate tutte le altre ipotesi, allora può cadere la tesi.

Basta considerare un anello  $\mathcal{S}$  tale che  $T \notin \mathcal{S}$ ,  $Y = \mathbf{R}$ ,  $g(t, y) = 1 + \sqrt{|y|}$ ,  $h(t, y) = 1$  per ogni  $(t, y) \in T \times \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{F} = \{-\infty, -n[\cup]n, +\infty[ : n \in \mathbf{N}\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$  (si sono utilizzate le notazioni delle Osservazioni

0.8). Risulta allora che  $\tilde{g} = 1$ ,  $\tilde{h} = h$  (cfr. [ET], Cap. I, Proposizione 4.1) e quindi per [BA 3] (Osservazioni 1.3 b) e c)) risulta che

$$(g, h) \in M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A}_{\mathcal{F}}), (\tilde{g}, \tilde{h}) \notin M(\mathcal{R}, T \times Y, \mathcal{A}_{\mathcal{F}})$$

e inoltre, tenendo conto di [BA 4] (Osservazione 1.7 a)), si ottiene anche (1.1.0), mentre (1.0.0) si può provare utilizzando l'Osservazione 1.7 b) di [BA 4] (si sfrutti anche l'Osservazione 0.9).

## 2. Maggiorazioni funzionali ed integrande normali.

2.0 LEMMA. Siano  $(S, \sigma)$  spazio topologico pseudo-metrizzabile,  $d$  pseudo-distanza che induce su  $S$  la topologia  $\sigma$ ,  $V$  uno spazio di Banach riflessivo su  $\mathbf{R}$ ,  $k: S \times V \rightarrow [0, +\infty]$  funzione s.s.c.i. rispetto alla topologia  $\sigma \times w(V)$ ,  $s_0 \in S$  tale che per ogni  $s_n \in S$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ) con  $s_n \rightarrow s_0$  si abbia che

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{x \in V: k(s_n, x) - \langle x, y \rangle_{V \times V'} \leq \gamma\}$$

sia relativamente sequenzialmente compatto in  $w(V)$  per ogni  $y \in V'$ ,  $\gamma \in \mathbf{R}$ . Allora si ha che

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(s, \cdot): s \in S, d(s, s_0) \leq \varepsilon\}) = \overline{\text{co}} \text{epi } k(s_0, \cdot).$$

DIMOSTRAZIONE. È ovvio che il primo membro contenga il secondo. Sia  $(x_0, a_0) \notin \overline{\text{co}} \text{epi } k(s_0, \cdot)$ . Allora esistono  $y \in V'$ ,  $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}$ ,  $\alpha \geq 0$  tali che si abbia

$$(2.0.0) \quad \langle x_0, y \rangle_{V \times V'} + \alpha a_0 < \gamma \text{ e } \overline{\text{co}} \text{epi } k(s_0, \cdot) \subset \{(x, a) \in V \times \mathbf{R}: \langle x, y \rangle_{V \times V'} + \alpha a > \gamma\}.$$

Infatti per [ET] (Cap. I, Corollario 1.2) esistono  $y \in V'$ ,  $\alpha, \gamma \in \mathbf{R}$  tali che valga (2.0.0).

D'altra parte se  $\overline{\text{co}} \text{epi } k(s_0, \cdot) = \emptyset$  si può supporre  $\alpha \geq 0$  e altrimenti è  $\alpha \geq 0$ , poiché se  $(x, a) \in \text{epi } k(s_0, \cdot)$  anche  $(x, b) \in \text{epi } k(s_0, \cdot)$  per ogni  $b \geq a$  e quindi  $\alpha > (\gamma - \langle x, y \rangle_{V \times V'}) / b$  per ogni  $b > \max\{a, 0\}$  e facendo tendere  $b$  a  $+\infty$  si conclude.

Sia ora  $\lambda: V \rightarrow \mathbf{R}$  la funzione affine e continua tale che per ogni  $x \in V$  sia:

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha} - \left\langle x, \frac{y}{\alpha} \right\rangle_{V \times V'} & \text{se } \alpha > 0 \\ \frac{|a_0| + 1}{\gamma - \langle x_0, y \rangle_{V \times V'}} (\gamma - \langle x, y \rangle_{V \times V'}) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}.$$

Allora si ha:

$$(2.0.1) \quad \lambda(x_0) > a_0, \quad \lambda(x) < k(s_0, x) \quad \text{per ogni } x \in V.$$

Infatti se  $\alpha > 0$  è ovvio e se  $\alpha = 0$  si ha che

$$\gamma - \langle x_0, y \rangle_{V \times V'} > 0 > \gamma - \langle x, y \rangle_{V \times V'} \quad \text{per ogni } x \in \text{dom } k(s_0, \cdot),$$

mentre  $k$  è a valori non negativi e quindi vale (2.0.1).

Ora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che per ogni  $s \in S$  per cui  $d(s, s_0) \leq \varepsilon_0$  si abbia  $\lambda(x) \leq k(s, x)$  per ogni  $x \in V$ ; se infatti per assurdo esistessero  $(s_n, x_n) \in S \times V$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ) tali che  $\lambda(x_n) > k(s_n, x_n)$  e  $d(s_n, s_0) \leq 1/n$ , essendo

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{x \in V: k(s_n, x) - \langle x, w \rangle_{V \times V'} \leq \delta\}$$

relativamente sequenzialmente compatto in  $w(V)$  per ogni  $w \in V'$ ,  $\delta \in \mathbf{R}$ , esisterebbero un'estratta  $(x_{n_h})_{h \in \mathbf{N}}$  di  $(x_n)_{n \in \mathbf{Z}_+}$  e  $x \in V$  tali che  $x_{n_h} \rightarrow x$  nella topologia  $w(V)$ ; allora, essendo  $k$  s.s.c.i. rispetto alla topologia  $\sigma \times w(V)$ , si avrebbe che:

$$k(s_0, x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} k(s_{n_h}, x_{n_h}) \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \lambda(x_{n_h}) = \lambda(x),$$

che contraddice (2.0.1).

Risulta allora che  $(x_0, a_0)$  ed  $\text{epi } k(s, \cdot)$  sono separati dall'iperpiano che è grafico di  $\lambda$  per ogni  $s \in S$  con  $d(s, s_0) \leq \varepsilon_0$  e altrettanto avviene per  $(x_0, a_0)$  e  $\cup \{\text{epi } k(s, \cdot): s \in S, d(s, s_0) \leq \varepsilon_0\}$ , nonché per  $(x_0, a_0)$  e  $\overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(s, \cdot): s \in S, d(s, s_0) \leq \varepsilon_0\})$  e quindi, tenendo conto che  $(x_0, a_0)$  non appartiene all'iperpiano di cui sopra, si ha che:

$$(x_0, a_0) \notin \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(s, \cdot): s \in S, d(s, s_0) \leq \varepsilon\}).$$

