

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO SÁNCHEZ PEREGRINO

**Série de Poincaré pour certaines courbes**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 85 (1991), p. 249-263

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1991\\_\\_85\\_\\_249\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1991__85__249_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Série de Poincaré pour certaines courbes.

ROBERTO SÁNCHEZ PEREGRINO (\*)

ABSTRACT - Let  $p$  be a fixed prime and  $f(x, y)$  be a polynomial with coefficients in  $\mathbb{Z}_p$ . Let  $C_n$  denote the number of solutions of  $f = 0$  over the ring  $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , and  $P_f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i$  be the corresponding Poincaré series. An algebraic-combinatorial approach is given for computing  $C_n$  and  $P_f(t)$  with  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta y^b$ ,  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta xy^b$  and  $f(x, y) = \alpha x^a y + \beta xy^b$ .

### 1. - Introduction.

Soient  $p$  un nombre premier et  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{Z}_p$ . Nous définissons

$$C_n = \text{Card} \{x \bmod p^n \mid f(x) \equiv 0 \bmod p^n\}.$$

Pour pouvoir comprendre le comportement de  $C_n$  on introduit la série de Poincaré:

$$(1) \quad P_f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^i.$$

Cette série a été définie par Borevich et Shafarevich [B-S]. C'est l'analogue de la fonction Zeta. Attachée à  $f$  sur un corps fini Borevich et Shafarevich ont posé la question suivante:  $P_f(t)$  est-elle une fonction rationnelle? En 1973 J. I. Igusa a répondu par l'affirmative à cette question dans ses articles [I].

D. Meuser [M] a donné des explications sur les pôles de  $P_f(t)$  quand  $f = 0$  représente un germe de courbe absolument irréductible et finale-

(\*) Indirizzo dell'A.: Università di Padova, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italia.

Recherche soutenue par: Consiglio Nazionale delle Ricerche, Rome.

ment F. Loeser [L] a généralisé le travail de Meuser et a fait la liaison avec le polynôme de Bernstein de  $f$ .

Tous ces travaux ont été faits en utilisant la résolution des singularités de l'hypersurface définie par  $f$ .

Jay R. Goldman a utilisé des méthodes combinatoires et a calculé directement la série de Poincaré, d'abord pour un polynôme homogène [G1] et après pour une fonction du type  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta y^b$  [G2]. Nous continuons l'analyse de Goldman pour les fonctions  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta xy^b$  et  $f(x, y) = \alpha x^a y + \beta xy^b$ . En fait nous obtenons une formule (Théorème 1 ci-dessous), un peu différente de celle affirmée et (non démontrée) dans les lignes qui suivent l'énoncé du Théorème 1 de [G2]. Notre formule coïncide avec les énoncés des théorèmes de la sections 3 de [G1] et de la sections 2 de [G2], et les unifie, quand il est possible. Dans la section 2 nous rappelons en bref une petite partie des résultats de Goldman sur la fonction  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta y^b$ . Dans la section 3 nous reprenons les calculs de Goldman et nous obtenons le nouveau énoncé [voir Théorème 1 ci-dessous]. Les sections 4 et 5 sont dédiées au même calcul précédant pour les fonctions  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta xy^b$  et  $f(x, y) = \alpha x^a y + \beta xy^b$ . Je tiens à exprimer ma gratitude au Professeur F. Napolitani pour son aide devant le CNR, aux Géomètres du «Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Padova», et en particulier, je voudrais remercier le Professeur F. Baldassarri, pour son aide et son conseil pendant la préparation de ce travail.

## 2. – Rappel.

Pour chaque  $x \in \mathbb{Z}_p$  il existe une unique suite  $(b_n)_{n \geq 0}$   $0 \leq b_n \leq p - 1$ , telle que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n p^n$ , converge vers  $x$ . Cette série est appelée Développement de Hensel de  $x$ . Nous notons aussi  $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k p^k \in [0, \dots, p^n - 1]$  et nous avons que la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$ , converge vers  $x$ .

**DÉFINITION 1.** Soient  $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^k$ ,  $f(\bar{x}) \equiv 0 \pmod{p^n}$  et  $l \leq n$ . Si  $\bar{x}' \in (\mathbb{Z}/p^l \mathbb{Z})^k$  est tel que  $f(\bar{x}') \equiv 0 \pmod{p^l}$ ,  $\bar{x} \equiv \bar{x}' \pmod{p^l}$ , nous dirons que  $\bar{x}$  est une solution de  $f \equiv 0 \pmod{p}$  provenant de  $\bar{x}'$ .

**DÉFINITION 2.** Une solution  $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^k$  de  $f \equiv 0 \pmod{p}$  est *non singulière* si les dérivées partielles  $f_{x_i}(\bar{x})$  ne sont pas toutes nulles mod  $p$ . Dans le cas contraire nous dirons que  $\bar{x}$  est une solutions *singulière*.

