

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI FORNI

Funtorialità di una classe di domini q -Runge

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 84 (1990), p. 159-173

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1990__84__159_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Funtorialità di una classe di domini q -Runge.

GIOVANNI FORNI(*)

SUMMARY - In order to study topological properties of q -convex and q -complete singular complex spaces without techniques from singular Morse theory (stratified Morse theory), we introduced in [7] a new class of open subspaces in a q -complete space X which we called *relatively q -complete* in X . This notion is a generalization to q -complete spaces of Runge domains in Stein spaces ($q = 0$). As we remarked in [7], every relatively q -complete open subspace is a q -Runge domain in the sense of [4]. The aim of this paper is to prove that the property of *relative q -completeness* is preserved by main constructions which recur in the theory of complex spaces. In particular we consider the following constructions I) cartesian product of spaces; II) closed analytic subspace; III) complement of a closed analytic subspace globally defined by one holomorphic function; IV) holomorphic vector bundle; V) inverse image by a finite holomorphic map; VI) normalization.

Introduzione.

In [7] abbiamo introdotto una particolare classe di aperti in uno spazio complesso q -completo X che abbiamo chiamato *relativamente q -completi* in X . Questi aperti si sono rivelati utili nello studio, compiuto in [7], delle proprietà topologiche degli spazi complessi: si è mostrato come, basandosi su tale nozione, sia possibile dimostrare precisi risultati di finitezza e di annullamento per i gruppi di omologia e di coomologia a supporti compatti degli spazi q -convessi e

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna.

q -completi con singolarità. In questo modo si sono ritrovati, evitando le tecniche fondate sulla teoria di Morse per spazi con singolarità precedentemente impiegate (teoria di Morse stratificata di Goresky-MacPherson), risultati recenti di annullamento nel caso q -completo e allo stesso tempo nuovi risultati di finitezza nel caso q -convesso.

Un *dominio di Runge* Y in uno spazio di Stein X è un aperto tale che il morfismo naturale di restrizione $\Gamma(X, \mathcal{O}) \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O})$ tra le rispettive algebre di funzioni olomorfe, dotate della topologia canonica della convergenza uniforme sui compatti, ha immagine densa. R. Narasimhan ha dimostrato in [10] che un sottospazio aperto Y di uno spazio di Stein X è un dominio di Runge se e solo se per ogni compatto $K \subseteq Y$, esiste una funzione C^∞ $\pi_K: X \rightarrow \mathbf{R}$ fortemente 0-convessa (i.e. fortemente plurisubarmonica) ed esaustiva su X tale che $K \subseteq \{x \in X: \pi_K(x) < 0\} \subseteq Y$.

A partire da questa caratterizzazione dei domini di Runge abbiamo introdotto in [7] la definizione seguente:

sia X uno spazio q -completo; un aperto Y di X è *relativamente q -completo* in X se, per ogni compatto $K \subseteq Y$, esiste una funzione di classe C^∞ $\psi_K: X \rightarrow \mathbf{R}$ fortemente q -convessa ed esaustiva su X tale che $K \subseteq \{x \in X: \psi_K(x) < 0\} \subseteq Y$.

Una prima questione che si presenta riguarda le relazioni tra la nozione introdotta e i domini q -Runge negli spazi q -completi: sia X uno spazio complesso; un aperto Y di X è un *dominio q -Runge* in X se il morfismo naturale

$$r_Y^X: H^q(X, \Omega_X^q) \rightarrow H^q(Y, \Omega_Y^q)$$

tra i gruppi di coomologia a coefficienti nel fascio coerente delle p -forme olomorfe su X ha immagine densa, per $p = 0, 1, \dots, n = \dim X$; nel caso singolare si considera il fascio *coerente* delle p -forme olomorfe singolari su X secondo A. Ferrari [6] (si veda G. Sorani [12], E. Ballico-G. Bolondi [4]). Da un teorema «di densità» di A. Andreotti-H. Grauert [2] segue che ogni aperto relativamente q -completo è un dominio q -Runge.

In questa nota intendiamo mostrare che la proprietà di q -completezza *relativa* è preservata dalle principali costruzioni che ricorrono nella teoria degli spazi complessi. In particolare consideriamo le seguenti costruzioni:

- I) prodotto cartesiano di spazi; II) sottospazio analitico chiuso;

III) complementare di un sottospazio analitico chiuso che sia luogo di zeri di una funzione olomorfa globale; IV) fibrato vettoriale olomorfo; V) controimmagine per una applicazione olomorfa *finita* (si veda la Definizione 4.12); VI) normalizzazione.

Risultati analoghi non sono noti in generale per i domini q -Runge nel caso in cui $q \geq 1$. Notiamo che un risultato di funtorialità rispetto alla costruzione V) è stato ottenuto recentemente nel caso $q = 0$ da N. Mihalache in [9], Th. 3.7. La linea della dimostrazione esposta nel seguito per il caso generale (si veda la Proposizione 4.14) è però differente da quella seguita in [9]. La funtorialità della proprietà di q -completezza rispetto alle costruzioni elencate è stata esaminata sistematicamente da V. Villani in un Seminario tenuto all'Università di Genova nel 1969 [14]; nell'esposizione di Villani la funtorialità rispetto alle costruzioni V) e VI) appare come un problema aperto; una risposta in senso positivo è venuta nel 1980 da E. Ballico [3]. Faremo riferimento anche a un precedente lavoro di V. Villani [13] in cui è dimostrata per la prima volta la funtorialità della proprietà di q -completezza rispetto alla costruzione IV) nel caso delle varietà e a un lavoro di V. Ancona [1] in cui il risultato di [13] è esteso agli spazi complessi.