**2.1 LEMMA.** Siano  $(T, \tau)$  spazio topologico pseudo-metrizzabile,  $S \subset 2^T$ . Siano  $(E, \xi)$  uno spazio topologico pseudo-metrizzabile,  $d$  pseudo-distanza che induca su  $T \times E$  la topologia  $\tau \times \xi$ ,  $V$  uno spazio di Banach riflessivo su  $\mathbf{R}$ ,  $\mathcal{R} = \{S \times E \times V: S \in S\}$ ,  $k: T \times E \times V \rightarrow [0, +\infty]$  funzio-

ne s.s.c.i. rispetto alla topologia  $\tau \times \xi \times w(V)$ ,

$$(k, (t, e, x) \in T \times E \times V \mapsto |x|_V \in [0, +\infty]) \in M(\mathcal{R}, T \times E \times V, \mathcal{A}_c),$$

ove  $\mathcal{A}_c$  (relativa a  $Z = T \times E \times V$ ) è come nell'Osservazione 0.8 b); sia  $T_0 \subset T$  con  $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$  relativo a tale appartenenza. Allora per ogni  $(t_0, e_0) \in T_0 \times E$  si ha che:

$$\begin{aligned} \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(t, e, \cdot): (t, e) \in T_0 \times E, d((t, e), (t_0, e_0)) \leq \varepsilon\}) = \\ = \overline{\text{co}} \text{epi } k(t_0, e_0, \cdot). \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\mathcal{E} = \{S \times E: S \in \mathcal{S}\}$ ; allora  $\mathcal{R} = \{F \times V: F \in \mathcal{E}\}$ . Si può quindi applicare (a  $T \times E$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $V$ ,  $g = k$ ,  $h: (t, e, x) \in T \times E \times V \mapsto x \in V$ ) il Teorema 2.5 c) di [BA 5] e, tenendo conto dell'Osservazione 2.7 a) di [BA 5], si ottiene che si può applicare il Lemma 2.0 a  $(S, \sigma) = (T_0 \times E, \tau|_{T_0 \times E})$ ,  $k|_{T_0 \times E \times V}$  e ad un qualunque punto  $(t_0, e_0) \in T_0 \times E$ .

**2.2 TEOREMA.** Siano  $(T, \tau)$  spazio topologico pseudo-mettrizzabile,  $\mathcal{L}$   $\sigma$ -algebra su  $T$  tale che  $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$ ,  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  misura completa ed internamente regolare (cfr. Definizione 0.3 a)). Siano  $(E, \xi)$ ,  $d$ ,  $V$  come nel Lemma 2.1,  $\mathcal{R} = \{S \times E \times V: S \in \mathcal{L}, \mu(S) = 0\}$ ,  $k: T \times E \times V \rightarrow [0, +\infty]$  funzione s.s.c.i. rispetto alla topologia  $\tau \times \xi \times w(V)$ ,

$$(k, (t, e, x) \in T \times E \times V \mapsto |x|_V \in [0, +\infty]) \in M(\mathcal{R}, T \times E \times V, \mathcal{A}_m),$$

ove  $\mathcal{A}_m$  (relativa a  $X = E \times V$ ) è come in ii) dell'Osservazione 0.8 a). Allora per ogni  $j \in \mathbf{Z}_+$  esiste  $K_j$  compatto e chiuso in  $\tau$  per cui sia

$$(2.2.0) \quad \mu(T \setminus K_j) < \frac{1}{j}, \quad K_j \subset K_{j+1} \quad (j \in \mathbf{Z}_+)$$

e per cui per ogni  $(t_0, e_0) \in \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} K_j\right) \times E$  si abbia:

$$(2.2.1) \quad \bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(t, e, \cdot): (t, e) \in K_j \times E, d((t, e), (t_0, e_0)) \leq \varepsilon\}) = \overline{\text{co}} \text{epi } k(t_0, e_0, \cdot).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Ovviamente, comunque siano gli insiemi  $K_j$  ( $j \in \mathbf{Z}_+$ ) e qualunque sia  $(t_0, e_0) \in \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} K_j\right) \times E$ , in (2.2.1) il primo membro contiene il secondo. Basta allora provare l'esistenza di  $K_j$  ( $j \in \mathbf{Z}_+$ ) compatti e chiusi in  $\tau$  che verifichino (2.2.0) e per cui in (2.2.1) il primo membro sia contenuto nel secondo per ogni  $(t_0, e_0) \in \left(\bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} K_j\right) \times E$ .

Per le ipotesi fatte su  $k$  esiste  $T_0 \in \mathcal{L}$  con  $\mu(T \setminus T_0) = 0$  e per ogni  $n \in \mathbf{Z}_+$  esiste  $b_n: T \rightarrow \mathbf{R}$  funzione  $\mathcal{L}$ -misurabile per cui sia

$$|x|_V \leq b_n(t) + \frac{1}{n} k(t, e, x) \quad \text{per ogni } (t, e, x) \in T_0 \times E \times V.$$

Ora se  $j \in \mathbf{Z}_+$  per il teorema di Lusin (cfr. [BA 1], Corollario 4.28 e Definizione 1.8 a)) per ogni  $n \in \mathbf{Z}_+$  esiste un compatto e chiuso  $K_{n,j}$  in  $\tau$  tale che sia  $\mu(T \setminus K_{n,j}) < 1/(2^{n+1}j)$  e  $b_n|_{K_{n,j}}$  sia continua e non è restrittivo supporre che sia  $K_{n,j} \subset K_{n,j+1}$  ( $n, j \in \mathbf{Z}_+$ ) (infatti basta considerare  $H_{n,j}$  compatto e chiuso in  $\tau$  tale che sia  $\mu(T \setminus H_{n,j}) < 1/(2^{n+1}2^j)$  e con  $b_n|_{H_{n,j}}$  continua ( $n, j \in \mathbf{Z}_+$ ) e  $K_{n,j} = \bigcap_{h \geq j} H_{n,h}$ ). Siano ora  $j \in \mathbf{Z}_+$ ,  $K_{0,j}$  compatto e chiuso in  $\tau$ ,  $K_{0,j} \subset T_0$ ,  $\mu(T \setminus K_{0,j}) < 1/(2j)$  (un tale insieme esiste per l'interna regolarità di  $\mu$ ), si supponga che sia  $K_{0,j} \subset K_{0,j+1}$  (il che è lecito) e sia  $K_j = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_{n,j}$ ; allora  $K_j \subset T_0$ ,  $\mu(T \setminus K_j) < 1/j$ ,  $K_j$  è compatto e chiuso in  $\tau$  e  $K_j \subset K_{j+1}$  per ogni  $j \in \mathbf{Z}_+$ .

Sia ora  $j \in \mathbf{Z}_+$ . Allora ogni funzione  $b_n$  è limitata su  $K_j$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ) (cfr. [K], Cap. 5, Teorema 8) e pertanto è lecito applicare il Lemma 2.1 su  $K_j$  relativamente ad  $\mathcal{S} = \{S \subset K_j: S \in \mathcal{L}, \mu(S) = 0\}$  e l'insieme  $T_0$  citato in tale lemma si può considerare coincidente con  $K_j$ . Si ha allora che

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(t, e, \cdot): (t, e) \in K_j \times E, d((t, e), (t_0, e_0)) \leq \varepsilon\}) \subset$$

$$\subset \overline{\text{co}} \text{epi } k(t_0, e_0, \cdot) \quad \text{per ogni } (t_0, e_0) \in K_j \times E$$

e quindi, se  $(t_0, e_0) \in \left( \bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} K_j \right) \times E$ , visto che esiste  $j_{t_0} \in \mathbf{Z}_+$  tale che se  $j > j_{t_0}$  allora  $t_0 \in K_j$ , si ha:

$$\overline{\text{co}} \text{epi } k(t_0, e_0, \cdot) \supset$$

$$\supset \bigcup_{j > j_{t_0}} \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(t, e, \cdot): (t, e) \in K_j \times E, d((t, e), (t_0, e_0)) \leq \varepsilon\}) =$$

$$= \bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}}(\cup \{\text{epi } k(t, e, \cdot): (t, e) \in K_j \times E, d((t, e), (t_0, e_0)) \leq \varepsilon\}),$$

ove l'ultima eguaglianza segue dal fatto che  $K_j \subset K_{j+1}$  per ogni  $j \in \mathbf{Z}_+$ .