LEMME 1. Soit  $f$  un polynôme dans  $Z_p[x_1, x_2, \dots, x_k]$  et  $\bar{x} \in (Z/pZ)^k$  une solution non singulière de  $f \equiv 0 \pmod{p}$ . Alors il existe dans  $(Z/p^n Z)^k$   $p^{(n-1)(k-1)}$  solutions provenant de  $\bar{x}$  de

$$f \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

LEMME 2. Soient  $n, a \in \mathbb{N}$  et  $w$  le plus petit entier plus grand que  $n/a$ . Alors  $w = (n + a - i)/a$  où  $n \equiv i \pmod{a}$  et  $0 < i \leq a$ .

3. -  $f(x, y) = \alpha x^a + \beta y^b$ .

Dans cette section nous nous proposons de calculer, la série de Poincaré pour la fonction:

$$f(x, y) = \alpha x^a + \beta y^b, \quad a, b \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \alpha, \beta \text{ étant des unités } p\text{-adiques.}$$

Nous définissons:  $d = (a, b)$ ,  $w_1 = b/d$ ,  $w_2 = a/d$ ,  $w_3 = ab/d$ ,  $a \neq 2$ ,  $b \neq 2$ ,  $C_0 = 1$ , et pour tout  $n > 0$ .

$$(2) \quad C_n = \text{Card} \{ (x, y) \in (Z/p^n Z)^2 \mid f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n} \}.$$

THÉORÈME 1. Soient  $f, w_1, w_2, w_3$  et  $C_n$  définis comme ci-dessus, alors nous avons:

(I) Valeurs de  $C_n$

$$(3) \quad C_n = (C_1 - 1)p^{n-1} + p^{(n/w_3)(2w_3 - w_1 - w_2)} p^{(-2w_3 + w_1j + w_2s)/w_3} + \\ + (C_1 - 1)p^{w_3 - w_1 - w_2} p^{n-1} \left( \frac{p^{(w_3 - w_1 - w_2)((n-i)/w_3)} - 1}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1} \right)$$

où  $n \equiv j \pmod{a}$ ,  $1 \leq j \leq a$ ,  $n \equiv s \pmod{b}$ ,  $1 \leq s \leq b$  et  $n \equiv i \pmod{w_3}$ ,  $1 \leq i \leq w_3$ .

(II) Pour tout  $n > 0$

$$(4) \quad C_{n+w_3} = Cp^{n-1} + p^{2w_3 - w_1 - w_2} C_n \quad \text{où} \quad C = (C_1 - 1)p^{w_3}.$$

(III) La série de Poincaré  $P_f(t)$  est donnée par:

$$(5) \quad P_f(t) = \frac{Ct^{w_3+1} + (1-pt) \left( \sum_{i=0}^{w_3} C_i t^i - p^{2w_3 - w_1 - w_2} t^{w_3} \right)}{(1-pt)(1 - p^{2w_3 - w_1 - w_2} t^{w_3})}.$$

REMARQUE 1. La démonstration donnée ci-dessous est à quelques détails près, identique à celle de Goldman [G2].

REMARQUE 2. Dans le cas  $a = b$ , les formules (I) et (II) donnent le même résultat qui a donné Goldman [G1] page 588, formules 3 et 4. Si  $d > 1$  nos formules sont un peu différentes du résultat qu' a donné Goldman [G2] page 69. Evidement si  $d = 1$  c'est la même chose.

REMARQUE 3. Pour cas  $a = 2$  et  $b = 2$ , voir Goldmann [G1].

DÉMONSTRATION. Soit:

$$(6) \quad C_n = N_n + S_n.$$

Où  $N_n$  c'est le nombre de solutions de  $f(x, y) = 0 \pmod{p}$  non singulières provenant des solutions non singulières  $\pmod{p}$ , et  $S_n$  le nombre de solutions  $\pmod{p^n}$  provenant de  $(0, 0)$  qui est l'unique solution singulière.

D'après le Lemme 1 nous avons:

$$(7) \quad N_n = (C_1 - 1)p^{n-1}.$$

Pour le calcul de  $S_n$  nous utilisons le représentation de Hensel de  $x \in \mathbb{Z}_p$ , donc soit  $(x, y)$  une solution  $\pmod{p^n}$  de  $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$  provenant de  $(0, 0)$ . C'est-à-dire  $x = p^k \bar{x}$ ,  $\bar{x} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ,  $y = p^l \bar{y}$ ,  $\bar{y} \not\equiv 0 \pmod{p}$ ; nous appelons  $k$  (resp  $l$ ) ord  $x$  (resp ord  $y$ ), et nous avons:

$$(8) \quad f(x, y) = \alpha p^{ka} \bar{x}^a + \beta p^{lb} \bar{y}^b \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

Pour le cas  $n = 1$ , nous savons qu'il  $y$  a une seule solution singulière, donc  $S_1 = 1$ ; pour le cas restant,  $n > 1$ , nous ferons le calcul par étapes.