La presente nota è organizzata come segue: nel §1 richiamiamo le principali definizioni e riportiamo alcuni esempi; nel §2 riportiamo le proprietà omologiche e coomologiche degli aperti relativamente q -completi, dimostrate in [7]; nel §3 dimostriamo un lemma di regolarizzazione per funzioni q -convesse continue necessario nel seguito; infine nel §4 procediamo alla dimostrazione delle funtorialità elencate.

1. Definizioni ed esempi.

Uno *spazio complesso* è uno spazio analitico complesso ridotto e con topologia di Hausdorff a base numerabile di aperti.

DEFINIZIONE 1.1. *a)* Sia D un sottoinsieme aperto di \mathbf{C}^N , una funzione $\psi \in C^2(D, \mathbf{R})$ si dice *fortemente q -convessa* (*q -convessa*) se, per ogni $z \in D$ esiste un sottospazio \mathbf{C} -lineare $W_z \subseteq \mathbf{C}^N$ di codimensione q tale che la restrizione della forma di Levi

$$L(\psi, z) = \sum_{i,j=1}^N \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_z dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

a W_z è definita (semidefinita) positiva.

b) Sia X uno spazio complesso. Una funzione $\psi \in C^k(X, \mathbf{R})$ ($k \geq 2$) si dice *fortemente q -convessa* (*q -convessa*) su X se, per ogni $x \in X$, esistono una immersione chiusa τ di un intorno aperto U di x in X in un sottoinsieme aperto $D \subseteq \mathbf{C}^N$ e una funzione $\hat{\psi} \in C^k(D, \mathbf{R})$ fortemente q -convessa (q -convessa) su D tale che $\hat{\psi} \circ \tau = \psi$ in U .

DEFINIZIONE 1.2. Sia X uno spazio complesso. Una funzione continua $\psi: X \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *esaustiva* se l'insieme aperto $B_t = \{x \in X: \psi(x) < t\}$ è relativamente compatto in X per ogni $t \in \mathbf{R}$.

DEFINIZIONE 1.3. Uno spazio complesso X si dice *q -completo* se esiste una funzione di classe C^∞ esaustiva e fortemente q -convessa su X . Secondo questa definizione uno spazio complesso è di Stein se e solo se è 0-completo (si veda R. Narasimhan [10]).

Riportiamo infine la definizione di aperto relativamente q -completo:

DEFINIZIONE 1.4. Sia X uno spazio q -completo. Un sottospazio aperto Y di X si dice *relativamente q -completo* in X se per ogni sottoinsieme compatto $K \subseteq Y$ esiste una funzione C^∞ ψ_K esaustiva e fortemente q -convessa su X tale che:

$$K \subseteq \{x \in X: \psi_K(x) < 0\} \subseteq Y.$$

ESEMPLI. (1) Sia X uno spazio q -completo e sia ψ una funzione C^∞ esaustiva e fortemente q -convessa su X . Allora il sottospazio aperto $B_t = \{x \in X: \psi(x) < t\}$ è relativamente q -completo in X per ogni $t \in \mathbf{R}$.

(2) Se X è uno spazio di Stein (0-completo) dai risultati di R. Narasimhan [10] segue che un aperto Y è relativamente 0-completo in X se e solo se Y è un dominio di Runge.

(3) Sia X uno spazio q -completo e sia $A = \{x \in X: f_1(x) \dots = f_r(x) = 0\}$ un sottospazio analitico chiuso definito da r funzioni olomorfe globali su X ($r \geq 1$). Sia ψ una funzione C^∞ esaustiva e fortemente q -convessa su X e sia $X_0 = \{x \in X: \psi(x) \leq 0\}$. Allora $X_0 \cup A$ ammette un sistema fondamentale di interni aperti relativamente q -completi in X (si veda [7], Prop. 2.1.1.).

2. Proprietà omologiche e coomologiche.

In [7], Coroll. 3.1.5 abbiamo dimostrato la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. *Sia X uno spazio q -completo di dimensione n e*

sia Y un aperto relativamente q -completo in X . Allora

$$H_i(X, Y; G) = 0 \quad \text{per } i > n + q \text{ e per ogni gruppo abeliano } G.$$

Da un teorema di A. Andreotti, H. Grauert ([2], Th. 12, p. 248) segue poi (si veda [7], Remark 1.2.1):

PROPOSIZIONE 2.2. *Sia X uno spazio q -completo e sia \mathcal{F} un fascio analitico coerente su X . Allora per ogni aperto Y relativamente q -completo in X , il morfismo naturale $H^i(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(Y, \mathcal{F})$ ha immagine densa per ogni $i \geq q$.*

OSSERVAZIONE 2.3. In particolare dalla Proposizione 2.2 segue (per \mathcal{F} = fascio coerente delle p -forme olomorfe su X) che ogni aperto relativamente q -completo è un dominio q -Runge.