**2.3 LEMMA.** Sia  $(K, \tau)$  spazio topologico compatto. Allora  $(K, \tau)$  è pseudo-mettrizzabile se e solo se  $(K, \tau)$  è regolare e a base numerabile di aperti.

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $(K, \tau)$  pseudo-mettrizzabile. Allora  $(K, \tau)$  è a base numerabile di aperti per [K] (Cap. 5, Teorema 5) ed è regolare per [K] (Cap. 5, Corollario 35 e Cap. 5, definizione di paracompatto (prima del Teorema 28)).

Viceversa sia  $(K, \tau)$  regolare e a base numerabile di aperti. Allora per la dimostrazione di [K] (Cap. 4, Teorema 16) esiste una famiglia  $F$  numerabile di funzioni  $f: K \rightarrow [0, 1]$  continue e tali che per ogni  $B \subset K$ ,  $B$  chiuso e  $x \in K \setminus B$  esista  $f \in F$  tale che  $f(x) \notin \overline{f(B)}$ . Allora per [K] (Cap. 4, Lemma 5) la mappa valutazione  $e: K \rightarrow [0, 1]^N$ ,  $e(x) = (f(x))_{f \in F}$  per ogni  $x \in K$ , è continua ed  $e_{K, e(K)}$  è aperta. D'altra parte  $e^{-1}(e(A)) = A$  per ogni  $A \in \tau$ . Infatti, se  $A \in \tau$  e se  $x \in e^{-1}(e(A))$ , esiste  $y \in A$  tale che  $e(y) = e(x)$  e se  $x \notin A$  risulta che  $x \in \overline{K \setminus A}$  e  $y \notin K \setminus A$ ,  $K \setminus A$  è chiuso e pertanto esiste  $f \in F$  per cui  $f(y) \notin \overline{f(K \setminus A)}$ , ma  $f(y) = f(x) \in \overline{f(K \setminus A)}$ . Quindi, visto che  $e(K)$  è pseudo-mettrizzabile, per [BA 1] ( $b''$ ) del Teorema 1.7) si conclude.

**2.4 TEOREMA.** Siano  $(T, \tau)$ ,  $(X, \rho)$  spazi topologici,  $\mathcal{L}$   $\sigma$ -algebra su  $T$ ,  $\mathcal{L} \supset \mathcal{B}(\tau)$ ,  $(K, \tau|_K)$  sia regolare e a base numerabile di aperti per ogni  $K$  compatto e chiuso in  $\tau$ ,  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  misura  $\sigma$ -finita, completa e internamente regolare sugli insiemi di misura finita (cfr. Definizione 0.3 b)),  $Y$  spazio di Banach separabile e riflessivo su  $\mathbf{R}$ ,  $\mathcal{R} = \{S \times X \times Y: S \in \mathcal{L}, \mu(S) = 0\}$ ,  $\mathcal{A} = \{\alpha_m\} \cup \{\alpha'_p: p \in [1, \infty]\}$  (ove si sono usate le notazioni di ii) e di iii) dell'Osservazione 0.8 a)), esistano  $X_M \in \mathcal{B}(\rho)$  ( $M \in \mathbf{N}$ ) tali che: i)  $X = \bigcup_{M \in \mathbf{N}} X_M$ ; ii)  $(X_M, \rho|_{X_M})$  sia spazio pseudo-mettrizzabile tale che esistano  $P_M$  spazio pseudo-metrico, completo e separabile e  $p_M: P_M \rightarrow X_M$  continua e surgettiva ( $M \in \mathbf{N}$ ); iii) per ogni  $x_n, x \in X$  ( $n \in \mathbf{N}$ ) tali che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  in  $\rho$ , esistano  $M \in \mathbf{N}$  e  $(n_h)_{h \in \mathbf{N}}$  successione strettamente crescente di naturali per cui  $x, x_{n_h} \in X_M$  per ogni  $h \in \mathbf{N}$ .

Sia  $f: T \times (X \times Y) \rightarrow [0, +\infty]$  integranda normale, ove su  $X \times Y$  si consideri la topologia  $\rho \times w(Y)$  (cfr. Definizione 0.2), sia

$$(2.4.0) \quad (f, (t, x, y) \in T \times X \times Y \mapsto |y|_Y \in [0, +\infty]) \in M(\mathcal{R}, T \times X \times Y, \mathcal{A})$$

e sia  $T_0 \in \mathcal{L}$  con  $\mu(T \setminus T_0) = 0$  relativo a tale appartenenza.

Allora, se  $T_1 \in \mathcal{L}$ ,  $T_1 \subset T_0$  è tale che  $\mu(T \setminus T_1) = 0$  e  $f(t, \cdot)$  è s.s.c.i. su  $X \times Y$  con la topologia  $\rho \times w(Y)$  per ogni  $t \in T_1$ , si ha che

$$k = ((t, (x, y)) \in T_1 \times (X \times Y) \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty])$$

è un'integranda normale, ove su  $X \times Y$  si considera la topologia  $\rho \times w(Y)$ ; inoltre  $(f(t, x, \cdot))^{**}$  è convessa per ogni  $t \in T$  e per ogni  $x \in X$  e

$$(2.4.1) \quad (k, (t, x, y) \in T \times X \times Y \mapsto |y|_Y \in [0, +\infty[) \in M(\mathcal{R}, T \times X \times Y, \mathcal{A}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia dapprima  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_m$ . Sia  $A \in \mathcal{L}$ ,  $A \subset T_1$ , con  $\mu(A) < +\infty$ . Tenendo conto del fatto che per l'interna regolarità di  $\mu$  sugli insiemi di misura finita per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $A_\varepsilon$  compatto e chiuso in  $\tau$ ,  $A_\varepsilon \subset A$  tale che  $\mu(A \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ , per il Corollario 4.17 di [BA 1] (cfr. anche [BA 1], Osservazioni 4.18 e 4.27, Esempio 4.19 e Definizioni 1.18 a') e 3.0) applicato su ogni  $A_{1/(2n)}$  ( $n \in \mathbf{Z}_+$ ) si ottiene che per ogni  $n \in \mathbf{Z}_+$  esiste  $K_n$  compatto e chiuso in  $\tau$ ,  $K_n \subset A$ , tale che  $\mu(A \setminus K_n) < 1/n$  e  $f|_{K_n \times X \times Y}$  sia s.s.c.i. rispetto alla topologia  $(\tau \times \rho \times w(Y))|_{K_n \times X \times Y}$ . Ora per ogni  $n \in \mathbf{Z}_+$  risulta che  $K_n$ , con la topologia  $\tau|_{K_n}$ , è un compatto regolare a base numerabile di aperti ed è quindi pseudo-mettrizzabile per il Lemma 2.3; sia  $M \in \mathbf{N}$  e sia  $d_{n,M}$  una pseudo-distanza su  $K_n \times X_M$  che induca la topologia  $(\tau \times \rho)|_{K_n \times X_M} = \tau|_{K_n} \times \rho|_{X_M}$ . Per ogni  $n \in \mathbf{Z}_+$  siano ora  $K_{n,j,M} \subset K_n$  relativi a  $K_n$ ,  $X_M$ ,  $Y$  e a  $f|_{K_n \times X_M \times Y}$  come nell'enunciato del Teorema 2.2,  $\mu(K_n \setminus K_{n,j,M}) < 1/(j2^{M+1})$  ( $j \in \mathbf{Z}_+$ ); allora se  $n \in \mathbf{Z}_+$  si ha per ogni  $(t_0, x_0) \in \left( \bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} K_{n,j,M} \right) \times X_M$  e per ogni  $j_0 \in \mathbf{Z}_+$ :

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} \text{epi}(f(t_0, x_0, \cdot))^{**} &= \overline{\text{co}} \text{epi} f(t_0, x_0, \cdot) = \\ &= \bigcup_{j \in \mathbf{Z}_+} \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} (\cup \{ \text{epi} f(t, x, \cdot) : (t, x) \in K_{n,j,M} \times X_M, \\ & \quad d_{n,M}((t, x), (t_0, x_0)) \leq \varepsilon \}) \supset \\ & \supset \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} \{ \text{epi} f(t, x, \cdot) : (t, x) \in K_{n,j_0,M} \times X_M, d_{n,M}((t, x), (t_0, x_0)) \leq \varepsilon \}^{w(Y)} \end{aligned}$$

ove la prima eguaglianza segue dal Teorema 0.5.

