Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Walter Möhres

Auflösbare Gruppen mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind. - II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 81 (1989), p. 269-287

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1989__81__269_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 81 (1989)

Auflösbare Gruppen mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind. - II.

WALTER MÖHRES (*)

In dieser Arbeit beweisen wir, daß auflösbare Gruppen von endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind, nilpotent sind. Die entsprechende Frage wurde von H. Heineken und I. J. Mohamed, [1], bereits auf einer Konferenz im Jahr 1973 aufgeworfen, und das Problem wurde von ihnen auf die Untersuchung von Erweiterungen elementarabelscher p-Gruppen durch elementarabelsche p-Gruppen reduziert. Daher handelt auch dieser Artikel zum größten Teil von solchen Erweiterungen.

Wie in der vorherigen Arbeit, auf der diese aufbaut, sei p eine feste Primzahl, und Φ sei die Klasse aller Paare (G, A), so daß A und G/A elementarabelsche p-Gruppen sind. Wir wollen also zeigen, daß für $(G, A) \in \Phi$ die Gruppe G nilpotent ist, falls alle Untergruppen von G subnormal in G sind. Unsere Taktik ist dabei folgende. Sei $(G, A) \in \Phi$ und sei G nicht nilpotent. Wir werden dann zwei Untergruppen U und V von G konstruieren, so daß $U \cap V = 1$ und $[A, {}_iU, {}_iV] \neq 1$ für alle $i \in \boldsymbol{N}$. Da $[A, {}_iU, {}_iV]$ für alle $i \in \boldsymbol{N}$ in den i-ten normalen Hüllen von U und V liegt, können U und V nicht beide subnormal sein. U und V werden wir als Vereinigung von aufsteigenden Folgen $(U_i)_{\boldsymbol{N}}$ bzw. $(V_i)_{\boldsymbol{N}}$ endlicher Untergruppen von G erhalten, so daß $[A, {}_iU_i, {}_iV_i] \neq 1$ und $U_i \cap V_i = 1$ für alle $i \in \boldsymbol{N}$. Wir stehen also vor dem Problem, gegebene Gruppen U_i und V_i auf geeignete Weise zu vergrößern. Dies können wir mit Hilfe der folgenden Aussage, nämlich Satz (2.2) lösen: Ist $(G, A) \in \Phi$ mit genügend großem G/A, ist U eine endliche Untergruppe von G und $a \in A \backslash U$, so gibt es ein

(*) Indirizzo dell'A.: Maroldstr. 24, D-8062 Markt Indersdorf (Germ. Fed.).

$x \in G \backslash UA$ mit $a \notin \langle U, x\rangle$. Auf dieses Ergebnis arbeiten wir nun hin. Ähnliche Sätze wie der eben genannte werden dabei immer wieder auftreten.

In Abschnitt (1) beweisen wir, daß für alle $n \in \boldsymbol{N}$ und für alle $(G, A) \in \Phi$ der Durchschnitt aller Untergruppen U mit $|UA/A| = p^n$ trivial ist, falls $|G/A|$ in Abhängigkeit von n groß genug ist. Dabei müssen wir die Fälle großer und kleiner Nilpotenzklasse von G unterscheiden. Der folgende Hilfssatz gibt eine obere Schranke für die Ordnung einer Untergruppe, die von n Elementen erzeugt wird.

(1.1) Lemma. Sei $(G, A) \in \Phi$.

(i) Ist U eine endliche Untergruppe von A und K eine Untergruppe von G, so daß KA/A endlich ist, so gilt $|U^K| \leqslant |U|^{|KA/A|}$.

(ii) Für alle $n \in \boldsymbol{N}$ sei $\omega(n) = 2n + p^n \binom{n}{2}$. Ist $n \in \boldsymbol{N}$ und sind

$$x_1, \ldots, x_n \in G, \text{ so gilt } |\langle x_1, \ldots, x_n\rangle| \leqslant p^{\omega(n)} .$$

Beweis. (i) Seien $U \leqslant A$ und $K \leqslant G$, so daß U und KA/A endlich sind. Sei T eine Transversale von A in KA. Dann gilt

$$U^K = \langle U^x \colon x \in K\rangle = \langle U^x \colon x \in T\rangle .$$

Da U^K abelsch ist, folgt $|U^K| \leqslant |U|^{|T|} = |U|^{|KA/A|}$.

(ii) Sei $n \in \boldsymbol{N}$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in G$. Weiter sei $K = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ und $U = \langle [x_i, x_j] \colon i, j \in \langle 1, n\rangle\rangle$. Dann ist $K' = U^K$ und daher

$$|K'| \leqslant |U|^{|KA/A|} \leqslant (p^{\binom{n}{2}})^{p^n} = p^{p^n\binom{n}{2}} .$$

Weiter hat K/K' wie G höchstens Exponenten p^2. Also ist $|K/K'| \leqslant p^{2n}$. Es folgt $|K| = |K'| \cdot |K/K'| \leqslant p^{\omega(n)}$.

Zunächst wollen wir zeigen, daß der oben erwähnte Durchschnitt trivial ist, falls die Nilpotenzklasse von G groß genug ist. Zur Vorbereitung eines Induktionsbeweises betrachten wir Untergruppen der Form $\langle U, y\rangle \cap A$ näher, wobei U eine endliche Untergruppe von G ist.