Procediamo quindi alla dimostrazione delle funtorialità che costituiscono l'oggetto della presente nota.

3. Preliminari: un lemma di regolarizzazione.

Una difficoltà che frequentemente si incontra nello studio delle proprietà di q -convessità (per $q \geq 1$) deriva dal fatto che la somma di funzioni fortemente q -convesse non è in generale una funzione q -convessa. Esplicitiamo qui una condizione naturale sulle forme di Levi la quale assicura che ogni combinazione lineare a coefficienti reali positivi di funzioni (fortemente) q -convesse è una funzione fortemente q -convessa:

DEFINIZIONE 3.1. Sia X uno spazio complesso; diremo che una r -upla $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ ($r \geq 2$) di funzioni di classe C^∞ (fortemente) q -convesse su X è *Levi-coerente* su X se è verificata la condizione seguente:

esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X costituito da intorni coordinati tale che, per ogni $i \in I$, se $\tau_i: U_i \rightarrow D_i$ è una immersione analitica chiusa in un aperto $D_i \subseteq \mathbb{C}^N$, esiste una r -upla $(\hat{\varphi}_1^{(i)}, \dots, \hat{\varphi}_r^{(i)})$ di funzioni di classe C^∞ (fortemente) q -convesse su D_i con la proprietà che $\hat{\varphi}_s^{(i)} \circ \tau_i = \varphi_s$ in U_i , per $1 \leq s \leq r$, e, per ogni $z \in D_i$, esiste un sottospazio \mathbb{C} -lineare $W_z \subseteq \mathbb{C}^{N_i}$ di codimensione q tale che:

- α) $L(\hat{\varphi}_s^{(i)}, z)|_{W_z}$ è semidefinita positiva per ogni $s = 1, \dots, r$;
- β) $v \in W_z$ e $L(\hat{\varphi}_1^{(i)}, z)(v) = \dots = L(\hat{\varphi}_r^{(i)}, z)(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Dimostriamo ora un elementare lemma di regolarizzazione:

LEMMA 3.2. *Sia X uno spazio complesso e sia $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ una r -upla Levi-coerente di funzioni di classe C^∞ (fortemente) q -convesse su X ; sia $\psi: X \rightarrow \mathbf{R}$ la funzione continua $\psi = \max(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$. Esiste allora una successione $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di funzioni C^∞ fortemente q -convesse, uniformemente convergente alla funzione ψ su X .*

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare l'asserto per $r = 2$; si potrà poi procedere per induzione su r . Osserviamo che $\max(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}\{\varphi_1 + \varphi_2 + \lambda \circ (\varphi_1 - \varphi_2)\}$, dove $\lambda: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ è la funzione valore assoluto. È possibile costruire una successione di funzioni $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$, $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$, con le seguenti proprietà:

- 1) $\lambda_n \rightarrow \lambda$ uniformemente su \mathbf{R} ;
- 2) $-1 < \lambda'_n < 1$, $\lambda''_n \geq 0$.

Per 1) la successione di funzioni $C^\infty(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$, dove

$$\psi_n = \frac{1}{2}\{\varphi_1 + \varphi_2 + \lambda_n \circ (\varphi_1 - \varphi_2)\},$$

converge uniformemente a ψ su X . Dimostriamo allora che ogni funzione ψ_n è fortemente q -convesca su X : nelle notazioni della Definizione 3.1, sia $\hat{\psi}_n^{(i)} = \frac{1}{2}\{\hat{\varphi}_1^{(i)} + \hat{\varphi}_2^{(i)} + \lambda_n \circ (\hat{\varphi}_2^{(i)} - \hat{\varphi}_1^{(i)})\}$ in $D_i \subseteq \mathbf{C}^{N_i}$; il calcolo della forma di Levi di $\hat{\psi}_n^{(i)}$ dà:

$$L(\hat{\psi}_n^{(i)}) = \frac{1}{2}\{(1 + \lambda'_n \circ (\hat{\varphi}_1^{(i)} - \hat{\varphi}_2^{(i)}))L(\hat{\varphi}_1^{(i)}) + (1 - \lambda'_n \circ (\hat{\varphi}_1^{(i)} - \hat{\varphi}_2^{(i)}))L(\hat{\varphi}_2^{(i)}) + \\ + \lambda''_n \circ (\hat{\varphi}_1^{(i)} - \hat{\varphi}_2^{(i)})\partial(\hat{\varphi}_1^{(i)} - \hat{\varphi}_2^{(i)}) \otimes \partial(\hat{\varphi}_1^{(i)} - \hat{\varphi}_2^{(i)})\};$$

per le proprietà 2) e le condizioni $\alpha)$ e $\beta)$, la forma di Levi $L(\hat{\psi}_n^{(i)}, z)$ è definita positiva su W_z per ogni $z \in D_i$; dunque la funzione ψ_n è fortemente q -convesca su X . \square

4. Prova delle functorialità.

I) *Prodotto cartesiano di spazi.*

PROPOSIZIONE 4.1. *Siano X_1, \dots, X_r spazi complessi risp. q_1, \dots, q_r -completi; allora $X_1 \times \dots \times X_r$ è uno spazio q -completo per $q = q_1 + \dots + q_r$.*

(si veda [14], (I, 5)) e se Y_i è un aperto relativamente q_i -completo in X_i per $i = 1, \dots, r$, $Y_1 \times \dots \times Y_r$ è un aperto relativamente q -completo in $X_1 \times \dots \times X_r$.