Siano ora  $n, j \in \mathbf{Z}_+$  e siano  $(t_h, x_h, y_h) \in K_{n,j,M} \times X_M \times Y$  ( $h \in \mathbf{N}$ ) tali che sia  $(t_h, x_h, y_h) \rightarrow (t_0, x_0, y_0)$  in  $\tau \times \rho \times w(Y)$  e che sia  $\liminf_{h \rightarrow \infty} (f(t_h, x_h, \cdot))^{**}(y_h) < +\infty$ . Allora, tenendo conto del Teorema 0.5 e della (2.4.2), si ha:

$$\begin{aligned} (y_0, \liminf_{h \rightarrow \infty} (f(t_h, x_h, \cdot))^{**}(y_h)) &\in \\ \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\text{co}} \{ \text{epi}(f(t, x, \cdot))^{**} : (t, x) \in K_{n,j,M} \times X_M, d_{n,M}((t, x), (t_0, x_0)) \leq \varepsilon \}^{w(Y) \times \eta} &\subset \\ &\subset \text{epi}(f(t_0, x_0, \cdot))^{**}, \end{aligned}$$

da cui

$$(f(t_0, x_0, \cdot))^{**}(y_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} (f(t_h, x_h, \cdot))^{**}(y_h),$$

anche se il secondo membro è  $+\infty$ . Allora per ogni  $n, j \in \mathbf{Z}_+$  la funzione

$$(t, x, y) \in K_{n,j,M} \times X_M \times Y \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty]$$

è s.s.c.i. rispetto alla topologia  $(\tau \times \rho \times w(Y))|_{K_{n,j,M} \times X_M \times Y}$  e, se  $K_{n,j} = \bigcap_{M \in N} K_{n,j,M}$ , allora la funzione

$$(t, x, y) \in K_{n,j} \times X \times Y \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty]$$

è s.s.c.i. rispetto alla topologia  $(\tau \times \rho \times w(Y))|_{K_{n,j} \times X \times Y}$ , ove si tenga conto della iii) e, poiché  $K_{n,j} \times X_M \times \overline{S_Y(0, M)}$  è pseudo-mettrizzabile con la topologia  $(\tau \times \rho \times w(Y))|_{K_{n,j} \times X_M \times \overline{S_Y(0, M)}}$ , si ha che per ogni  $M \in N$  la funzione

$$(t, x, y) \in K_{n,j} \times X_M \times \overline{S_Y(0, M)} \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty]$$

è s.c.i. rispetto alla topologia  $(\tau \times \rho \times w(Y))|_{K_{n,j} \times X_M \times \overline{S_Y(0, M)}}$  e d'altra parte  $\mu(A \setminus K_{n,j}) \leq \mu(A \setminus K_n) + \mu(K_n \setminus K_{n,j}) < 1/n + 1/j$ . Allora, poiché  $(x, y) \in X \times Y \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty]$  è s.s.c.i. rispetto alla topologia  $\rho \times w(Y)$  per ogni  $t \in A$ , per [BA 1] (Corollario 4.17, Osservazioni 4.18 e 4.27, Esempio 4.19 e Definizioni 1.18 a') e 3.0) si ha che

$$(t, (x, y)) \in A \times (X \times Y) \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty]$$

è un'integranda normale, ove su  $X \times Y$  si considera la topologia  $\rho \times w(Y)$  e ciò vale per ogni  $A \in \mathcal{L}$ ,  $A \subset T_1$  con  $\mu(A) < +\infty$ . Poiché  $\mu$  è  $\sigma$ -finita, si ha allora che

$$(t, (x, y)) \in T_1 \times (X \times Y) \mapsto (f(t, x, \cdot))^{**}(y) \in [0, +\infty]$$

è un'integranda normale, ove su  $X \times Y$  si considera la topologia  $\rho \times w(Y)$ .

La convessità di  $(f(t, x, \cdot))^{**}$  per ogni  $(t, x) \in T \times X$  segue dalla definizione di coniugata di Fenchel e (2.4.1) segue da (2.4.0) e da a) del Teorema 1.0 (applicato a  $T \times X$ ,  $\{S \times X: S \in \mathcal{L}, \mu(S) = 0\}$ ,  $Y$ ).

Se  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_p^i$  ( $p \in [1, \infty]$ ), la tesi segue dal teorema relativo ad  $\mathcal{A}_m$  e da a) del Teorema 1.0 (applicato a  $T \times X$ ,  $\{S \times X: S \in \mathcal{L}, \mu(S) = 0\}$ ,  $Y$ ).

### 3. Maggiorazioni funzionali, estremi inferiori e convessificate.

**3.0 TEOREMA.** Siano  $T$  insieme,  $S \subset 2^T$ ,  $X$  e  $W$  insiemi,  $\mathcal{R}_X = \{S \times X: S \in \mathcal{S}\}$ ,  $\mathcal{R}_W = \{S \times W: S \in \mathcal{S}\}$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}(T)$ ,  $\mathcal{A}_X(\mathcal{B})$  [risp.  $\mathcal{A}_W(\mathcal{B})$ ] relative a  $\mathcal{B}$  e a  $X$  [risp.  $W$ ] come in (0.8.0) dell'Osservazione 0.8 a),  $\alpha: T \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $\beta: T \times W \rightarrow [-\infty, +\infty]$ ,  $\gamma: D_\gamma \subset T \times X \rightarrow W$  applicazioni e  $\Sigma: T \times W \rightarrow 2^X$  multiapplicazione; sia

$\delta: T \times X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tale che

$$\delta(t, x) = \begin{cases} \beta(t, \gamma(t, x)) & \text{se } (t, x) \in D_\gamma \\ -\infty & \text{se } (t, x) \in (T \times X) \setminus D_\gamma \end{cases}.$$

Sia inoltre  $\psi: T \times W \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tale che

$$\psi(t, w) = \inf \{ \alpha(t, x): x \in \Sigma(t, w) \} \quad \text{per ogni } (t, w) \in T \times W.$$

Allora, se esiste  $\mathcal{J} \subset 2^T$  tale che  $R \cup S \in \mathcal{S}$  per ogni  $R \in \mathcal{J}$ ,  $S \in \mathcal{S}$  e per il quale valgono:

(3.0.0) esiste  $T_1 \subset T$  con  $T \setminus T_1 \in \mathcal{J}$  tale che  $x \in \Sigma(t, \gamma(t, x))$  per ogni  $(t, x) \in D_\gamma \cap (T_1 \times X)$

e

(3.0.1) esiste  $T_2 \subset T$  con  $T \setminus T_2 \in \mathcal{J}$  tale che  $\Sigma(t, w) \subset \{x \in X: (t, x) \in D_\gamma, \beta(t, \gamma(t, x)) \geq \beta(t, w)\}$  per ogni  $(t, w) \in T_2 \times W$ ,

si ha che le due seguenti condizioni sono equivalenti fra loro:

(3.0.2)  $(\psi, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{A}_W(\mathcal{B}))$

(3.0.3)  $(\alpha, \delta) \in M(\mathcal{R}_X, T \times X, \mathcal{A}_X(\mathcal{B}))$

(si noti che la condizione (3.0.0) si sfrutta solo per provare l'implicazione da (3.0.2) a (3.0.3) e la (3.0.1) si usa solo per dimostrare che da (3.0.3) segue (3.0.2)); inoltre da (3.0.0) segue che

(3.0.4)  $\psi(t, \gamma(t, x)) \leq \alpha(t, x)$  per ogni  $(t, x) \in D_\gamma \cap (T_1 \times X)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Valga la condizione (3.0.0), valga (3.0.2) e sia  $T_0 \subset T$  con  $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$  relativo all'appartenenza di  $(\psi, \beta)$  a  $M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{A}_W(\mathcal{B}))$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $b_\varepsilon \in \mathcal{B}$  tale che

(3.0.5)  $\beta(t, w) \leq b_\varepsilon(t) + \varepsilon\psi(t, w)$

per ogni  $(t, w) \in \text{dom}(-\beta) \cap \text{dom} \psi \cap ((\text{dom} b_\varepsilon \cap T_0) \times W)$ . Quindi

$$(3.0.6) \quad \beta(t, \gamma(t, x)) \leq b_\varepsilon(t) + \varepsilon \psi(t, \gamma(t, x))$$

per ogni  $(t, x) \in D_\gamma \cap ((\text{dom} b_\varepsilon \cap T_0) \times X)$  con  $(t, \gamma(t, x)) \in \text{dom}(-\beta) \cap \text{dom} \psi$  e d'altra parte da (3.0.0) segue che

$$\psi(t, \gamma(t, x)) = \inf \{ \alpha(t, z) : z \in \Sigma(t, \gamma(t, x)) \} \leq \alpha(t, x)$$

$$\text{per ogni } (t, x) \in D_\gamma \cap (T_1 \times X)$$

e pertanto vale (3.0.4) e inoltre

$$\beta(t, \gamma(t, x)) \leq b_\varepsilon(t) + \varepsilon \alpha(t, x)$$

per ogni  $(t, x) \in \text{dom} \alpha \cap D_\gamma \cap ((\text{dom} b_\varepsilon \cap T_0 \cap T_1) \times X)$  con  $(t, \gamma(t, x)) \in \text{dom}(-\beta)$ , per cui vale (3.0.3).

Valga ora la condizione (3.0.1), valga (3.0.3) e sia  $S_0 \subset T$  con  $T \setminus S_0 \in \mathcal{S}$  relativo all'appartenenza di  $(\alpha, \delta)$  a  $M(\mathcal{R}_X, T \times X, \mathcal{C}_X(\mathcal{B}))$ . Allora per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $c_\varepsilon \in \mathcal{B}$  tale che

$$\beta(t, \gamma(t, x)) \leq c_\varepsilon(t) + \varepsilon \alpha(t, x)$$

per ogni

$$(t, x) \in \text{dom} \alpha \cap D_\gamma \cap ((\text{dom} c_\varepsilon \cap S_0) \times X) \quad \text{con} \quad (t, \gamma(t, x)) \in \text{dom}(-\beta).$$

Utilizzando anche (3.0.1) risulta perciò che

$$\beta(t, w) \leq \inf \{ \beta(t, \gamma(t, x)) : x \in X$$

$$\text{per cui } (t, x) \in D_\gamma \text{ e } \beta(t, \gamma(t, x)) \geq \beta(t, w) \} \leq$$

$$\leq \inf \{ \beta(t, \gamma(t, x)) : x \in \Sigma(t, w) \} \leq$$

$$\leq c_\varepsilon(t) + \varepsilon \inf \{ \alpha(t, x) : x \in \Sigma(t, w) \} = c_\varepsilon(t) + \varepsilon \psi(t, w)$$

per ogni  $(t, w) \in \text{dom}(-\beta) \cap \text{dom} \psi \cap ((\text{dom} c_\varepsilon \cap S_0 \cap T_2) \times W)$  e quindi vale (3.0.2).

**3.1 COROLLARIO.** Siano  $T, \mathcal{S}, X, W, \mathcal{R}_W, \mathcal{B}, \mathcal{C}_W(\mathcal{B}), \alpha, \beta, \gamma$  come nel Teorema 3.0. Allora:

a) se si definisce  $\psi_0: T \times W \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tale che

$$\psi_0(t, w) = \inf \{ \alpha(t, x) : x \in X \text{ per cui } (t, x) \in D_\gamma, \beta(t, \gamma(t, x)) \geq \beta(t, w) \}$$

per ogni  $(t, w) \in T \times W$ , la (3.0.3) del Teorema 3.0 è equivalente a

$$(3.1.0) \quad (\psi_0, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W(\mathcal{B}));$$

inoltre

$$(3.1.1) \quad \psi_0(t, \gamma(t, x)) \leq \alpha(t, x) \quad \text{per ogni } (t, x) \in D_\gamma \cap (T \times X);$$

b) se  $(W, \leq)$  è parzialmente ordinato, se  $\beta(t, \cdot)$  è debolmente crescente per ogni  $t \in T$ , se si definisce  $\psi_1: T \times W \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tale che

$$\psi_1(t, w) = \inf \{ \alpha(t, x) : x \in X$$

$$\text{per cui } (t, x) \in D_\gamma, \gamma(t, x) \geq w \} \quad \text{per ogni } (t, w) \in T \times W,$$

la (3.0.3) del Teorema 3.0 è equivalente a

$$(3.1.2) \quad (\psi_1, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W(\mathcal{B}));$$

inoltre

$$\psi_1(t, \gamma(t, x)) \leq \alpha(t, x) \quad \text{per ogni } (t, x) \in D_\gamma \cap (T \times X).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per provare le due tesi basta mostrare che, nelle rispettive ipotesi di a) e di b), con opportune scelte di  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$ , valgono (3.0.0) e (3.0.1) con  $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$  e le due funzioni  $\psi_0$  e  $\psi_1$  coincidono con la funzione  $\psi$  del Teorema 3.0, relativa rispettivamente ad  $\alpha$  e a  $\Sigma_0$  e ad  $\alpha$  e a  $\Sigma_1$ . Per far ciò, basta scegliere

$$\Sigma_0(t, w) = \{ x \in X : (t, x) \in D_\gamma, \beta(t, \gamma(t, x)) \geq \beta(t, w) \}$$

e

$$\Sigma_1(t, w) = \{ x \in X : (t, x) \in D_\gamma, \gamma(t, x) \geq w \} \quad \text{per ogni } (t, w) \in T \times W$$

e tenere conto che, nel caso b), la validità di (3.0.1) con  $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$  segue dalla debole crescita di  $\beta(t, \cdot)$  ( $t \in T$ ).