(1.2) Lemma. Sei $(G, A) \in \Phi$, sei $n \in \boldsymbol{N}_0$, seien $x_1, \ldots, x_n, y \in G$, so daß $x_1A, \ldots, x_nA, yA$ unabhängig sind, und sei $U = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

Sei $\mathfrak{S} = \langle 0, p-1\rangle^n$ und

$$\mathfrak{D} = \langle 1, p-1\rangle \times \{(j_i, \dots, j_n) \colon i \in \langle 1, n\rangle, j_i, \dots, j_n \in \langle 0, p-1\rangle, j_i \neq p-1\}.$$

Schließlich sei $R = (U \cap A)^{\langle v\rangle}$,

$$S = \langle [y^p, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n] \colon (i_1, \dots, i_n) \in \mathfrak{S}\rangle$$

und

$$D = \langle [x_{i,k}\, y, {}_{j_i}x_i, \dots, {}_{j_n}x_n] \colon (k, j_i, \dots, j_n) \in \mathfrak{D}\rangle .$$

Dann ist $\langle U, y\rangle \cap A = RSD$.

Beweis. R ist ein Normalteiler von $\langle U, y\rangle$. Weiter ist $[S, x_i] \leqslant S$ für alle $i \in \langle 1, n\rangle$ und $[S, y] = 1$. Also ist auch S ein Normalteiler von $\langle U, y\rangle$. Folglich ist $W := RSD$ eine Untergruppe von A.

Sei $(k, j_i, \dots, j_n) \in \mathfrak{D}$, $b = [x_{i,k}\, y, {}_{j_i}x_i, \dots, {}_{j_n}x_n]$, $j = j_i$ und

$$\varphi\colon c \in A \mapsto [c, {}_{j_{i+1}}x_{i+1}, \dots, {}_{j_n}x_n] \in A .$$

Ist $k \neq p-1$, so ist $[b, y] = \varphi([x_i, {}_{k+1}y, {}_jx_i]) \in D$. Ist $k = p-1$, so gilt $[b, y] = \varphi([x_i, {}_py, {}_jx_i]) = \varphi([y^p, {}_{j+1}x_i])^{-1} \in S$. Also ist $[b, y] \in W$.

Sei $s \in \langle 1, i-1\rangle$. Dann gilt

$$[b, x_s] = \varphi([x_i, y, x_s, {}_{k-1}y, {}_jx_i]) = \varphi([x_s, {}_ky, {}_{j+1}x_i])[\varphi([x_i, x_s, {}_jx_i]), {}_ky] .$$

Der erste Faktor dieses Produkts liegt in D und der zweite in R. Also ist $[b, x_s] \in W$.

Ist $j = p-2$, so ist $[b, x_i] = \varphi([x_i, y, {}_{p-1}x_i, {}_{k-1}y]) = [\varphi(x_i^p), {}_ky] \in R$. Ist $j \neq p-2$, so ist $[b, x_i] = \varphi([x_i, {}_ky, {}_{j+1}x_i]) \in D$. Also ist $[b, x_i] \in W$. Für $s \in \langle i+1, n\rangle$ ist $[b, x_s] \in D \leqslant W$.

Insgesamt folgt, daß W ein Normalteiler von $\langle U, y\rangle$ ist. Die Kommutatoren und die p-ten Potenzen der Erzeugenden von $\langle U, y\rangle = \langle x_1, \dots, x_n, y\rangle$ liegen in W. Also ist $\langle U, y\rangle / W$ eine elementarabelsche p-Gruppe. Sei nun $c \in \langle U, y\rangle \cap A$. Dann gibt es $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1} \in \langle 0, p-1\rangle$ und $w \in W$, so daß $c = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \cdot y^{\varepsilon_{n+1}} \cdot w$, also $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \cdot y^{\varepsilon_{n+1}} \equiv 1 \pmod A$. Da $x_1A, \dots, x_nA$, yA unabhängig sind, folgt $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{n+1} = 0$ und damit $c = w \in W$. Also ist $\langle U, y\rangle \cap A \leqslant W$. Natürlich gilt auch $W \leqslant \langle U, y\rangle \cap A$.

Für $(G, A) \in \Phi$, endliches $U \leqslant G$ und $a \in A \backslash U$ versuchen wir U

so zu vergrößern, daß a außerhalb bleibt. Das folgende Lemma gibt ein Kriterium dafür, wie eine Nebenklasse von A in G beschaffen sein muß, damit man ein Element aus ihr zu U hinzufügen kann, ohne daß a in dem entstehenden Erzeugnis liegt.

(1.3) Lemma. Sei $n \in \boldsymbol{N}_0$ und sei

$$\pi(n) = 1 + p^n(p+1) + p\left(2n + p^n\binom{n}{2}\right).$$

Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, $x_1, \ldots, x_n, y \in G$, $\left|[A, {}_{p-1}x_1, \ldots, {}_{p-1}x_n, {}_{p-1}y]\right| \geqslant p^{\pi(n)}$, $U = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ und $a \in A \backslash (U \cap A)^{\langle y \rangle}$. Dann existiert ein $c \in A$ mit $a \notin \langle U, yc \rangle$.