DIMOSTRAZIONE. Sia K un sottoinsieme compatto di $Y_1 \times \dots \times Y_r$. Esistono dei compatti $K_1 \subseteq Y_1, \dots, K_r \subseteq Y_r$ tali che $K \subseteq K_1 \times \dots \times K_r \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_r$. Per $i = 1, \dots, r$ esiste una funzione ψ_i esaustiva e fortemente q_i -convessa su X_i tale che

$$K_i \subseteq \{x \in X_i: \psi_i(x) < 0\} \subseteq Y_i.$$

Osserviamo che la r -upla di funzioni q -convesse per $q = q_1 + \dots + q_r$ ($\psi_1 \circ \pi_1, \dots, \psi_r \circ \pi_r$), dove $\pi_i: X_1 \times \dots \times X_r \rightarrow X_i$ è la proiezione canonica, è Levi-coerente su $X_1 \times \dots \times X_r$ (si consideri nella Definizione 3.1 come sottospazio W_z il prodotto cartesiano $W_z^1 \times \dots \times W_z^r$ dei sottospazi di codimensione risp. q_1, \dots, q_r sui quali le forme di Levi delle funzioni $\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_r$ sono definite positive). Consideriamo allora la funzione $\psi = \max(\psi_1 \circ \pi_1, \dots, \psi_r \circ \pi_r)$; certamente ψ è esaustiva su $X_1 \times \dots \times X_r$ e vale

$$(*) \quad K \subseteq K_1 \times \dots \times K_r \subseteq \{x \in X_1 \times \dots \times X_r: \psi(x) < 0\} \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_r.$$

Per il Lemma 3.2 è possibile approssimare uniformemente su $X_1 \times \dots \times X_r$ la funzione ψ mediante funzioni di classe C^∞ fortemente q -convesse su $X_1 \times \dots \times X_r$. Dunque per (*), essendo ψ esaustiva, esiste ψ_K di classe C^∞ esaustiva e fortemente q -convessa su $X_1 \times \dots \times X_r$ tale che:

$$K \subseteq \{x \in X_1 \times \dots \times X_r: \psi_K(x) < 0\} \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_r. \quad \square$$

II) Sottospazio analitico chiuso.

La proposizione che segue è dimostrata in [7], Remark 1.2.8:

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia X uno spazio q -completo e sia A un sottospazio analitico chiuso di X ; allora A è q -completo (si veda [14], (VI, 5)) e per ogni aperto Y relativamente q -completo in X , $Y \cap A$ è un aperto relativamente q -completo in A .*

III) *Complementare di un sottospazio analitico chiuso che sia luogo di zeri di una funzione olomorfa globale.*

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia X uno spazio q -completo e sia $A = \{x \in X: f(x) = 0\}$ un sottospazio analitico chiuso di X luogo di zeri di una funzione ologomorfa globale; allora $X \setminus A$ è uno spazio q -completo (si veda [14]. (VIII, 5)) e per ogni aperto Y relativamente q -completo in X , $Y \setminus A$ è un aperto relativamente q -completo in $X \setminus A$.*

La Proposizione 4.3 segue come corollario dalla Proposizione che segue, dimostrata in [7], Remark 1.2.5:

PROPOSIZIONE 4.4. *Sia X uno spazio q -completo e sia $A = \{x \in X: f_1(x) = \dots = f_p(x) = 0\}$ un sottospazio analitico chiuso definito da un numero finito $p \geq 1$ di funzioni ologomorfe globali f_1, \dots, f_p su X . Allora $X \setminus A$ è uno spazio $(q + p - 1)$ -completo e per ogni aperto Y relativamente q -completo in X , $Y \setminus A$ è un aperto relativamente $(q + p - 1)$ -completo in $X \setminus A$.*

Condizioni sufficienti affinché un sottospazio analitico chiuso A di uno spazio complesso X possa essere descritto come luogo di zeri di un numero finito di funzioni ologomorfe globali su X sono state date da S. Coen in [5], § 4.

IV) Fibrato vettoriale ologomorfo.

DEFINIZIONE 4.5. Sia dato uno spazio complesso X . Uno spazio complesso E , dotato di una applicazione ologomorfa surgettiva $\pi: E \rightarrow X$ è un *fibrato vettoriale ologomorfo* di rango r ($r \geq 1$) se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X tale che per ogni $i \in I$ sia dato un isomorfismo analitico λ_i di $E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$ su $U_i \times \mathbf{C}^r$ in modo che siano verificate le condizioni seguenti:

- 1) per ogni $x \in U_i$, λ_i applica la fibra $E_x = \pi^{-1}(x)$ su $\{x\} \times \mathbf{C}^r$;
- 2) per ogni coppia di indici $i, j \in I$, con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, esiste un'applicazione ologomorfa g_{ij} di $U_i \cap U_j$ nel gruppo lineare $GL(r, \mathbf{C})$ tale che: $\lambda_i \lambda_j^{-1}(x, \xi) = (x, g_{ij}(x)\xi)$, per $x \in U_i \cap U_j$, e $\xi \in \mathbf{C}^r$.