**3.2 COROLLARIO.** Siano  $W$  chiuso e convesso di uno spazio  $V$  vettoriale topologico localmente convesso  $T_2$  su  $\mathbf{R}$ ,  $T, S, X, \mathcal{R}_W, \mathcal{B}, \mathcal{C}_W(\mathcal{B}), \alpha, \beta, \gamma, \Sigma, \psi$  come nel Teorema 3.0,  $\psi_0$  e (se  $(W, \leq)$  è parzialmente ordinato)  $\psi_1$  come nel Corollario 3.1 e valga la seguente condizione

$$(3.2.0) \quad \text{esiste } S \subset T \text{ tale che } \text{dom}(-\beta) = S \times W, \text{ per ogni } t \in S \text{ esiste } \beta^t: V \rightarrow \mathbf{R} \text{ affine e continua tale che } \beta^t(w) \leq \beta(t, w) \text{ per ogni } w \in W, \beta(t, \cdot) \text{ è convessa e s.c.i. per ogni } t \in S.$$

Allora, utilizzando per  $\psi$ ,  $\psi_0$  e  $\psi_1$  la notazione dell'Osservazione 0.6, risulta che:

a) se valgono le condizioni (3.0.0) e (3.0.1), la (3.0.3) del Teorema 3.0 è equivalente a

$$(3.2.1) \quad (\tilde{\psi}, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{A}_W(\mathcal{B}))$$

(si noti che la condizione (3.0.0) si sfrutta solo per provare l'implicazione da (3.2.1) a (3.0.3) e la (3.0.1) si usa solo per dimostrare che da (3.0.3) segue (3.2.1));

b) la (3.0.3) del teorema 3.0 è equivalente a

$$(3.2.2) \quad (\tilde{\psi}_0, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{A}_W(\mathcal{B}));$$

c) se  $(W, \leq)$  è parzialmente ordinato, se  $\beta(t, \cdot)$  è debolmente crescente per ogni  $t \in T$ , la (3.0.3) del Teorema 3.0 è equivalente a

$$(3.2.3) \quad (\tilde{\psi}_1, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{A}_W(\mathcal{B})).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Utilizzando la notazione dell'Osservazione 0.6, dalle ipotesi e dal Teorema 0.5 segue che  $\beta(t, \cdot) = \tilde{\beta}(t, \cdot)$  per ogni  $t \in S$  (e la stessa uguaglianza è ovvia se  $t \in T \setminus S$ ) e quindi  $\beta = \tilde{\beta}$ . Pertanto dal Teorema 1.0 a) (applicato su  $V$ ) si ottiene che da (3.0.2) segue (3.2.1), da (3.1.0) segue (3.2.2) e da (3.1.2) segue (3.2.3). D'altra parte, poiché  $\tilde{\psi} \leq \psi$ ,  $\tilde{\psi}_0 \leq \psi_0$ ,  $\tilde{\psi}_1 \leq \psi_1$ , si ha subito che (3.2.1) implica (3.0.2), (3.2.2) implica (3.1.0), (3.2.3) implica (3.1.2). Quindi la tesi segue dal Teorema 3.0 e dal Corollario 3.1.

**3.3 TEOREMA.** Siano  $T, S, X, \mathcal{R}_R, \mathcal{B}, \mathcal{A}_R(\mathcal{B}), \alpha, \beta, \gamma$  (relativi a  $W = \mathbf{R}$ ) come nel Teorema 3.0,  $\psi_0$  come nel Corollario 3.1,  $\beta(t, \cdot)$  sia debolmente crescente per ogni  $t \in T$ ,  $E \subset \mathbf{R}$ ,  $\psi_E: T \times \mathbf{R} \rightarrow [-\infty, +\infty]$  sia tale che

$$\psi_E(t, w) = \begin{cases} \psi_0(t, w) & \text{se } (t, w) \in T \times E \\ +\infty & \text{se } (t, w) \in T \times (\mathbf{R} \setminus E) \end{cases}.$$

Allora, utilizzando per  $\psi_E$  la notazione dell'Osservazione 0.6, se

$$(3.3.0) \quad \text{per ogni } t \in T \text{ esiste } k_t \in \mathbf{R} \text{ tale che } k_t \leq \alpha(t, \cdot)|_{(D, \cdot)},$$

si ha che  $\tilde{\psi}_E(t, \cdot)|_E$  è debolmente crescente per ogni  $t \in T$  ed inoltre se vale (3.2.0) risulta che (3.0.3) del Teorema 3.0 implica

$$(3.3.1) \quad (\tilde{\psi}_E, \beta) \in M(\mathcal{R}_R, T \times \mathbf{R}, \mathcal{A}_R(\mathcal{B}));$$

viceversa, se  $\gamma(D_\gamma) \subset E$ , si ha che (3.3.1) implica (3.0.3) del Teorema 3.0.

**DIMOSTRAZIONE.** Dalle ipotesi segue che

$$k_t \leq \psi_0(t, \cdot) \quad \text{per ogni } t \in T$$

e dalla debole crescenza di  $\beta(t, \cdot)$  ( $t \in T$ ) segue che  $\psi_0(t, \cdot)$  è debolmente crescente per ogni  $t \in T$ .

Utilizzando allora [BA 3] (Teorema 0.5 a)) si ottiene che  $\widetilde{\psi}_E(t, \cdot)|_E$  è debolmente crescente per ogni  $t \in T$ .

Inoltre, se vale (3.2.0), poiché per il Corollario 3.2 b) si ha che (3.0.3) implica (3.2.2) e visto che  $\widetilde{\psi}_E \geq \widetilde{\psi}_0$  (si è sfruttata per  $\psi_0$  la notazione dell'Osservazione 0.6), da (3.0.3) segue (3.3.1).

Sia ora  $\gamma(D_\gamma) \subset E$  e valga (3.3.1). Tenendo conto del fatto che

$$\widetilde{\psi}_E|_{T \times E} \leq \psi_E|_{T \times E} = \psi_0|_{T \times E} = \psi|_{T \times E},$$

ove  $\psi$  è relativa alla multiapplicazione  $\Sigma_0$  definita nella dimostrazione del Corollario 3.1 a), si ha che esiste  $T_0 \subset T$  con  $T \setminus T_0 \in \mathcal{S}$  tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $b_\varepsilon \in \mathcal{B}$  per cui valga (3.0.5) per ogni  $(t, w) \in \text{dom}(-\beta) \cap \text{dom} \psi \cap ((\text{dom } b_\varepsilon \cap T_0) \times E)$  e quindi (3.0.6) per ogni  $(t, x) \in D_\gamma \cap ((\text{dom } b_\varepsilon \cap T_0) \times X)$  con  $(t, \gamma(t, x)) \in \text{dom}(-\beta) \cap \text{dom} \psi$  (e quest'ultima condizione equivale a dire che  $(t, \gamma(t, x)) \in \text{dom}(-\beta) \cap \text{dom} \psi_0$ , essendo  $\gamma(D_\gamma) \subset E$ ) e vale (3.1.1), per cui vale (3.0.3).

**3.4 TEOREMA.** Siano  $T$  insieme,  $\mathcal{L}$   $\sigma$ -algebra su  $T$ ,  $\mu: \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  misura  $\sigma$ -finita e completa,  $(X, \rho)$  spazio topologico susliniano,  $\alpha, \beta, \gamma$  (relative a  $W = \mathbf{R}$ ) come nel Teorema 3.0,  $\psi_0$  come nel Corollario 3.1,  $E \subset \mathbf{R}$  tale che  $E$  e  $\mathbf{R} \setminus E$  siano unioni numerabili di intervalli (anche degeneri) di  $\mathbf{R}$ ,  $\psi_E$  come nel Teorema 3.3,  $\beta(t, \cdot)$  sia strettamente crescente per ogni  $t \in T$ ,  $D_\gamma \in \mathcal{L} \times \mathcal{B}(\rho)$ ,  $\alpha$  sia  $(\mathcal{L} \times \mathcal{B}(\rho))$ -misurabile,  $\gamma$  sia  $(\mathcal{L} \times \mathcal{B}(\rho))|_{D_\gamma}$ -misurabile, esista  $k: T \rightarrow \mathbf{R}$  funzione  $\mathcal{L}$ -misurabile tale che

$$\alpha(t, x) \geq k(t) \quad \text{per ogni } (t, x) \in T \times X.$$

Allora, utilizzando per  $\psi_0$  e  $\psi_E$  la notazione dell'Osservazione 0.6, risulta che  $\widetilde{\psi}_0$  e  $\widetilde{\psi}_E$  sono integrande normali (cfr. Definizione 0.2).