Beweis. Σ sei die Menge aller Abbildungen von $\mathcal{S} := \langle 0, p-1 \rangle^n$ in $\langle 0, p-1 \rangle$ und Δ sei die Menge der Abbildungen von

$$\mathfrak{D} := \langle 1, p-1 \rangle \times$$
$$\times \{(j_i, \ldots, j_n) : i \in \langle 1, n \rangle, j_i, \ldots, j_n \in \langle 0, p-1 \rangle, j_i \neq p-1\}$$

in $\langle 0, p-1 \rangle$. Für $x \in G$, $c \in A$, $\sigma \in \Sigma$ und $\delta \in \Delta$ sei

$$\varkappa(x, \sigma, \delta) =$$
$$= \prod_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{S}} [x^p, {}_{i_1}x_1, \ldots, {}_{i_n}x_n]^{\sigma(i_1, \ldots, i_n)} \cdot \prod_{(k, j_i, \ldots, j_n \in \mathfrak{D}} [x_i, {}_kx, {}_{j_i}x_i, \ldots, {}_{j_n}x_n]^{\delta(k, j_i, \ldots, j_n}$$

und

$$\lambda(c, \sigma, \delta) = \prod_{(i_1, \ldots, i_n) \in \mathcal{S}} [c, {}_{p-1}y, {}_{i_1}x_1, \ldots, {}_{i_n}x_n]^{\sigma(i_1, \ldots, i_n)} \cdot$$
$$\cdot \prod_{(k, j_i, \ldots, j_n) \in \mathfrak{D}} [c, x_i, {}_{k-1}y, {}_{j_i}x_i, \ldots, {}_{j_n}x_n]^{-\delta(k, j_i, \ldots, j_n)}.$$

Für $\sigma \in \Sigma$, $\delta \in \Delta$ und $u \in (U \cap A)^{\langle v \rangle} =: R$ sei $C(\sigma, \delta, u)$ die Menge aller $c \in A$ mit $\varkappa(yc, \sigma, \delta)u = a$ und $B(\sigma, \delta)$ sei der Kern des Homomorphismus $c \in A \mapsto \lambda(c, \sigma, \delta) \in A$. Sei $(\sigma, \delta, u) \in \Sigma \times \Delta \times R$. Für $c \in A$ ist $(yc)^p = y^p[c, {}_{p-1}y]$ und

$$[x_i, {}_kyc] = [x_i, yc, {}_{k-1}y] = [x_i, {}_ky][c, x_i, {}_{k-1}y]^{-1}$$

für alle $i \in \langle 1, n \rangle$ und alle $k \in \langle 1, p-1 \rangle$. Folglich gilt

$$\varkappa(yc, \sigma, \delta) = \varkappa(y, \sigma, \delta) \cdot \lambda(c, \sigma, \delta).$$

Sind nun $c, d \in C(\sigma, \delta, u)$, so gilt

$$\varkappa(y, \sigma, \delta)\cdot\lambda(c, \sigma, \delta)u = \varkappa(yc, \sigma, \delta)u =$$
$$= a = \varkappa(yd, \sigma, \delta)u = \varkappa(y, \sigma, \delta)\cdot\lambda(d, \sigma, \delta)u$$

und damit $cd^{-1} \in B(\sigma, \delta)$. Ist also $C(\sigma, \delta, u) \neq \emptyset$, so ist es eine Nebenklasse von $B(\sigma, \delta)$.

φ: $c \in A \mapsto [c, {}_{p-1}x_1, \ldots, {}_{p-1}x_n, {}_{p-1}y] \in A$ ist ein Endomorphismus von A. Nach Voraussetzung ist $|A : \mathrm{Ker}(\varphi)| = |\varphi(A)| \geqslant p^{\pi(n)}$. Ist $(\sigma, \delta) \in \Sigma \times \Delta$ mit $(\sigma, \delta) \neq (0, 0)$, so ist $B(\sigma, \delta) \leqslant \mathrm{Ker}(\varphi)$ nach [2], (1.4) (iii) und daher $|A : B(\sigma, \delta)| \geqslant p^{\pi(n)}$. Wegen $a \notin R$ ist außerdem $C(0, 0, u) = \emptyset$ für alle $u \in R$. Weiter gilt

$$|\Sigma \times \Delta \times R| \leqslant p^{p^n} \cdot p^{p^{n+1}} \cdot p^{p\cdot\omega(n)} = p^{\pi(n)-1},$$

wobei $\omega(n) = 2n + p^n\binom{n}{2}$ gemäß (1.1) definiert ist. Nach einem Satz von B. H. Neumann, [3], (4.1) kann A nicht die Vereinigung von weniger als $p^{\pi(n)}$ Nebenklassen von Untergruppen sein, deren Index in A jeweils mindestens $p^{\pi(n)}$ ist. Also gibt es ein $c \in A$, das in keinem der $C(\sigma, \delta, u)$ liegt, d.h. $a \neq \varkappa(yc, \sigma, \delta)u$ für alle $(\sigma, \delta, u) \in \Sigma \times \Delta \times R$. Nach (1.2) folgt $a \notin \langle U, yc \rangle$.

Es folgt das oben angekündigte Lemma.

(1.4) Lemma. Es gibt eine Abbildung ζ: $N_0 \to N$, so daß für alle $n \in N_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ und G nilpotent der Klasse mindestens $\zeta(n)$, so ist

$$\bigcap \{U \leqslant G : |UA/A| = p^n\} = 1 .$$

Beweis. Sei ω die Abbildung aus (1.1), β die aus [2], (3.5) und π die aus (1.3). Sei $\zeta(0) = 0$, sei

$$\zeta(1) = 2 + (p-1)\max\{\beta(1, 1), 1 + \pi(1)\}$$

und für alle $n \in N$ mit $n \geqslant 2$ sei

$$\zeta(n) = 2 + (p-1)\max\{\zeta(n-1), n-1+\beta(1, \omega(n-1)), n + \pi(n)\} .$$

Dann gilt die Behauptung des Satzes für $n = 0$. Sei nun $n \in \boldsymbol{N}$, und sei die Aussage für $n-1$ richtig. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, G nilpotent der Klasse mindestens $\zeta(n)$ und $a \in A \backslash 1$.