PROPOSIZIONE 4.6. *Sia X uno spazio q -completo e sia $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale ologomorfo su X . Allora E è uno spazio q -completo (si veda [13] e [1]) e per ogni aperto Y relativamente q -completo in X , $E|_Y$ è un aperto relativamente q -completo in E .*

Questa proposizione è anche alla base delle funtorialità V) e VI). La dimostrazione che segue ricalca con qualche aggiustamento quella del teorema 1 di [13].

LEMMA 4.7. Sia X uno spazio complesso; sia $\psi: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione esaustiva su X . Sia $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto localmente finito di X . Data una qualunque collezione di numeri reali (positivi) $(c_i)_{i \in I}$ in corrispondenza al ricoprimento \mathcal{U} , esiste una funzione $\lambda \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che

- 1) a) $\lambda(t) < 0$ per $t < 0$ b) $\lambda'(t) > 0$, $\lambda''(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$;
- 2) $\lambda' \circ \psi(x) > c_i$ per $x \in U_i$, per ogni $i \in I$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $k \in \mathbf{Z}$, l'insieme $F_k = \{x \in X: k \leq \psi(x) \leq k+1\}$ è compatto. Sia $I_k = \{i \in I: U_i \cap F_k \neq \emptyset\}$. Essendo il ricoprimento \mathcal{U} localmente finito, l'insieme I_k è finito per ogni $k \in \mathbf{Z}$. Sia allora

$$m_k = \begin{cases} \max \{c_i: i \in I_k\} & \text{se } I_k \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } I_k = \emptyset. \end{cases}$$

(Osserviamo che $I_k = \emptyset$ se $k < \min \psi$). Dunque esiste una funzione $h \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}^+)$ tale che

$$\begin{aligned} h(t) &> 0 && \text{per } t \in \mathbf{R} \\ h(t) &> m_k && \text{per } k \leq t \leq k+1, k \in \mathbf{Z} \\ h'(t) &\geq 0 && \text{per } t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Possiamo allora scegliere $\lambda(t) = \int_0^t h(s) ds$, $t \in \mathbf{R}$ \square

DEFINIZIONE 4.8. Sia X uno spazio complesso e sia $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale olomorfo di rango r su X . Una collezione di forme hermitiane $h = (h_x)_{x \in X}$ è una forma hermitiana (una metrica hermitiana) su E se

a) h_x è una forma hermitiana (definita positiva) sulla fibra E_x , per ogni $x \in X$;

b) esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ di X tale che per ogni $i \in I$ sono dati un isomorfismo analitico λ_i di $E|_{U_i} = \pi^{-1}(U_i)$ su $U_i \times \mathbf{C}^r$ verificante le condizioni 1) e 2) della Definizione 4.5 e una forma hermitiana (definita positiva) su $U_i \times \mathbf{C}^r$:

$$\hat{h}_i = \sum_{s, \sigma=1}^r \hat{h}_{s\sigma}^i \xi_s \bar{\xi}_\sigma$$

tale che $\hat{h}_{s\sigma}^i \in C^\infty(U_i, \mathbf{C})$ per $1 \leq s, \sigma \leq r$ e $\hat{h}_i \circ \lambda_i|_{E_x} = h_x$, per ogni $x \in U_i$. Sia h una forma hermitiana su E ; nel seguito considereremo la funzione Φ_h di classe C^∞ su E a valori reali definita come $\Phi_h(x, \xi) = h_x(\xi, \xi)$, per $(x, \xi) \in E$.

LEMMA 4.9. *Sia U un aperto di \mathbf{C}^N e sia $E = U \times \mathbf{C}^r$ il fibrato banale di rango r su U . Sia poi h una forma hermitiana su E . In ogni punto $p = (z, \xi) \in E$ si ha:*

$$L(\Phi_h, p) = F_h(z, \xi) + S_h(z, \xi)$$

dove $F_h(z, \xi)$ è la forma hermitiana su $\mathbf{C}^N \times \mathbf{C}^r$:

$$F_h(z, \xi) = \xi^* h_z \partial(h^{-1} \partial h)_z \xi$$

(ξ^* indica il trasposto hermitiano del vettore colonna $\xi \in \mathbf{C}^r$) e $S_h(z, \xi)$ è una forma hermitiana semidefinita positiva su $\mathbf{C}^N \times \mathbf{C}^r$ e definita positiva su $(0) \times \mathbf{C}^r$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $p = (z, \xi) \in E$. Si può scegliere un sistema di coordinate su \mathbf{C}^r tale che h_z sia rappresentata dalla matrice identica $r \times r, I_r$. In questo sistema di coordinate le forme hermitiane su $\mathbf{C}^N \times \mathbf{C}^r$, $L(\Phi_h, p)$ e $F_h(z, \xi)$ sono rappresentate dalle matrici $(N+r) \times (N+r)$:

$$L(\Phi_h, p) = \begin{pmatrix} L & A \\ A^* & I_r \end{pmatrix}, \quad F_h(z, \xi) = \begin{pmatrix} L - AA^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$L_{ij} = \sum_{s, \sigma=1}^r \left(\frac{\partial^2 \hat{h}_{s\sigma}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_z \xi_s \bar{\xi}_\sigma, \quad \text{per } 1 \leq i, j \leq N,$$

$$A_{sj} = \sum_{\sigma=1}^r \left(\frac{\partial \hat{h}_{s\sigma}}{\partial z_j} \right)_z \xi_\sigma, \quad \text{per } 1 \leq s \leq r \text{ e } 1 \leq j \leq N,$$

e A^* è la matrice trasposta hermitiana di A .