**DIMOSTRAZIONE.** Basta provare la tesi per  $\widetilde{\psi}_E$ , in quanto  $\widetilde{\psi}_0 = \widetilde{\psi}_R$ . Sia  $\Sigma: T \times \mathbf{R} \rightarrow 2^X$  la multiapplicazione tale che

$$\Sigma(t, w) = \begin{cases} \{x \in X: (t, x) \in D_\gamma, \gamma(t, x) \geq w\} & \text{se } (t, w) \in T \times E \\ \emptyset & \text{se } (t, w) \in T \times (\mathbf{R} \setminus E) \end{cases}$$

Allora, tenendo conto della stretta crescita di  $\beta(t, \cdot)$  ( $t \in T$ ), si ha che

$$\psi_E(t, w) - k(t) = \inf \{ \alpha(t, x) - k(t) : x \in \Sigma(t, w) \} \quad \text{per ogni } (t, w) \in T \times \mathbf{R}.$$

D'altra parte per [BA 2] (Osservazione 1.10) e per [CV] (Cap. III, Teorema 23) si ha che  $\alpha - k \circ pr_T$  e  $\Sigma$  verificano le ipotesi del Teorema 1.9 di [BA 2]. Utilizzando [BA 2] (Teorema 1.9), [CV] (Cap. VII, dimostrazione del Corollario 2) e b) del Lemma 1.2 di [BA 2] si ottiene che  $\widetilde{\psi}_E = (\psi_E - k \circ pr_T) + k \circ pr_T$  è un'integranda normale.

**3.5 OSSERVAZIONE.** Sfruttando alcuni fatti provati in [BA 4], si possono ottenere risultati analoghi a quelli del Teorema 3.0 e dei Corollari 3.1 e 3.2 relativamente a maggiorazioni funzionali considerate rispetto a classi funzionali più generali delle  $\mathcal{C}_X(\mathcal{B})$  e  $\mathcal{C}_W(\mathcal{B})$  ivi utilizzate.

Entrando più in dettaglio: siano  $T, S, X, W, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_W, \alpha, \beta, \gamma, \Sigma, \delta, \psi$  come nel Teorema 3.0,  $\psi_0$  e (se  $(W, \leq)$  è parzialmente ordinato)  $\psi_1$  come nel Corollario 3.1, siano  $\mathcal{C}_X \subset \mathcal{X}(T \times X)$ ,  $\mathcal{C}_W \subset \mathcal{X}(T \times W)$ ,  $S$  sia un anello ed  $\alpha$  sia non negativa; allora il Teorema 3.0, i Corollari 3.1 e 3.2 e [BA 4] (Corollari 1.6 a), 1.6 b) e 1.12) permettono di fornire condizioni sufficienti (che vengono espresse mediante l'esistenza di una classe  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}(T)$  verificante opportune ipotesi, insieme alle classi  $\mathcal{C}_X(\mathcal{B})$  e  $\mathcal{C}_W(\mathcal{B})$  considerate nel Teorema 3.0 ed alle applicazioni  $\alpha, \beta, \gamma$ ) perché le seguenti sette condizioni siano fra esse equivalenti:

$$(3.5.0) \quad (\psi, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W)$$

$$(3.5.1) \quad (\alpha, \delta) \in M(\mathcal{R}_X, T \times X, \mathcal{C}_X)$$

$$(3.5.2) \quad (\psi_0, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W)$$

$$(3.5.3) \quad (\psi_1, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W)$$

$$(3.5.4) \quad (\widetilde{\psi}, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W)$$

$$(3.5.5) \quad (\widetilde{\psi}_0, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W)$$

$$(3.5.6) \quad (\widetilde{\psi}_1, \beta) \in M(\mathcal{R}_W, T \times W, \mathcal{C}_W).$$

Infatti: se vale (1.6.2) di [BA 4] (ove si sostituiscono a  $X, \mathcal{C}, h$  rispettivamente  $W, \{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{C}_W\}, \beta|_{\text{dom}(-\beta)}$ ), per il Corollario 1.6 b) di [BA 4] e tenendo conto del fatto che dalla non negatività di  $\alpha$  e da [ET] (Cap. I, Proposizione 4.1) segue la non negatività di  $\psi, \psi_0, \psi_1, \widetilde{\psi}, \widetilde{\psi}_0, \widetilde{\psi}_1$ , risulta che le condizioni (3.5.0), (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5), (3.5.6) implicano rispettivamente le condizioni (3.0.2), (3.1.0), (3.1.2), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3); se vale (1.6.0) di [BA 4] (ove si sostituiscono a  $Z, g, \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{B}$  ri-

spettivamente  $T \times X$ ,  $\alpha|_{\text{dom } \alpha}$ ,  $\{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{A}_X(\mathcal{B})\}$ ,  $\mathcal{R}_X$ ,  $\{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{A}_X\}$ ), per il Corollario 1.6 a) di [BA 4] risulta che (3.0.3) implica (3.5.1); se vale (1.6.2) di [BA 4] (ove si sostituiscano ad  $\mathcal{A}$ ,  $h$  rispettivamente  $\{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{A}_X\}$ ,  $\mathcal{I}|_{\text{dom}(-\mathcal{I})}$ ), per il Corollario 1.6 b) di [BA 4] risulta che (3.5.1) implica (3.0.3); se valgono (1.12.0) e (1.12.2) di [BA 4] (ove si sostituiscano a  $Z$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $k$  rispettivamente  $T \times W$ ,  $\{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{A}_W(\mathcal{B})\}$ ,  $\{a|_{\text{dom } a} : a \in \mathcal{A}_W\}$ ,  $\mathcal{R}_W$ ,  $\beta|_{\text{dom } \beta}$ ), per il Corollario 1.12 di [BA 4] risulta che le condizioni (3.0.2), (3.1.0), (3.1.2), (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) implicano rispettivamente le condizioni (3.5.0), (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5), (3.5.6).

Quindi, se valgono anche le ipotesi del Teorema 3.0 e dei Corollari 3.1 e 3.2, si ottengono le equivalenze volute.

**3.6 TEOREMA.** Siano  $T$ ,  $X$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (relativi a  $W = \mathbf{R}$ ) come nel Teorema 3.0,  $E \subset \mathbf{R}$ ,  $\psi_E$  come nel Teorema 3.3,  $\beta(t, \cdot)$  sia strettamente crescente per ogni  $t \in T$ , valga (3.3.0) e sia  $\gamma(D_\gamma) \subset E$ . Allora:

a)  $\psi_E(t, w) = \overline{\psi_E}(t, w)$  per ogni  $(t, w) \in T \times E$ , ove  $\overline{\psi_E}: T \times E \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ ,  $\overline{\psi_E}(t, w) = \sup\{\mathcal{I}(t, w) : \mathcal{I} \text{ verifica (3.6.0)}\}$  per ogni  $(t, w) \in T \times E$ ,

$$(3.6.0) \quad \mathcal{I}: T \times E \rightarrow ]-\infty, +\infty],$$

$\mathcal{I}(t, \cdot)$  debolmente crescente per ogni  $t \in T$ ,

$$\mathcal{I}(t, \gamma(t, x)) \leq \alpha(t, x) \text{ per ogni } (t, x) \in D_\gamma \cap (T \times X);$$

b) se  $E$  è un intervallo chiuso, utilizzando per  $\psi_E$  la notazione dell'Osservazione 0.6, si ha che:

$$\widetilde{\psi_E}(t, w) = \overline{\overline{\psi_E}}(t, w) \quad \text{per ogni } (t, w) \in T \times E,$$

ove  $\overline{\overline{\psi_E}}: T \times E \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ ,  $\overline{\overline{\psi_E}}(t, w) = \sup\{\mathcal{I}(t, w) : \mathcal{I} \text{ verifica (3.6.0) e (3.6.1)}\}$  per ogni  $(t, w) \in T \times E$ ,

$$(3.6.1) \quad \mathcal{I}(t, \cdot): E \rightarrow ]-\infty, +\infty] \text{ convessa e s.c.i. per ogni } t \in T.$$