Sei $m = \max\{\beta(1, 1), 1 + \pi(1)\}$, falls $n = 1$, und ansonsten sei

$$m = \max\{\zeta(n-1), n-1+\beta(1, \omega(n-1)), n+\pi(n)\} .$$

Da die Klasse von G mindestens $2+(p-1)m$ ist, ist $A \not\leqslant Z_{m(p-1)}(G)$. Nach [2], (1.4) gibt es deshalb $x_1, \ldots, x_m \in G$ und ein $b \in A$, so daß $[b, {}_{p-1}x_1, \ldots, {}_{p-1}x_m] \neq 1$. Sei $H = \langle A, x_1, \ldots, x_m \rangle$.

Sei zunächst $n \geqslant 2$. Da die Klasse von H mindestens $(p-1)m$, also auch mindestens $\zeta(n-1)$ ist, gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein $U \leqslant H$ mit $|UA/A| = p^{n-1}$ und $a \notin U$. Sei $H/A = UA/A \times K/A$ mit einer geeigneten Untergruppe K. Dann ist $|K/A| \geqslant p^{\beta(1, \omega(n-1))}$. Es gibt $y_1, \ldots, y_{n-1} \in U$ mit $UA = \langle A, y_1, \ldots, y_{n-1} \rangle$. Sei $V = \langle y_1, \ldots, y_{n-1} \rangle$. Nach (1.1) ist $|V \cap A| \leqslant |V| \leqslant p^{\omega(n-1)}$. Also existiert nach [2], (3.5) ein $y_n \in K \backslash A$ mit $a \notin (V \cap A)^{\langle y_n \rangle}$. Es gibt nun $y_{n+1}, \ldots, y_m \in K$, so daß $y_1 A, \ldots, y_m A$ unabhängig sind. Nach [2], (1.5) gilt dann $[b, {}_{p-1}y_1, \ldots$ $\ldots, {}_{p-1}y_m] \neq 1$. Für $n = 1$ setzen wir $V = 1$ und $y_i = x_i$ für alle $i \in \langle 1, m \rangle$.

Nach [2], (1.4) (iii) folgt

$$\begin{aligned} &|[A, {}_{p-1}y_1, \ldots, {}_{p-1}y_n]| \geqslant \\ &\geqslant |\langle [b, {}_{p-1}y_1, \ldots, {}_{p-1}y_n, {}_{i_{n+1}}y_{n+1}, \ldots, {}_{i_m}y_m] \colon i_{n+1}, \ldots, i_m \in \langle 1, p-1 \rangle \rangle| = \\ &= p^{p^{m-n}} \geqslant p^{m-n} \geqslant p^{\pi(n)} . \end{aligned}$$

Also gibt es nach (1.3) ein $c \in A$ mit $a \notin \langle V, y_n c \rangle =: W$. Dann gilt $|WA/A| = p^n$.

Damit ist der Fall der Gruppen großer Klasse erledigt. Wir wenden uns nun den übrigen Gruppen zu. Dazu benötigen wir das folgende Lemma über ganzzahlige Polynome.

(1.5) Lemma. Es gibt eine Abbildung $\alpha\colon \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, so daß für alle $e, m, n \in \boldsymbol{N}$ folgendes gilt:

Sei $t = \alpha(e, m, n)$. Sind $f_1, \ldots, f_m \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_t]$ homogene Polynome vom Grad mindestens 1 und höchstens n, so gibt es $k_1, \ldots, k_t \in \boldsymbol{Z}$, die nicht alle durch p teilbar sind, so daß $f_i(k_1, \ldots, k_t) \equiv 0 \pmod{p^e}$ für alle $i \in \langle 1, m \rangle$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion nach n. Sind $f_1, \ldots, f_m \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_{m+1}]$ homogen vom Grad 1, so besitzt das lineare Gleichungssystem

$$f_i(x_1, \ldots, x_{m+1}) = 0\ , \qquad i \in \langle 1, m \rangle$$

eine nichttriviale Lösung in $\boldsymbol{Q}^{m+1}$ und daher auch eine nichttriviale Lösung $(n_1, \ldots, n_{m+1}) \in \boldsymbol{Z}^{m+1}$. Sei $k_i = n_i/\mathrm{ggT}\,(n_1, \ldots, n_{m+1})$ für alle $i \in \langle 1, m+1 \rangle$.

Dann ist $(k_1, \ldots, k_{m+1}) \in \boldsymbol{Z}^{m+1}$, nicht alle k_i sind durch p teilbar und $f_i(k_1, \ldots, k_{m+1}) = 0$ für alle $i \in \langle 1, m \rangle$. Wir können also $\alpha(e, m, 1) = m + 1$ setzen für alle $e, m \in \boldsymbol{N}$.

Sei nun $n \in \boldsymbol{N}$ mit $n \geqslant 2$, und sei $\alpha|_{\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\times\langle 1, n-1 \rangle}$ bereits definiert und habe die gewünschten Eigenschaften. Seien $e, m \in \boldsymbol{N}$. Weiter sei $t(0) = 0$, $s(1) = 1$, $t(k) = t(k-1) + s(k)$ und $s(k+1) = \alpha(e, m \cdot n^{t(k)}, n-1)$ für alle $k \in \boldsymbol{N}$. Schließlich sei $q = (p^e - 1)p^{em} + 1$ und $t = t(q)$.