Dunque $S_h(z, \xi)$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} AA^* & A \\ A^* & I_r \end{pmatrix} = BB^*$, dove B è la matrice $(N+r)$: $B = \begin{pmatrix} A \\ I_r \end{pmatrix}$; questa rappresentazione matriciale di $S_h(z, \xi)$ consente di concludere la dimostrazione. \square

OSSERVAZIONE 4.10. Se h è una metrica hermitiana su E e $\psi \in C^\infty(U, \mathbf{R})$, allora $k = \exp[\psi]h$ è una metrica hermitiana su E e si ha

$$F_k(z, \xi) = \exp[\psi(z)](\xi^* h_z \xi L(\psi, z) + F_h(z, \xi)),$$

come si può verificare calcolando a partire dall'espressione che definisce $F_k(z, \xi)$.

LEMMA 4.11. *Sia X uno spazio q -completo e sia $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale olomorfo su X ; sia inoltre ψ una funzione C^∞ esaustiva e fortemente q -convessa su X . Data una metrica hermitiana h su E , è possibile scegliere una funzione $\lambda \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ con le proprietà seguenti:*

1) $\lambda(t) < 0$ per $t < 0$;

2) *la metrica hermitiana $k = \exp[\lambda \circ \psi]h$ è tale che $(\psi \circ \pi, \Phi_k)$ è una coppia di funzioni q -convesse Levi-coerente su E .*

DIMOSTRAZIONE. È possibile scegliere un ricoprimento aperto localmente finito $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ e un sottoricoprimento aperto $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ con le seguenti proprietà:

α) V_i è relativamente compatto in U_i , $i \in I$;

β) esiste una immersione analitica chiusa τ_i di U_i in un aperto $D_i \subseteq \mathbf{C}^r$ tale che $\psi = \hat{\psi}_i \circ \tau_i$ in U_i , dove $\hat{\psi}_i$ è una funzione C^∞ fortemente q -convessa in D_i ;

γ) esiste un isomorfismo analitico λ_i di $E|_{U_i}$ su $U_i \times \mathbf{C}^r$ (che applica la fibra E_x su $\{x\} \times \mathbf{C}^r$ per ogni $x \in U_i$) tale che la metrica hermitiana h è restrizione a $E|_{U_i}$ di una metrica hermitiana su $U_i \times \mathbf{C}^r$, dove r è il rango di E (si veda la Definizione 4.8).

Per le proprietà β) e γ) si può costruire una immersione chiusa $\sigma_i = (\tau_i \times \text{id}) \circ \lambda_i$ di $E|_{U_i}$ in $D_i \times \mathbf{C}^r$ tale che: *a)* la metrica hermitiana h è la restrizione a $E|_{U_i}$ di una metrica hermitiana \hat{h}_i su $D_i \times \mathbf{C}^r$ (i.e. $\hat{h}_i \circ \sigma_i = h$ in $E|_{U_i}$; *b)* $\hat{\psi}_i \circ \pi_i \circ \sigma_i = \psi \circ \pi$ in $E|_{U_i}$, dove $\pi_i: D_i \times \mathbf{C}^r \rightarrow D_i$ è la proiezione canonica.

Consideriamo la metrica hermitiana $\hat{k}_i = \exp[\lambda \circ \hat{\psi}_i] \hat{h}_i$ su $D_i \times \mathbf{C}^r$ e sia $\hat{\Phi}_{\hat{k}_i}$ la funzione di classe C^∞ a valori reali associata alla metrica \hat{k}_i ; certamente $\hat{\Phi}_{\hat{k}_i} \circ \sigma_i = \hat{\Phi}_{\hat{k}_i}$ in $E|_{U_i}$. Per il Lemma 4.9 in ogni punto $p = (z, \xi) \in D_i \times \mathbf{C}^r$ si ha:

$$L(\hat{\Phi}_{\hat{k}_i}, p) = F_{\hat{k}_i}(z, \xi) + \mathcal{S}_{\hat{k}_i}(z, \xi),$$

dove $S_{\hat{k}_i}(z, \xi)$ è una forma hermitiana semidefinita positiva su $\mathbf{C}^{N_i} \times \mathbf{C}^r$ e definita positiva su $(0) \times \mathbf{C}^r$. Esaminiamo allora la forma hermitiana

$$F_{\hat{k}_i}(z, \xi) = \exp[\lambda \circ \hat{\psi}_i(z)](\xi^* \hat{h}_{iz} \xi L(\lambda \circ \hat{\psi}_i, z) + F_{\hat{k}_i}(z, \xi))$$

(si veda l'Osservazione 4.10).