1) Soient  $ak \geq n$ ,  $bl \geq n$ , alors quelque soit le couple  $(x, y)$ , avec ces conditions nous avons une solutions de (8). Il suffit donc de calculer le nombre de couples ayant ces propriétés.

Nous calculons le nombre de  $x \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  tels que  $a \cdot \text{ord } x = ak \geq n$ . Soit  $w$  le plus petit entier tel que  $w \geq n/a$  et  $x = a_w p^w + a_{w+1} p^{w+1} + \dots + a_{n-1} p^{n-1}$ ; nous avons  $n - w$  coefficients qui peuvent prendre des valeurs entre 0 et  $p - 1$ , par consequence  $p^{n-w}$  est le nombre de  $x$  avec la propriété  $a \cdot \text{ord } x \geq n$ . D'après le lemme [2]  $w = (n + a - j)/a$  où  $n \equiv j \pmod{a}$ , alors  $p^{n((a-1)/a) - (a-j)/a}$  est le nombre de  $x$  tels que  $\alpha x^a \equiv 0 \pmod{p^n}$  et  $a \cdot \text{ord } x \geq n$ . De même nous avons que  $p^{n((b-1)/b) - (b-s)/b}$  est le nombre de  $y \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  tels que  $\beta y^b \equiv 0 \pmod{p^n}$ ,  $b \cdot \text{ord } y \geq n$ ,  $n \equiv s \pmod{b}$ , où  $y = b_w p^w + b_{w+1} p^{w+1} + \dots + b_{n-1} p^{n-1}$ .

Donc le nombre de couples  $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^2$  satisfaisant (8) est

$$(9) \quad p^{n((a-1)/a) + (a-j)/a} p^{n((b-1)/b) + (b-s)/b} = \\ = p^{n/w_3(2w_3 - w_1 - w_2) - (2w_3 - w_2s - w_1j)/w_3}.$$

REMARQUE 3. Jusqu'ici nous avons la même démonstration que dans le cas  $d = 1$  (cf. [G2]).

2) Supposons à présent  $ak < n$ ,  $bl < n$ . Soit

$$f(x, y) = \alpha p^{ka} \bar{x}^a + \beta p^{lb} \bar{y}^b \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

Donc  $\alpha p^{ka} \bar{x}^a + \beta p^{lb} \bar{y}^b = p^n \tau$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ , et alors  $p^{ka} | p^{lb} \Rightarrow ka \leq lb$ . Nous avons aussi  $lb \leq ka$ ; nous notons  $h = ka = lb$ . Alors  $f(x, y) = \alpha \bar{x}^a + \beta \bar{y}^b \equiv 0 \pmod{p^{n-h}}$ , c'est-à-dire

$f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$  (x, y) solution singulière  $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0 \pmod{p^{n-h}} (\bar{x}, \bar{y}) \text{ solution non-singulière.}$$

En réduisant les solutions singulières  $(x, y) \pmod{p^n}$  en des solutions non-singulières  $(\bar{x}, \bar{y}) \pmod{p^{n-h}}$  nous définissons une application  $(x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$  qui n'est peut être pas injective. D'autre part, d'après le Lemme 2 le nombre de solutions non-singulières de  $f(\bar{x}, \bar{y}) \equiv 0 \pmod{p^{n-h}}$  est égal à

$$(10) \quad (C_1 - 1) p^{n-h-1}.$$

Dans le développement  $x$ :

$$x = a_k p^k + a_{k+1} p^{k+1} + \dots + a_{n-1} p^{n-1} = \\ = p^k (a_k + a_{k+1} p^1 + \dots + a_{n-1} p^{n-k-1})$$

nous avons  $(n-k-1) - (n-ak-1) = (a-1)k$  coefficients  $a_i \equiv 0 \pmod{p^{n-ak}}$ . Donc nous pouvons choisir  $p^{(a-1)k}$  valeurs  $x \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  qui se réduisent au même  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/p^{n-ak} \mathbb{Z}$ , ainsi que  $p^{(b-1)k}$  valeurs  $y \in \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$  qui se réduisent au même  $\bar{y} \in \mathbb{Z}/p^{n-bl} \mathbb{Z}$ .

Il s'en suit que  $(C_1 - 1) p^{n-h-1} p^{(a-1)k} p^{(b-1)l}$  est le nombre de solutions  $(x, y)$  de  $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$  provenant de  $(0, 0) \pmod{p}$ , avec les propriétés  $ak = bl = h < n$ .