Für alle $i \in \langle 1, m \rangle$ sei $f_i \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_t]$ ein homogenes Polynom in den Variablen $x_1, \ldots, x_t$ mit $n_i := \mathrm{grad}\,(f_i) \in \langle 1, n \rangle$. Es seien $y_1, \ldots, y_q$ weitere Unbekannte. Wir zeigen nun, daß es für alle $j \in \langle 1, t \rangle$ ein $a(j) \in \boldsymbol{Z}$, für alle $(i, k) \in \langle 1, m \rangle \times \langle 1, q \rangle$ ein $b(i, k) \in \boldsymbol{Z}$ und für alle $(i, k) \in \langle 1, m \rangle \times \langle 0, q \rangle$ ein homogenes Polynom $g_{i,k} \in \boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_{t(k)}]$ vom Grad n_i gibt, so daß folgendes gilt:

Für alle $k \in \langle 1, q \rangle$ sind nicht alle Einträge von

$$c(k) := \big(a(t(k-1)+1), \ldots, a(t(k))\big)$$

durch p teilbar. Für alle $k \in \langle 0, q \rangle$ und alle $i \in \langle 1, m \rangle$ gilt

$$(*) \qquad f_i(x_1, \ldots, x_{t(k)}, c(k+1)\,y_{k+1}, \ldots, c(q)\,y_q) \equiv$$
$$\equiv g_{i,k}(x_1, \ldots, x_{t(k)}) + b(i, k+1)\cdot y_{k+1}^{n_i} + \ldots + b(i, q)\cdot y_q^{n_i} \qquad (\mathrm{mod}\ p^e)\ .$$

Setzt man $g_{i.q} = f_i$ für alle $i \in \langle 1, m \rangle$, so gilt $(*)$ für $k = q$. Sei nun $k \in \langle 1, q \rangle$, und seien $a(j)$ für $j \in \langle t(k)+1, q \rangle$, $b(i, l)$ für $(i, l) \in \langle 1, m \rangle \times \langle k+1, q \rangle$ und $g_{i.l}$ für $(i, l) \in \langle 1, m \rangle \times \langle k, q \rangle$ bereits gegeben. Sei $r = t(k-1)$ und $s = t(k)$. Für $v = (v_1, \ldots, v_r) \in \boldsymbol{N}_0$ sei $\sigma(v) = \sum_{j=1}^{r} v_j$ und für alle $i \in \langle 1, m \rangle$ sei $V_i = \{v \in \boldsymbol{N}_0^r \colon \sigma(v) \leqslant n_i\}$. Für alle $i \in \langle 1, m \rangle$ ist

$$g_{i,k}(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{v \in V_i} h_{i.v}(x_{r+1}, \ldots, x_s)\cdot x_1^{v_1} \ldots x_r^{v_r}$$

mit geeigneten Polynomen $h_{i.v} \in \boldsymbol{Z}[x_{r+1}, \dots, x_s]$ für alle $v \in V_i$. Dann ist $M := \{h_{i.v}\colon i \in \langle 1, m\rangle,\ v \in V_i,\ \sigma(v) \in \langle 1, n_i - 1\rangle\}$ eine Menge von homogenen Polynomen aus $\boldsymbol{Z}[x_{r+1}, \dots, x_s]$, deren Grade zwischen 1 und $n-1$ liegen. Außerdem ist $|M| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |V_i| \leqslant m \cdot n^r$. Da nun

$$s - r = t(k) - t(k-1) = s(k) = \alpha(e, m\cdot n^r, n-1)\,,$$

gibt es nach Induktionsvoraussetzung $a(r+1), \dots, a(s) \in \boldsymbol{Z}$, die nicht alle durch p teilbar sind, so daß $h(a(r+1), \dots, a(s)) \equiv 0 \pmod{p^e}$ für alle $h \in M$. Für alle $i \in \langle 1, m\rangle$ sei $b(i, k) = h_{i,(0,\dots,0)}(a(r+1), \dots$ $\dots, a(s))$. Für alle $i \in \langle 1, m\rangle$ und alle $v \in V_i$ mit $\sigma(v) = n_i$ ist $h_{i.v}$ ein konstantes Polynom. Sei also

$$g_{i,k-1} = \sum_{v \in V_i,\, \sigma(v) = n_i} h_{i.v} \cdot x_1^{v_1} \dots x_r^{v_r}$$

für alle $i \in \langle 1, m\rangle$. Weiter sei $c(k) = (a(r+1), \dots, a(s))$. Es gilt nun für alle $i \in \langle 1, m\rangle$:

$$\begin{aligned} g_{i,k}(x_1, \dots, x_r, c(k)y_k) &= \sum_{v \in V_i} h_{i.v}(c(k)y_k) \cdot x_1^{v_1} \dots x_r^{v_r} \equiv \\ &\equiv g_{i,k-1}(x_1, \dots, x_r) + h_{i,(0,\dots,0)}(c(k)y_k) = \\ &= g_{i,k-1}(x_1, \dots, x_r) + b(i, k)\cdot y_k^{n_i} \pmod{p^e}\,. \end{aligned}$$

Die Zwischenbehauptung folgt also per Induktion nach k.

