RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO FAGNOLA

Une caractérisation des lois exponentielles et géométriques

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 82 (1989), p. 157-161

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1989__82__157_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 82 (1989)

Une caractérisation des lois exponentielles et géométriques.

FRANCO FAGNOLA (*)

SUNTO - Assegnata una legge μ su $]0, \infty[$ (risp. su $\mathbf{N}^*$), si dà una condizione necessaria e sufficiente affinché μ sia esponenziale (risp. geometrica). Questa condizione si esprime mediante una relazione di proporzionalità tra il numero medio di salti del processo di conteggio associato a μ in un certo intervallo temporale e la lunghezza media di quest'intervallo.

Etant donnés une loi de probabilité μ sur $]0, \infty[$ et un nombre réel p strictement positif, considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes, à valeurs dans $]0, \infty[$, admettant toutes μ comme loi. Pour tout nombre réel $t \geqq 0$, posons:

$$T_n = X_1 + \ldots + X_n \,,$$

$$N_t = \sum_{n\geqq 1} I_{\{T_n \leqq t\}} \,,$$

$$u_n(t) = E[(N_t - n)^+] - pE[(t - T_n)^+] \,,$$

$$v_n(t) = E[(N_t - n)^-] - pE[(t - T_n)^-] \,.$$

La fonction v_1 peut s'écrire sous la forme

$$v_1(t) = P\{X_1 > t\} - p\int_t^\infty P\{X_1 > s\}\, ds \,.$$

(*) Indirizzo dell'A.: Università di Trento, Dipartimento di Matematica, I-38050 Povo (Trento).

On voit donc que v_1 s'annule identiquement sur $]0, \infty[$ si et seulement si μ est la loi exponentielle de paramètre p (ce qui revient à dire que $(N_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est un processus de Poisson de paramètre p): voir [1], [2].

De même, lorsque μ est concentrée sur $\mathbf{N}^*$, pour que v_1 s'annule identiquement sur $\mathbf{N}^*$ il faut et il suffit que l'on ait $p \leqq 1$ et que μ coïncide avec la loi géométrique de paramètre p.

Dans le présent article nous nous proposons de montrer que ces résultats peuvent se généraliser de la façon suivante:

Théorème. *Soit n un entier strictement positif.*

(*a*) *Pour que μ coïncide avec la loi exponentielle de paramètre p, il faut et il suffit que la fonction u_n (resp. v_n) soit identiquement nulle sur $]0, \infty[$.*

(*b*) *Pour que μ coïncide avec la loi géométrique de paramètre p, il faut et il suffit que μ soit concentrée sur $\mathbf{N}^*$ et que la fonction u_n (resp. v_n) soit identiquement nulle sur $\mathbf{N}^*$.*

Remarque. Interprétons la variable aléatoire T_n comme étant l'instant du n-ième saut du processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$. On voit alors que la relation $u_n(t) = 0$ (resp. $v_n(t) = 0$) exprime le fait que le nombre moyen de sauts dans l'intervalle temporel $]T_n \wedge t, t]$ (resp. $]t, T_n \vee t]$) soit proportionnel, selon la costante p, à la longuer moyenne du même intervalle.

Démonstration du Théorème. Pour tout entier $k \geqq 1$, désignons par μ^{*k} le produit de convolution de k copies de μ et par F_k la fonction de répartition de μ^{*k}. Posons $G_k = 1 - F_k$.

Pour tout entier $n \geqq 1$ et tout nombre réel $t > 0$ on a

$$\{T_n \leqq t\} = \{N_t \geqq n\}.$$

Par conséquent les fonctions u_n et v_n peuvent s'écrire sous la forme:

$$u_n(t) = \sum_{k>n} F_k(t) - p\int_0^t F_n(s)\,ds,$$

$$v_n(t) = \sum_{1\leqq k\leqq n} G_k(t) - p\int_t^\infty G_n(s)\,ds.$$

Désignons par f la transformée de Laplace de la loi μ:

$$f(\theta) = \int e^{-\theta t} \mu(dt) \quad \text{pour tout } \theta > 0 .$$

Alors, pour tout entier $k \geqq 1$, la transformée de Laplace de la loi μ^{*k} est égale à la fonction f^k.

Démonstration de (a).

(1) La mesure de densité F_k admet comme transformée de Laplace la fonction

$$\theta \to \theta^{-1} f^k(\theta) ;$$

(2) la mesure de densité $t \to \int_0^t F_k(s)\, ds$ admet comme transformée de Laplace la fonction

$$\theta \to \theta^{-2} f^k(\theta) ;$$

(3) la mesure de densité u_n admet comme transformée de Laplace la fonction

$$\theta \to \theta^{-1} \sum_{k > n} f^k(\theta) - p\theta^{-2} f^n(\theta) .$$

La condition que u_n soit nulle sur $]0, \infty[$ se traduit donc par la relation

$$\sum_{k > n} f^k(\theta) = p\theta^{-1} f^n(\theta) \quad \text{pur tout } \theta > 0 .$$

Or celle-ci peut se mettre sous chacune des formes équivalentes qui suivent:

$$\frac{f^{n+1}(\theta)}{1 - f(\theta)} = p\theta^{-1} f^n(\theta) \qquad \text{pour tout } \theta > 0 ,$$

$$f(\theta) = \frac{p}{\theta + p} \qquad \text{pour tout } \theta > 0 .$$

Elle équivaut donc au fait que la loi μ *coïncide* avec la loi exponentielle de paramètre p.

De façon analogue on peut raisonner dans la cas où u_n est remplacée par v_n.

DÉMONSTRATION de (*b*). Supposons maitenant que μ soit concentrée sur $\mathbf{N}^*$. On a alors, pour tout entier $m \geqq 1$,

$$u_n(m) = \sum_{k>n} F_k(m) - p \sum_{1 \leqq j < m} F_n(j) .$$

En outre:

(1) la transformée de Laplace de la mesure de densité discrète F_k est la fonction

$$\theta \to (1 - e^{-\theta})^{-1} f^k(\theta) ;$$

(2) la transformée de Laplace de la mesure de densité discrète $m \to \sum_{1 \leqq j < m} F_k(j)$ est la fonction

$$\theta \to e^{-\theta}(1 - e^{-\theta})^{-2} f^k(\theta) ;$$

(3) la transformée de Laplace de la mesure de densité discrète u_n est la fonction

$$\theta \to (1 - e^{-\theta})^{-1} \sum_{k>n} f^k(\theta) - p e^{-\theta} (1 - e^{-\theta})^{-2} f^n(\theta)$$

pour tout $\theta > 0$.

La condition que u_n s'annule identiquement sur $\mathbf{N}^*$ se traduit donc par la relation

$$(1 - e^{-\theta})^{-1} \sum_{k>n} f^k(\theta) = p e^{-\theta} (1 - e^{-\theta})^{-2} f^n(\theta)$$

pour tout $\theta > 0$.

Or cette relation peut se mettre sous la forme

$$f(\theta) = p(e^{\theta} - 1 + p)^{-1} \quad \text{pour tout } \theta > 0 .$$

Elle équivant donc au fait que $p \leqq 1$ et que μ coïncide avec la loi géométrique de paramètre p.

De façon analogue on peut raisonner dans le cas où la fonction u_n est remplacée par v_n.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. LETTA, *Sur une caractérisation classique du processus de Poisson*, Expo. Math., **2** (1984), pp. 179-182.

[2] J. GALAMBOS - S. KOTZ, *Characterizations of Probability Distributions*, Lecture Notes in Math., **675**, Springer (1978).

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1988.