En prenant la somme des  $(C_1 - 1) p^{n-h-1} p^{(a-1)k} p^{(b-1)l}$  sur toutes les valeurs possibles de  $h$ , nous obtenons  $\tilde{S}_n$ , le nombre de  $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^2$ , solutions singulières de  $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$  avec

$ak < n$  et  $bl < n$ . Or,  $h > 0$ , car  $(x, y)$  provient de  $(0, 0)$ . Comme  $h = ak = bl$ , nous obtenons  $w_3 | h$ .

Alors:  $h = w_3 r$ ,  $r \in \mathbb{N}$  et

$$(11) \quad \tilde{S}_n = \sum_r (C_1 - 1) p^{n-1} p^{((w_3 - w_1 - w_2)/w_3)w_3 r}$$

pour  $r$  allant de 1 à  $(n-i)/w_3$  où  $n \equiv i \pmod{w_3}$ ,  $i \in [1, 2, \dots, w_3]$ , donc:

$$\tilde{S}_n = \frac{(C_1 - 1) p^{n-1} p^{w_3 - w_1 - w_2} (p^{(w_3 - w_1 - w_2)((n-i)/w_3)} - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1}.$$

Et (d'après (6), (7), (9) et (11)), nous avons:

$$C_n = (C_1 - 1) p^{n-1} + p^{n/w_3(w_3 - w_1 - w_2) - (2w_3 - w_2 s - w_1 j)/w_3} + \tilde{S}_n.$$

Cela prouve la première partie du théorème.

LEMME 3. Avec les mêmes notations que ci-dessus nous avons:

$$(12) \quad \tilde{S}_{n+w_3} = p^{2w_3 - w_1 - w_2} ((C_1 - 1) p^{n-1} + \tilde{S}_n).$$

DÉMONSTRATION. Dans la définition de  $\tilde{S}_{n+w_3}$  et  $\tilde{S}_n$  nous pouvons utiliser le même  $i$ , et la vérification du lemme est juste les calculs suivantes:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n+w_3} &= \frac{(C_1 - 1) p^{n+w_3-1} p^{w_3 - w_1 - w_2} (p^{w_3 - w_1 - w_2} ((n+w_3-i)/w_3) - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1} = \\ &= \frac{(C_1 - 1) p^{n+w_3-1} p^{2(w_3 - w_1 - w_2)} (p^{(w_3 - w_1 - w_2)(n-i)/w_3} - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1} + \\ &+ \frac{(C_1 - 1) p^{n+w_3-1} p^{w_3 - w_1 - w_2} (p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1} = \\ &= (C_1 - 1) p^{n-1} p^{2w_3 - w_1 - w_2} + \\ &+ \frac{(C_1 - 1) p^{n+w_3-1} p^{2(w_3 - w_1 - w_2)} (p^{w_3 - w_1 - w_2} ((n-i)/w_3) - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1} = \\ &= p^{2w_3 - w_1 - w_2} ((C_1 - 1) p^{n-1} + \tilde{S}_n). \end{aligned}$$

Maintenant nous en déduisons la deuxième partie du théorème.

$$\begin{aligned}
 C_{n+w_3} &= (C_1 - 1)p^{n+w_3-1} + \\
 &+ p^{(n+w_3)/w_3(2w_3-w_1-w_2) - (2w_3-w_2s-w_1j)/w_3} + \tilde{S}_{n+w_3} = \\
 &= (C_1 - 1)p^{n+w_3-1} + \\
 &+ p^{2w_3-w_1-w_2} p^{n/w_3(2w_3-w_1-w_2)} p^{(2w_3-w_1j-w_2s)/w_3} + \\
 &+ p^{2w_3-w_1-w_2} ((C_1 - 1)p^{n-1} + \tilde{S}_n) = (C_1 - 1)p^{n+w_3-1} + p^{2w_3-w_1-w_2} C_n.
 \end{aligned}$$

Nous calculons à présent la série de Poincaré.

$$\begin{aligned}
 P_f(t) - \sum_{i=0}^{w_3} C_i t^i &= \sum_{i=w_3+1}^{\infty} C_i t^i = \sum_{j=1}^{\infty} C_{j+w_3} t^{j+w_3} = \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} ((C_1 - 1)p^{j+w_3-1} + p^{2w_3-w_1-w_2} C_j) t^{j+w_3} = \\
 &= p^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} (C_1 - 1)(pt)^{j+w_3} + p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3} \sum_{j=1}^{\infty} C_j t^j = \\
 &= \frac{(C_1 - 1)p^{-1}(pt)^{w_3+1}}{1-pt} + p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3} (P_f(t) - 1).
 \end{aligned}$$

Finalement nous avons l'identité suivante:

$$P_f(y) = \frac{C t^{w_3+1} + (1-pt) \left( \sum_{i=0}^{w_3} C_i t^i - p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3} \right)}{(1-pt)(1-p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3})} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$$4. - f(x, y) = \alpha x^a + \beta xy^b.$$