Für alle $i \in \langle 1, m\rangle$ ist natürlich $g_{i,0} = 0$ und daher

$$f_i(c(1)y_1, \dots, c(q)y_q) \equiv b(i, 1)\cdot y_1^{n_i} + \dots + b(i, q)\cdot y_q^{n_i} \pmod{p^e}\,.$$

Die Vektoren $(b(1, k), \dots, b(m, k)) \in \boldsymbol{Z}^m$ können modulo p^e nur p^{em} verschiedene Werte annehmen. Da nun $q = (p^e - 1)p^{em} + 1$, gibt es paarweise verschiedene $l(1), \dots, l(p^e) \in \langle 1, q\rangle$, so daß

$$b(i, l(1)) \equiv \dots \equiv b(i, l(p^e)) \pmod{p^e}$$

für alle $i \in \langle 1, m\rangle$. Für alle $k \in \langle 1, q\rangle$ sei

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k \in \{l(1), \dots, l(p^e)\}\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Dann gilt

$$f_i(c(1)w_1, \dots, c(q)w_q) \equiv b(i,1)\cdot w_1^{n_i} + \dots + b(i,q)\cdot w_q^{n_i} =$$
$$= b(i, l(1)) + \dots + b(i, l(p^e)) \equiv 0 \pmod{p^e}$$

für alle $i \in \langle 1, m\rangle$. Sei nun $(k_1, \dots, k_t) = (c(1)w_1, \dots, c(q)w_q)$. Da nicht alle Einträge von $c(l(1))$ durch p teilbar sind, sind auch nicht alle k_j durch p teilbar. Außerdem ist $f_i(k_1, \dots, k_t) \equiv 0 \pmod{p^e}$ für alle $i \in \langle 1, m\rangle$. Wir können daher $\alpha(e, m, n) = t$ setzen.

(1.6) Satz. Sei $c \in \boldsymbol{N}$ mit $c \geqslant 2$. Sei G eine nilpotente p-Gruppe der Klasse höchstens c. Der abelsche Normalteiler $K_c(G)$ habe Rang 1. Sei U eine endliche Untergruppe von G mit $K_c(U) = 1$. Sei $|U| \leqslant p^n$ mit einem geeigneten $n \in \boldsymbol{N}$, und sei $t = \alpha(n, (n+1)^c, c)$. Sei H ein Normalteiler von G, so daß G/H eine elementarabelsche p-Gruppe der Ordnung mindestens p^t ist. Dann existiert ein $y \in G\backslash H$ mit $K_c(\langle U, y\rangle) = 1$.

Beweis. Es gibt $z_1, \dots, z_n \in U$, so daß $U = \langle z_1, \dots, z_n\rangle$. Sei

$$I = \{(i_1, \dots, i_c) \in \langle 1, n+1\rangle^c :$$
$$n+1 \in \{i_1, \dots, i_c\},\ \{i_1, \dots, i_c\} \cap \langle 1, n\rangle \neq \emptyset\}.$$

Da $|G/H| \geqslant p^t$, gibt es $y_1, \dots, y_t \in G$, so daß $y_1H, \dots, y_tH$ unabhängig sind.

Sei $i = (i_1, \dots, i_c) \in I$. Sei $\varphi_i\colon z_{n+1} \in G \mapsto [z_{i_1}, \dots, z_{i_c}] \in K_c(G)$. Weiter sei $Q = \{j \in \langle 1, c\rangle : i_j = n+1\}$, $q = |Q|$ und $\pi\colon \langle 1, q\rangle \to Q$ die eindeutig bestimmte monoton wachsende Bijektion. Für alle $w_1, \dots, w_q \in G$ sei $\psi_i(w_1, \dots, w_q) = [v_1, \dots, v_c]$, wobei $v_i = z_{i_j}$, falls $j \notin Q$, und $v_{\pi(j)} = w_j$ für alle $j \in \langle 1, q\rangle$. Dann ist $\varphi_i(x) = \psi_i(x, \dots, x)$ für alle $x \in G$. Da $K_{c+1}(G) = 1$, gilt dann für alle $(s_1, \dots, s_t) \in \boldsymbol{Z}^t$:

$$\varphi_i(y_1^{s_1} \dots y_t^{s_t}) = \psi_i(y_1^{s_1} \dots y_t^{s_t}, \dots, y_1^{s_1} \dots y_t^{s_t}) =$$
$$= \prod_{j(1)=1}^{t} \dots \prod_{j(q)=1}^{t} \psi_i(y_{j(1)}^{s_{j(1)}}, \dots, y_{j(q)}^{s_{j(q)}}) = \prod_{j(1)=1}^{t} \dots \prod_{j(q)=1}^{t} \psi_i(y_{j(1)}, \dots, y_{j(q)})^{s_{j(1)}\dots s_{j(q)}}.$$

Da $K_c(G)$ Rang 1 hat, gibt es ein $a \in G$ mit $\langle a\rangle = \{x \in K_c(G) : x^{p^n} = 1\}$. Sei $j = (j(1), \dots, j(q)) \in \langle 1, t\rangle^q$. Wegen $(i_1, \dots, i_c) \neq (n+1, \dots, n+1)$ ist $\psi_i(y_{j(1)}, \dots, y_{j(q)})$ ein Kommutator der Länge c, an dem ein Element aus U, also ein Element der Ordnung höchstens p^n, beteiligt ist, und dessen Ordnung daher ebenfalls höchstens p^n ist. Folglich gibt es ein $\alpha_j \in \mathbf{Z}$ mit $\psi_i(y_{j(1)}, \ldots, y_{j(q)}) = a^{\alpha_j}$. Sei

$$f_i = \sum_{j=(j(1),\ldots,j(q))\in\langle 1,t\rangle^q} \alpha_j \cdot x_{j(1)} \ldots x_{j(q)} \in \mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_t] .$$

Dann gilt

$$\varphi_i(y_1^{s_1} \ldots y_t^{s_t}) = a^{f_i(s_1,\ldots,s_t)} \qquad \text{für alle } (s_1, \ldots, s_t) \in \mathbf{Z}^t .$$

Außerdem ist f_i ein homogenes Polynom vom Grad $q \in \langle 1, c\rangle$.