**DIMOSTRAZIONE.** a) Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 3.3 e per (3.1.1) si ha che  $\psi_E|_{T \times E}$  verifica (3.6.0) e quindi per concludere basta provare che  $\overline{\psi_E} \leq \psi_E|_{T \times E}$ . Se  $(t, w) \in T \times E$  e se  $x \in X$  è tale che  $(t, x) \in D_\gamma$  e  $\gamma(t, x) \geq w$  allora

$$\overline{\psi_E}(t, w) \leq \overline{\psi_E}(t, \gamma(t, x)) \leq \alpha(t, x),$$

ove si è tenuto conto del fatto che  $\overline{\psi_E}$  verifica (3.6.0); pertanto, tenendo conto che per la stretta crescenza di  $\beta(t, \cdot)$  ( $t \in T$ ) risulta  $\psi_E(t, w) =$

=  $\inf \{ \alpha(t, x) : x \in X \text{ per cui } (t, x) \in D, \text{ e } \gamma(t, x) \geq w \}$  per ogni  $(t, w) \in T \times E$ , si conclude.

b) Tenendo conto del Teorema 3.3 e del fatto che  $\widetilde{\psi}_E \leq \psi_E$ , si ha che  $\widetilde{\psi}_E|_{T \times E}$  verifica (3.6.0) e (3.6.1). Pertanto basta provare che  $\overline{\overline{\psi}}_E \leq \widetilde{\psi}_E|_{T \times E}$ . Poiché  $\overline{\overline{\psi}}_E$  verifica (3.6.0), risulta che  $\overline{\overline{\psi}}_E \leq \overline{\psi}_E$  e quindi, visto che  $\overline{\overline{\psi}}_E(t, \cdot)$  è convessa e s.c.i. per ogni  $t \in T$ , si ha che

$$\overline{\overline{\psi}}_E(t, \cdot) \leq \left( w \in \mathbf{R} \mapsto \begin{cases} \overline{\psi}_E(t, w) & \text{se } w \in E \\ +\infty & \text{se } w \in \mathbf{R} \setminus E \end{cases} \right)^{**} \Big|_E = \widetilde{\psi}_E(t, \cdot)|_E$$

per ogni  $t \in T$  (si è tenuto conto del Teorema 0.5 e della a)).

3.7 OSSERVAZIONE. Il Teorema 3.0 ed il Corollario 3.1 hanno utilità per passare da una condizione del tipo di quella definita (per una funzione  $g$ ) nel n. 0.7 a) per funzioni definite su  $T \times X$  ad una condizione analoga per funzioni definite su  $T \times W$  e viceversa.

Avrebbe allora interesse, ad esempio quando si volesse applicare questo tipo di risultati al calcolo delle variazioni, sapere che, se  $W$  è chiuso e convesso di uno spazio  $V$  vettoriale topologico su  $\mathbf{R}$  localmente convesso  $T_2$ , la funzione  $\psi$  che si associa ad  $\alpha$  è convessa nella seconda variabile. Ma questo in generale non è vero, neanche se  $X$  è anch'esso uno spazio vettoriale topologico su  $\mathbf{R}$  localmente convesso  $T_2$  e  $\alpha(t, \cdot)$  è convessa per ogni  $t \in T$ , come si può vedere con il seguente esempio.

Siano  $S$  tale che  $T \notin S$ ,  $W = [0, +\infty[$ ,  $X = V = \mathbf{R}$ ,  $\Sigma(t, w) = \{x \in \mathbf{R} : |x| \geq w\}$  per ogni  $(t, w) \in T \times [0, +\infty[$ ,

$$\alpha(t, x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -2x - 2 & \text{se } x < -1 \end{cases} \quad \text{per ogni } t \in T.$$

Allora

$$\inf \{ \alpha(t, x) : x \in \mathbf{R} \text{ per cui } |x| \geq w \} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq w \leq 1 \\ 2w - 2 & \text{se } 1 < w \leq 2 \\ w & \text{se } w > 2 \end{cases}$$

per ogni  $t \in T$ .

Si può comunque ovviare all'inconveniente, nel caso in cui esista  $S \subset T$  tale che  $\text{dom}(-\beta) = S \times W$ , per ogni  $t \in S$  esista  $\beta^t : V \rightarrow \mathbf{R}$  affine e continua tale che  $\beta^t(w) \leq \beta(t, w)$  per ogni  $w \in W$  e  $\beta(t, \cdot)$  sia convessa a s.c.i. ( $t \in S$ ), considerando, in luogo di  $\psi$ , la funzione il cui valore in

$(t, w) \in T \times W$  è

$$\left( v \in V \mapsto \begin{cases} \inf \{ \alpha(t, x) : x \in \Sigma(t, v) \} & \text{se } v \in W \\ +\infty & \text{se } v \in V \setminus W \end{cases} \right)^{**} (w),$$

così come è stato fatto nel Corollario 3.2.

### BIBLIOGRAFIA

- [BA 1] BOTTARO ARUFFO A., *Su alcune estensioni del teorema di Scorza Dragoni*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5), 9 (1985), pp. 87-202.
- [BA 2] BOTTARO ARUFFO A., *( $\mathcal{L} \times \mathcal{B}(\rho)$ )-misurabilità e convergenza in misura*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 118 (1984), pp. 203-246.
- [BA 3] BOTTARO ARUFFO A., *Maggiorazioni funzionali*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5), 14 (1990), pp. 17-56.
- [BA 4] BOTTARO ARUFFO A., *Confronto di maggiorazioni funzionali*, di prossima pubblicazione su Ann. Mat. Pura Appl.
- [BA 5] BOTTARO ARUFFO A., *Generalizzazioni di condizioni di Nagumo*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, 123 (1989), pp. 123-163.
- [BA 6] BOTTARO ARUFFO A., *Estensioni di un teorema di De La Vallée Poussin*, Ricerche Mat., 39 (1990), pp. 191-219.
- [BA 7] BOTTARO ARUFFO A., *Un confronto fra le maggiorazioni funzionali ed una condizione che si esprime mediante la coniugata di Fenchel*, di prossima pubblicazione su Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 60 (1990).
- [BL] BERLIOCCI H. - LASRY J. M., *Intégrales normales et mesures paramétrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France, 101 (1973), pp. 129-184.
- [CS] CESARI L. - SURYANARAYANA M. B., *On Recent Existence Theorems in the Theory of Optimization*, J. Optim. Theory Appl., 31 (1980), pp. 397-415.
- [CV] CASTAING C. - VALADIER M., *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Math., n. 580, Springer (1977).
- [ET] EKELAND I. - TEMAM R., *Analyse convexe et problèmes variationnelles*, Dunod, Gauthier-Villars (1974).
- [K] KELLEY J. L., *General Topology*, Springer (1955).

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 ottobre 1989 e, in forma revisionata il 20 aprile 1990.