Dans cette section nous nous proposons de calculer, la série de Poincaré pour la fonction:

$$f(x, y) = \alpha x^a + \beta xy^b, \quad a, b \not\equiv 0 \pmod{p} \quad \alpha, \beta \text{ étant des unités } p\text{-adiques.}$$

Nous définissons:  $d = (a-1, b)$ ,  $w_1 = b/d$ ,  $w_2 = (a-1)/d$ ,  $w_3 = ab/d$ ,



$b \neq 1$ ,  $C_0 = 1$ , et pour tout  $n > 0$

$$(13) \quad C_n = \text{Card} \{ (x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \mid f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n} \}.$$

**THÉOREME 2.2.** Soient  $f$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  et  $C_n$  définis comme ci-dessus, alors nous avons:

(I) Valeurs de  $C_n$ .

$$(14) \quad C_n = N_n + S_n(1) + S_n(2) + S_n(3) + S_n(4)$$

où  $N_n$  est le nombre de solutions non-singulières,

$$S_n = S_n(1) + S_n(2) + S_n(3) + S_n(4)$$

le nombre de solutions singulières provenant de  $(0, 0)$  et

$$S_n(1) = p^{n/w_3(2w_3-w_1-w_2)} p^{(i(w_1+w_2)-w_3(r+s+2))/w_3},$$

$$S_n(2) = \frac{(p-1)p^{n-1} p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)} (1-p^{s(b-1)})}{p^{1-b}-1},$$

$$S_n(3) = \frac{(p-1)p^{n-1} (1-p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)})}{p^{1-b}-1}$$

$$S_n(4) = \frac{(C_1-p)p^{n-1} p^{w_3-w_1-w_2} (p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)} - 1)}{p^{w_3-w_1-w_2}-1},$$

où

$$\begin{aligned} n &= vw_3 + i, & i &\in [1, 2, \dots, w_3], \\ i &= ra + j, & j &\in [1, 2, \dots, a], \\ i &= r + 1 + sb + \tau, & \tau &\in [1, 2, \dots, b], \quad \text{si } i > 1. \end{aligned}$$

Si  $i = 1$  nous définissons  $s = 0 = \tau$ .

(II) Formule de récurrence pour  $n > 0$

$$(15) \quad C_{n+w_3} = p^{n-1} C + p^{2w_3-w_1-w_2} C_n$$

où

$$C = (C_1 - 1)p^{w_3} + \frac{(p-1)(p^{w_3} - p^{2w_3-w_1-w_2})}{p^{1-b}-1} + (1-p)p^{2w_3-w_1-w_2}.$$

(III) Série du Poincaré  $P_f(t)$ 

$$(16) \quad P_f(t) = \frac{Ct^{w_3+1} + (1-pt) \left( \sum_{i=0}^{w_3} C_i t^i - p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3} \right)}{(1-pt)(1-p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3})}.$$

REMARQUE 4. 1) Le cas  $b=1$ , est traité à la fin de cet section,

2) la constante  $C$ , ne dépend pas de  $n$ .

DÉMONSTRATION. La démonstration de (II) et (III) est tout à fait analogue à la preuve du Théorème 1.

Pour démontrer (I), nous utilisons les idées et notations de la sections 3.

D'abord soit:

$$(17) \quad C_n = N_n + S_n.$$

D'après le Lemme 1 nous avons:

$$(18) \quad N_n = (C_1 - 1)p^{n-1}.$$

Pour calculer les valeurs de  $S_n$ , nous définissons  $x = p^k \bar{x}$ ,  $y = p^l \bar{y}$  et  $\bar{x}, \bar{y} \not\equiv 0 \pmod{p^n}$ , et nous avons:

$$(19) \quad f(x, y) = \alpha p^{ka} \bar{x}^a + \beta p^{k+lb} \bar{x} \bar{y}^b \equiv 0 \pmod{p^n}.$$

Si  $n=1$ , nous avons  $S_1=1$ , puisque  $(0,0)$  est l'unique solution singulière.

Regardons à present le cas  $n > 1$ .

1) Tout d'abord, si  $ak \geq n$  et  $k+lb \geq n$  le couple  $(x, y)$  ci-dessus est solution de (19).

Soit  $w_x$  le plus petit entier plus grand que  $n/a$ , d'après le Lemme 2 nous avons:

$$w_x = vw_1 + r + 1.$$

De même  $w_y = vw_2 + s + 1$ , est le plus petit entier plus grand que  $(n-w_x)/b$ .