Sei $M = \{f_i : i \in I\}$. Dann ist M eine Menge von homogenen Polynomen aus $\mathbf{Z}[x_1, \ldots, x_t]$, deren Grade zwischen 1 und c liegen, und es ist $|M| \leqslant |I| \leqslant (n+1)^c$. Wegen $t = \alpha(n, (n+1)^c, c)$ gibt es nach (1.5) ein $(k_1, \ldots, k_t) \in \mathbf{Z}^t$, so daß nicht alle k_j durch p teilbar sind und für alle $f \in M$ gilt

$$f(k_1, \ldots, k_t) \equiv 0 \qquad (\bmod p^n) .$$

Sei $y = y_1^{k_1} \ldots y_t^{k_t}$. Dann ist $y \in G \backslash H$ und

$$K_c(\langle U, y\rangle) = \langle K_c(U), \varphi_i(y) : i \in I\rangle = \langle a^{f_i(k_1,\ldots,k_t)} : i \in I\rangle = 1 .$$

Der folgende Satz ist ein Analogon zu [2], (3.1).

(1.7) Lemma. Sei Ψ eine Klasse von Tripeln (G, A, M), so daß $(G, A) \in \Phi$ und M eine Menge von Untergruppen von G ist.

Es existiere eine Abbildung $\gamma : \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}$, so daß für alle $k \in \mathbf{N}$ folgendes gilt:

Ist $(G, A, M) \in \Psi$, $|G/A| \geqslant p^{\gamma(k)}$ und $U \in M$ mit $|U| \leqslant p^k$, so gibt es ein $y \in G \backslash UA$ mit $\langle U, y\rangle \in M$.

Dann existiert eine Abbildung $\delta : \mathbf{N} \times \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}$, so daß für alle $m \in \mathbf{N}$ und $k \in \mathbf{N}_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A, M) \in \Psi$, $|G/A| \geqslant p^{\delta(m,k)}$ und $U \in M$ mit $|U| \leqslant p^k$, so gibt es ein $V \in M$ mit $U \leqslant V$ und $|VA/UA| = p^m$.

BEWEIS. ω sei die Abbildung aus (1.1). Für alle $k \in \boldsymbol{N}_0$ und alle $m \in \boldsymbol{N}$ mit $m \geqslant 2$ sei $\delta(1, k) = \gamma(k)$ und

$$\delta(m, k) = \max\left\{\gamma(k),\ \delta(m-1,\ \omega(k+1))\right\}.$$

Dann gilt die Behauptung für $m = 1$. Sei nun die Aussage für ein $m - 1 \in \boldsymbol{N}$ richtig. Weiter sei $k \in \boldsymbol{N}_0$, $(G, A, M) \in \Psi$, $|G/A| \geqslant p^{\delta(m,k)}$ und $U \in M$ mit $|U| \leqslant p^k$.

Da $|G/A| \geqslant p^{\gamma(k)}$, gibt es ein $y \in G \backslash UA$ mit $V := \langle U, y\rangle \in M$. Weil V von $k+1$ Elementen erzeugt wird, ist $|V| \leqslant p^{\omega(k+1)}$ nach (1.1). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $W \in M$ mit $V \leqslant W$ und $|WA/VA| = p^{m-1}$. Es folgt $U \leqslant W$ und

$$|WA/UA| = |WA/VA|\,|VA/UA| = p^m .$$

Lemma (1.8) zeigt unseren angestrebten Satz für den Fall, daß die Nilpotenzklassen der Gruppen G beschränkt sind.

(1.8) LEMMA. Es gibt eine Abbildung ϱ: $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, so daß für alle $c, n \in \boldsymbol{N}$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$, G nilpotent der Klasse höchstens c und $|G/A| \geqslant p^{\varrho(c,n)}$, so ist

$$\bigcap \{U \leqslant G\colon |UA/A| = p^n\} = 1 .$$

BEWEIS. Sei $\varrho(1, n) = n + 1$ für alle $n \in \boldsymbol{N}$. Dann gilt die Aussage für $c = 1$. Für eine $c - 1 \in \boldsymbol{N}$ sei $\varrho|_{\langle 1, c-1\rangle \times \boldsymbol{N}}$ gegeben.

Sei α die Abbildung aus (1.5). Sei $\gamma(0) = 1$ und

$$\gamma(k) = k + \alpha(k, (k+1)^c, c) \qquad \text{für alle } k \in \boldsymbol{N}.$$

Nach (1.6) gilt dann für alle $k \in \boldsymbol{N}$ folgendes:

Ist $(G, A) \in \Phi$, G nilpotent der Klasse höchstens c, $K_c(G)$ zyklisch, $|G/A| \geqslant p^{\gamma(k)}$ und $U \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^k$ und $K_c(U) = 1$, so gibt es ein $y \in G \backslash UA$ mit $K_c(\langle U, y\rangle) = 1$. Für die Anwendung von (1.6) setze man $H = UA$. Nach (1.7) existiert dann eine Abbildung δ: $\boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{N}$, so daß für alle $(m, k) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$, G nilpotent der Klasse höchstens c, $K_c(G)$ zyklisch, $|G/A| \geqslant p^{\delta(m,k)}$ und $U \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^k$ und $K_c(U) = 1$, so gibt es ein $V \leqslant G$ mit $U \leqslant V$, $K_c(V) = 1$ und $|VA/UA| = p^m$.