Essendo $\hat{\psi}_i$ fortemente q -convessa in D_i , esiste per ogni $z \in D_i$ un sottospazio \mathbf{C} -lineare $W_z \subseteq \mathbf{C}^{N_i}$ di codimensione q tale che la restrizione della forma di Levi $L(\hat{\psi}_i, z)$ a W_z è definita positiva; è dunque possibile scegliere un numero reale positivo c_i tale che:

(*) la forma hermitiana $c_i \xi^* \hat{h}_{iz} \xi L(\hat{\psi}_i, z) + F_{\hat{k}_i}(z, \xi)$ è definita positiva su $W_z \times (0) \subseteq \mathbf{C}^{N_i} \times \mathbf{C}^r$, per $z \in \tau_i(V_i)$ e $\xi \neq 0$;

questo dipende dalla relativa compattezza di V_i in U_i e dall'omogeneità in ξ dell'espressione in (*).

Il Lemma 4.7 consente poi di scegliere una funzione $\lambda \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che:

- 1) a) $\lambda(t) < 0$ per $t < 0$ b) $\lambda'(t) > 0$, $\lambda''(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$;
- 2) $\lambda' \circ \psi(x) > c_i$ per $x \in U_i$, per ogni $i \in I$.

Calcolando la forma di Levi della funzione $\lambda \circ \hat{\psi}_i$ si vede che, per le proprietà 1b) e 2) della funzione λ , $L(\lambda \circ \hat{\psi}_i, z) > c_i L(\hat{\psi}_i, z)$ per $z \in \tau_i(U_i)$; si può quindi concludere che esiste un intorno aperto \tilde{D}_i di $\tau_i(V_i)$ in D_i tale che la forma hermitiana $F_{\hat{k}_i}(z, \xi)$ è definita positiva su $W_z \times (0)$, per $z \in \tilde{D}_i$ e $\xi \neq 0$, ed essendo nulla per $\xi = 0$ e costante in $\{v\} \times \mathbf{C}^r$ per ogni $v \in \mathbf{C}^{N_i}$, è semidefinita positiva su $W_z \times \mathbf{C}^r$, per $z \in \tilde{D}_i$. Si ha dunque che:

a) $L(\hat{\psi}_i \circ \pi_i, p)$ è semidefinita positiva su $W_z \times \mathbf{C}^r$ ed è strettamente positiva su ogni vettore non nullo in $W_z \setminus (0) \times \mathbf{C}^r$, per $p = (z, \xi) \in \tilde{D}_i \times \mathbf{C}^r$;

b) $L(\hat{\Phi}_{\hat{k}_i}, p) = F_{\hat{k}_i}(z, \xi) + S_{\hat{k}_i}(z, \xi)$, dove la forma hermitiana $F_{\hat{k}_i}(z, \xi)$ è semidefinita positiva su $W_z \times \mathbf{C}^r$, per $z \in \tilde{D}_i$ e la forma hermitiana $S_{\hat{k}_i}(z, \xi)$ è semidefinita positiva su $\mathbf{C}^{N_i} \times \mathbf{C}^r$ e definita positiva su $(0) \times \mathbf{C}^r$.

Gli asserti a) e b) concludono la dimostrazione \square

LEMMA 4.12. *Sia X uno spazio complesso esia $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale olomorfo su X . Se K è un sottoinsieme compatto di E , esiste una metrica hermitiana h su E tale che $K \subseteq \{p \in E: \Phi_h(p) < 1\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Una metrica con la proprietà richiesta si può costruire dapprima localmente e quindi globalmente usando una partizione C^∞ dell'unità \square

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 4.6. Sia K un compatto dello spazio E contenuto in $E|_Y$. Essendo $\pi(K)$ un compatto di X contenuto in Y esiste una funzione $\psi \in C^\infty(X, \mathbf{R})$ esaustiva e fortemente q -convessa su X tale che:

$$(*) \quad \pi(K) \subseteq \{x \in X: \psi(x) < 0\} \subseteq Y.$$

Per il Lemma 4.12 è poi possibile scegliere una metrica hermitiana h su E tale che:

$$(**) \quad K \subseteq \{p \in E: \Phi_k(p) < 1\}.$$

Per il Lemma 4.11 esiste allora una funzione $\lambda \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ con le seguenti proprietà:

- 1) $\lambda(t) < 0$ per $t < 0$;
- 2) la metrica hermitiana $k = \exp[\lambda \circ \psi]h$ è tale che $(\psi \circ \pi, \Phi_k)$ è una coppia di funzioni q -convesse Levi-coerente su E .

Consideriamo dunque la funzione continua su E a valori reali $\Theta = \max(\psi \circ \pi, \Psi_k)$, dove $\Psi_k = \Phi_k - 1$. Questa funzione verifica le proprietà che seguono:

- a) Θ è esaustiva (essendo ψ esaustiva su X e k una metrica hermitiana su E);
- b) $K \subseteq \{p \in E: \Theta(p) < 0\} \subseteq E|_Y$ (per (*), (**)) e per la proprietà 1) della funzione λ .