Donc le nombre de couples  $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^2$ , tels que  $\text{ord } x = k \geq w_x$  et  $\text{ord } y = l \geq w_y$ , noté  $S_n(1)$  est égal à:

$$(20) \quad S_n(1) = p^{n-w_x} p^{n-w_y} = p^{n/w_3(2w_3-w_1-w_2)} p^{(i(w_1+w_2)-w_3(r+s+2))/w_3}.$$

Comme la valeur de  $(n-k)/b$  dépend de  $k$  nous sommes obligés de faire

le calcul pas à pas, pour les différentes valeurs de  $l > vw_2 + s + 1$ . Soit  $k = w_x + \theta$  avec

$$\theta \in [0, 1, \dots, \tau - 1, \tau, \dots, sb + \tau - 1, sb + \tau, \dots, n - vw_1 - r - 2].$$

Alors

$$l \geq vw_2 + \frac{i - r - 1 - \theta}{b} = vw_2 + \frac{sb + \tau - \theta}{b}.$$

2) Si  $\theta \in [0, 1, \dots, r - 1]$ , ils sont inclus dans les calculs (20).

2a) Soient  $s > 0$ , et  $\theta \in [r, \dots, sb + r - 1]$  et

$$(k, l) = (vw_1 + r + 1 + \tau + \rho b, vw_2 + s - \rho) \quad \text{avec } \rho = 0, 1, \dots, s - 1.$$

Donc le nombre de couples  $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$  tels que  $\text{ord } x \geq k$ ,  $\text{ord } y = l$ , est:

$$\begin{aligned} S_n(2) &= \sum_{\rho=0}^{s-1} p^{n-(w_1+r+1+\tau+\rho b)} (p-1) p^{n-(vw_2+s-\rho+1)} = \\ &= \frac{(p-1) p^{n-1} p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)} (1-p^{s(b-1)})}{p^{1-b}-1}. \end{aligned}$$

2b) Si  $s = 0$ , nous définissons:

$$(21) \quad S_n(2) = \frac{(p-1) p^{n-1} p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)} (1-p^{s(b-1)})}{p^{1-b}-1}.$$

2c) Soient:

$$(k, l) = (vw_1 + i + \rho b, vw_2 - \rho) \quad \text{tels que } \rho = 0, 1, \dots, vw_2 - 1,$$

donc le nombre de couples  $(x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2$  tels que  $\text{ord } x \geq k$ ,  $\text{ord } y = l$ , noté  $S_n(3)$  vaut:

$$\begin{aligned} (22) \quad S_n(3) &= \sum_{\rho=0}^{vw_2-1} p^{n-(vw_1+i+\rho b)} (p-1) p^{n-(vw_2-\rho+1)} = \\ &= \frac{(p-1) p^{n-1} (1-p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)})}{p^{1-b}-1}. \end{aligned}$$

3) Maintenant nous supposons que:

$$(23) \quad ak < n \quad k + lb < n.$$

Si nous faisons les mêmes calculs que 3. II, nous obtenons que le nombre:

$$(24) \quad (C_1 - p)p^{n-1-h} p^{(a-1)h/a} p^{(b-1)h+s/a} = (C_1 - p)p^{n-1} p^{((a-1)(b-1)/ab)h}$$

où  $h = ka = k + bl$  est le nombre de solutions  $(x, y)$  de  $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$ , provenant de  $(0, 0)$  avec les propriétés (23). Nous savons que  $h = w_3 j$  et  $j \in [1, 2, \dots, v]$ , et donc le nombre (24) s'écrit encore

$$(25) \quad Q_j = (C_1 - p)p^{n-1} p^{((w_3 - w_1 - w_2)/w_3)j}.$$

Nous définissons  $S_n(4)$ , comme la somme des  $Q_j$  pour  $j \in [1, 2, \dots, v]$ .  
Donc.

$$(26) \quad S_n(4) = \sum_{j=1}^v (C_1 - p)p^{n-1} p^{(w_3 - w_1 - w_2)j} = \\ = \frac{(C_1 - p)p^{n-1} p^{w_3 - w_1 - w_2} (p^{(n-i)/w_3(w_3 - w_1 - w_2)} - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1}.$$

Et (d'après (17), (18), (20), (21), (22) et (26)) nous avons:

$$C_n = N_n + S_n(1) + S_n(2) + S_n(3) + S_n(4) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour le cas  $b = 1$ , Le Théorème 2 équivant à

(I)

$$(27) \quad C_n = p^{n-1} \{(C_1 - 1) + p^{i-1} + s + (p-1)vw_2 + (C_1 - p)v\}.$$

(II)

$$(28) \quad C_{n+w_3} = p^{w_3} C_n + Cp^{n-1} \quad \text{où } C = p^{w_3}(p-1)w_2 + (C_1 - p)p^{w_3}.$$

(III)

$$(29) \quad P_f(t) = \frac{Ct^{w_3+1} + (1-pt) \left( \sum_{i=0}^{w_3} C_i t^i - (pt)^{w_3} \right)}{(1-pt)(1-(pt)^{w_3})}.$$

La démonstration se fait en utilisant le même calcul, que nous avons fait pour démontrer le Théorème 2.

$$5. - f(x, y) = \alpha x^{a+1} y + \beta x y^{b+1}.$$

Dans cette section nous nous proposons de calculer, la série de Poincaré pour la fonction:

$$f(x, y) = \alpha x^{a+1} y + \beta x y^{b+1},$$

$$a + 1, b + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad \alpha, \beta \text{ étant des unités } p\text{-adiques.}$$

Nous définissons:  $d = (a, b)$ ,  $w_1 = b/d$ ,  $w_2 = a/d$ ,  $w_3 = (ab + a + b)/d$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $C_0 = 1$ , et pour tout  $n > 0$

$$(30) \quad C_n = \text{Card} \{ (x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 \mid f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n} \}.$$

**THÉORÈME 3.** Soient  $f$ ,  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  et  $C_n$  définis comme ci-dessus, alors nous avons:

(I) Valeurs de  $C_n$

$$(31) \quad C_n = N_n + S_n(0) + S_n(1) + S_n(2) + S_n(3) + S_n(4)$$

où  $N_n$  est le nombre de solutions non-singulières,

$$S_n = S_n(0) + S_n(1) + S_n(2) + S_n(3) + S_n(4)$$

est le nombre de solutions singulières provenant de  $(0, 0)$  et

$$S_n(0) = \frac{(p-1)p^{n-1}p^a(p^{((n-i)/w_3)w_1+s}a-1)}{p^a-1},$$

$$S_n(1) = p^{n/w_3(2w_3-w_1-w_2)}p^{(i(w_1+w_2)-w_3(s+\hat{s}+2))/w_3},$$

$$S_n(2) = \frac{(p-1)p^{n-1}p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)}(1-p^{\hat{s}b})}{p^{-b}-1},$$

$$S_n(3) = \frac{(p-1)p^{n-1}(1-p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)})}{p^{-b}-1},$$

$$S_n(4) = \frac{(C_1 - 2p + 1)p^{n-1}p^{w_3-w_1-w_2}(p^{(n-i)/w_3(w_3-w_1-w_2)}-1)}{p^{w_3-w_1-w_2}-1},$$

où

$$\begin{aligned} n &= vw_3 + i, & i &\in [1, 2, \dots, w_3], \\ w_1 i &= sw_3 + \tau_1, & \tau_1 &\in [1, 2, \dots, w_3], \\ w_2 i &= rw_3 + \tau_2, & \tau_2 &\in [1, 2, \dots, w_3], \\ i &= s + 1 + \hat{s}(b + 1) + \tau_3, & \tau_3 &\in [1, 2, \dots, b + 1] \quad \text{si } i > 1. \end{aligned}$$

Si  $i = 1$  nous définissons  $s = 0 = r$ .

(II) Formule de recurrence pour  $n > 0$

$$(32) \quad C_{n+w_3} = P^{n-1}C + P^{2w_3-w_1-w_2}C_n$$

où

$$\begin{aligned} C &= (C_1 - 1)p^{w_3} + \frac{(p-1)p^a(p^{aw_1} - 1)}{p^a - 1} + \\ &\quad + \frac{(p-1)(p^{w_1} - p^{2w_3-w_1-w_2})}{p^{1-b} - 1} + (2-2p)p^{2w_3-w_1-w_2}. \end{aligned}$$

(III) Série de Poincaré  $P_f(t)$

$$(33) \quad P_f(t) = \frac{Ct^{w_3+1} + (1-pt)\left(\sum_{i=0}^{w_3} C_i t^i - p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3}\right)}{(1-pt)(1-p^{2w_3-w_1-w_2} t^{w_3})}.$$

REMARQUE 4. Le cas  $a = 0$  et  $b = 0$  voir Goldman [G1].

DÉMONSTRATION.. La démonstration de (II) et (III) est tout à fait analogue à la preuve du Théorème 1.

Pour démontrer (I), nous utilisons les idées et notations de la section 3 et aussi le calcul de la section 4.

D'abord soit:

$$(34) \quad C_n = N_n + S_n.$$

D'après le Lemme 1 nous avons:

$$(35) \quad N_n = (C_1 - 1)p^{n-1}.$$

Pour calculer les valeurs de  $S_n$ , nous définissons  $x = p^k \bar{x}$ ,  $y = p^l \bar{y}$  et

$\bar{x}, \bar{y} \not\equiv 0 \pmod{p^n}$  et nous avons:

$$(36) \quad f(x, y) = \alpha p^{k(a+1)+l} \bar{x}^a \bar{y} + \beta p^{k+l(b+1)} \bar{x} \bar{y}^b \not\equiv 0 \pmod{p^n}.$$

Si  $n=1$ , nous avons  $S_1=1$ , puisque  $(0, 0)$  est l'unique solution singulière.