Regolarizzando la funzione Θ mediante il Lemma 3.1 si conclude la dimostrazione della proposizione. \square

V) *Controimmagine per una applicazione ologomorfa finita.*

DEFINIZIONE 4.13. Si dice che un morfismo $f: X_1 \rightarrow X_2$ di spazi analitici è *finito* se è separato e chiuso e se le sue fibre sono finite; queste condizioni sono equivalenti alle seguenti: f è separato e proprio e le sue fibre sono discrete (si veda [8], § 5).

PROPOSIZIONE 4.14. Sia $f: X_1 \rightarrow X_2$ una applicazione ologomorfa finita tra spazi complessi e sia X_2 uno spazio q -completo; allora X_1 è

q-completo (si veda [3]) e per ogni aperto Y_2 relativamente *q-completo* in X_2 , $Y_1 = f^{-1}(Y_2)$ è un aperto relativamente *q-completo* in X_1 .

DIMOSTRAZIONE. Seguendo un'idea di E. Ballico [3] ci si può ricondurre alla situazione IV): essendo f una applicazione olomorfa finita, $\mathcal{E} = f^*(\mathcal{O}_{X_2})$ è un \mathcal{O}_{X_1} -fascio coerente; inoltre X_1 è isomorfo a $\text{Specan}(\mathcal{E})$, spettro analitico del fascio \mathcal{E} . Sia $S(\mathcal{E})$ l'algebra simmetrica di \mathcal{E} . È definito un morfismo naturale surgettivo di \mathcal{O}_{X_2} -algebre tra $S(\mathcal{E})$ ed \mathcal{E} . Questo morfismo induce una immersione chiusa τ di X_1 nel fibrato vettoriale olomorfo E associato a \mathcal{E} , $E = \text{Specan}(S(\mathcal{E}))$, la quale applica Y_1 su $\tau(X_1) \cap E|_{Y_2}$ (per queste nozioni e questi risultati riguardanti la teoria dei morfismi finiti rinviamo a [8]). La conclusione del ragionamento discende dalla Proposizione 4.6 e dalla Proposizione 4.2. \square

VI) *Normalizzazione.*

Concludiamo con un risultato che segue dalla Proposizione 4.14 come caso particolare:

DEFINIZIONE 4.15. La *normalizzazione (seminormalizzazione)* di uno spazio complesso X è uno spazio complesso normale (rispettivamente seminormale) X^* , dotato di una proiezione $\pi: X^* \rightarrow X$, tale che: 1) π è una applicazione olomorfa surgettiva propria, con fibre discrete; 2) detto S l'insieme dei punti singolari di X , l'insieme $X^* \setminus \pi^{-1}(S)$ è denso in X^* e la restrizione di π a $X^* \setminus \pi^{-1}(S)$ è un isomorfismo analitico (di varietà complesse) tra $X^* \setminus \pi^{-1}(S)$ ed $X \setminus S$.

È ben noto che ogni spazio complesso X possiede una normalizzazione (si veda ad esempio [11]).

PROPOSIZIONE 4.16. *Sia X uno spazio q-completo; allora la normalizzazione (o la seminormalizzazione) X^* di X è uno spazio q-completo (si veda [3]) e per ogni aperto Y relativamente q-completo in X la normalizzazione (rispettivamente la seminormalizzazione) Y^* di Y è un aperto relativamente q-completo in X^* .*

RIFERIMENTI

- [1] V. ANCONA, *Fasci metricamente pseudoconvessi sopra uno spazio complesso*, Ann. Univ. Ferrara, **20** (1975), pp. 49-52.

- [2] A. ANDREOTTI - H. GRAUERT, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. Fr., **90** (1962), pp. 193-259.
- [3] E. BALLICO, *Morfismi finiti tra spazi complessi e q -convessità*, Ann. Univ. Ferrara, **26** (1980), pp. 29-31.
- [4] E. BALLICO - G. BOLONDI, *On the homology groups of q -complete spaces*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **69** (1983), pp. 19-25.
- [5] S. COEN, *Some consequences of Theorem A for complex spaces*, Ann. Mat. pura e appl. (IV), **106** (1975), pp. 119-154.
- [6] A. FERRARI, *Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), **24** (1970), pp. 65-77.
- [7] G. FORNI, *Homology and cohomology with compact supports for q -convex spaces*, di prossima pubblicazione sugli Annali di Mat. pura e appl.
- [8] C. HOUZEL, *Géométrie analytique locale. II: Théorie des morphismes finis*, Séminaire H. Cartan, 1960/61, Exp. 19.
- [9] N. MIHALACHE, *The Runge theorem on 1-dimensional Stein spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. Tome XXXIII, **7** (1988), pp. 601-611.
- [10] R. NARASIMHAN, *The Levi problem for complex spaces*, Math. Ann., **142** (1961), pp. 355-365.
- [11] R. NARASIMHAN, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics n. **25**, Springer 1966.
- [12] G. SORANI, *Homologie des q -paires de Runge*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), **16** (1963), pp. 319-32.
- [13] V. VILLANI, *Fibrati vettoriali oморfi su una varietà complessa q -completa*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (3), **20** (1966), pp. 15-23.
- [14] V. VILLANI, *Funtorialità di alcune proprietà degli spazi complessi*, Seminario tenuto all'Istituto di Matematica dell'Università di Genova, 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione l'1 settembre 1989.