Regardons à présent le cas  $n > 1$ .

Soient les droites:

$$\mathcal{L}_1: k(a+1) + l = n \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_2: k + (b+1)l = n,$$

dans les variables  $k, l$  et

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \left\{ \frac{nw_1}{w_3} \quad \frac{nw_2}{w_3} \right\}.$$

1) Soit  $vw_1 + s + 1$  le plus petit entier plus grande que  $nw_1/w_3$ .

Si  $k \in [1, 2, \dots, vw_1 + s]$  et  $l \geq n - k(a+1)$  les couples  $(x, y)$  sont solutions des (36), donc le nombre de couple  $(x, y)$  qui ont ces propriétés, que nous notons  $S_n(0)$  est égal à

$$(37) \quad S_n(0) = \sum_{k=1}^{vw_1+s} p^{n-k} (p-1) p^{n-l-1} = \\ = \frac{(p-1) p^{n-1} p^a (p^{((n-i)/w_3)w_1+s} - 1)}{p^a - 1}.$$

2) A présent nous prendrons  $k, l$  avec les propriétés suivantes:  $k \geq vw_1 + s + 1$  et  $l \geq (n-k)/(b+1)$ . Donc nous nous trouvons dans la même condition que dans la section 4. C'est pourquoi les calculs de  $S_n(1)$ ,  $S_n(2)$  et  $S_n(3)$  sont les mêmes.

3) Maintenant nous supposons que

$$(38) \quad k(a+1) + l < n \quad \text{et} \quad k + (1+b)l < n.$$

Si nous faisons les mêmes calculs que 3. II, nous avons que

$$(39) \quad (C_1 - 2p + 1) p^{r-1-h} p^{h-k} p^{h-l} \quad \text{où} \quad h = ak + k + l = bl + k + l,$$

est le nombre de solutions  $(x, y)$  de  $f(x, y) \equiv 0 \pmod{p^n}$ , provenant de  $(0, 0)$  avec les propriétés (38) qui est égal à:

$$(C_1 - 2p + 1) p^{n-1} p^{((w_3-w_1-w_2)/w_3)h}.$$

Nous savons que  $h = w_3 j$ ,  $j \in [1, 2, \dots, v]$ . Alors nous définissons  $S_n(4)$  comme la somme de ce nombre pour  $j \in [1, 2, \dots, v]$ . Donc:

$$(40) \quad S_n(4) = \sum_{j=1}^v (C_1 - 2p + 1) p^{n-1} p^{(w_3 - w_1 - w_2)j} = \\ = \frac{(C_1 - 2p + 1) p^{n-1} p^{w_3 - w_1 - w_2} (p^{(n-v)/w_3(w_3 - w_1 - w_2)} - 1)}{p^{w_3 - w_1 - w_2} - 1}.$$

Et (d'après (34), (35), (37), (40) et la section 5, paragraphe 2) nous avons:

$$C_n = N_n + S_n(0) + S_n(1) + S_n(2) + S_n(3) + S_n(4) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

REMARQUE 5. Si nous faisons le changement de variable  $t = p^{-(\lambda+2)}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , nous avons des pôles réels en  $\lambda = -1$  et  $\lambda = -(w_1 + w_2)/w_3$ .

Nous appellons:

$$(41) \quad Z(\lambda) = \int_{Z_p \times Z_p} |f|^\lambda |dx| |dy|,$$

où  $f$  est une des fonctions traitées ci-dessus, d'après Igusa

$$(42) \quad Z(\lambda) = P_f(\lambda) - (P_f(\lambda) - 1) \lambda^{-1},$$

d'où  $Z(\lambda)$  a des pôles aux points  $\lambda = -1$  et  $\lambda = -(w_1 + w_2)/w_3$ .

## REFERENCES

- [B-S] Z. I. BOREVICH - I. R. SHAFAREVICH, *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.
- [I] J. IGUSA, *Complex powers and asymptotic expansions I, II*, J. Reine angew. Math., 268-269 (1974), pp. 110-130; 278-279 (1975), pp. 307-321.
- [G1] JAY R. GOLDMAN, *Numbers of Solutions of Congruences: Poincaré Series for Strongly Nondegenerate Forms*, Proc. of the AMS, volume 87, number 4, April 1983.
- [G2] JAY R. GOLDMAN, *Numbers of solutions of congruences: Poincaré series for algebraic curves*, Advances in Mathematics, 62 (1986), pp. 68-83.
- [L] F. LOESER, *Fonctions d'Igusa p-adiques et polynômes de Bernstein*, Amer. J. Math., 109 (1988).
- [M] D. MEUSER, *On the poles of a local zeta functions for curves*, Inv. Math., 73 (1983), pp. 445-465.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 settembre 1990.