Sei $\varrho(c, n) = \delta(\varrho(c-1, n), 0)$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, G nilpotent der Klasse höchstens c, $|G/A| \geq p^{\varrho(c,n)}$ und $a \in A \backslash 1$. Sei N ein maximaler Normalteiler von G mit $a \notin N \leq A$. Dann ist $(G/N, A/N) \in \Phi$, G/N nilpotent der Klasse höchstens c, $Z(G/N) \cap A/N$ und damit auch auch $K_c(G/N)$ zyklisch und $|(G/N)/(A/N)| \geq p^{\delta(\varrho(c-1,n),0)}$. Also gibt es ein $V/N \leq G/N$ mit $K_c(V/N) = 1$ und $|(V/N \cdot A/N)/(A/N)| = p^{\varrho(c-1,n)}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $U/N \leq V/N$ mit $aN \notin U/N$ und $|(U/N \cdot A/N)/(A/N)| = p^n$. Dann ist $x \notin U$ und $|UA/A| = p^n$.

Satz (1.9), das Hauptergebnis von Abschnitt (1), faßt nun die Resultate von (1.4) und (1.8) zusammen.

(1.9) Satz. Es gibt eine Abbildung η: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, so daß für alle $n \in \boldsymbol{N}$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\eta(n)}$, so ist

$$\bigcap \{U \leq G \colon |UA/A| = p^n\} = 1 \,.$$

Beweis. ζ sei die Abbildung aus (1.4) und ϱ sei die aus (1.8). Für alle $n \in \boldsymbol{N}$ sei $\eta(n) = \varrho(\zeta(n), n)$.

Sei $n \in \boldsymbol{N}$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\eta(n)}$. Wir können annehmen, daß G/A endlich und damit G nilpotent ist. Ist die Klasse von G mindestens $\zeta(n)$, so folgt die Behauptung aus (1.4), und ansonsten aus (1.8).

Unser nächstes Ziel ist es, für $(G, A) \in \Phi$ und endliche Untergruppen U, V von G mit $U \cap V = 1$ und $UA \cap VA = A$ zu zeigen, daß man U vergrößern kann durch ein $W \leq G$ mit $\langle U, W \rangle \cap V = 1$ und $\langle U, W \rangle A \cap VA = A$. Hierfür ist der Fall $|V| = p$ und $U \cap A = 1$ wesentlich, den das folgende Lemma behandelt.

(2.1) Lemma. Es gibt eine Abbildung ϑ: $\boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{N}$, so daß für alle $n \in \boldsymbol{N}_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\vartheta(n)}$ und $U \leq G$ mit $|U| \leq p^n$ und $U \cap A = 1$, so ist

$$\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x \rangle = U \,.$$

Beweis. (i) β sei die Abbildung aus [2], (3.5) und η die aus (1.9). Setzt man $\vartheta(0) = \eta(1)$, so gilt die Aussage für $n = 0$. Sei nun $n \in \boldsymbol{N}$ im folgenden fest, und sei $I = \langle 0, p-1 \rangle^n$. Weiter sei $\tau(\emptyset) = 2$, $\tau(M) = \beta(\eta(1), n)$ für einelementige Teilmengen M von I und für mehrelementige Teilmengen M von I sei

$$\tau(M) = \beta\big(\eta(\max\{\tau(N): N \subset M, N \neq M\}), n\big).$$

Wir zeigen nun, daß für alle $M \subseteq I$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$, $U = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \leqslant G$ mit $U \cap A = 1$, $|G/UA| \geqslant p^{\tau(M)}$ und $\{(i_1, \dots, i_n) \in I: [A, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n] \neq 1\} = M$, so ist

$$\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x \rangle = U.$$

Ist diese Aussage gezeigt, so folgt die Behauptung des Lemmas für n, wenn wir $\vartheta(n) = n + \max\{\tau(M): M \subseteq I\}$ setzen. Wir führen nun den Beweis per Induktion nach $|M|$.

(ii) Ist $M = \emptyset$, so ist $A = 1$ und die Aussage ist somit richtig. Sei M eine einelementige Teilmenge von I und seien $G, A, x_1, \dots, x_n, U$ wie oben gegeben. Dann ist $M = \{(0, \dots, 0)\}$, d.h. $[A, U] = 1$. Wegen $U \cap A = 1$ ist außerdem $U' U^p = 1$ und folglich UA ein elementar-abelscher Normalteiler von G. Also ist $(G, UA) \in \Phi$. Weiter ist $|G/UA| \geqslant p^{\beta(\eta(1), n)}$. Sei $a \in A \setminus 1$. Dann ist $a \in UA \setminus U$. Nach [2], (3.5) existiert folglich ein $H \leqslant G$ mit $H \geqslant UA$, $|H/UA| = p^{\eta(1)}$ und $a \notin U^H =: N$. Da $aN \neq 1$ und $|(H/N)/(UA/N)| = p^{\eta(1)}$, gibt es nach (1.9) ein $x \in H \setminus UA$ mit $aN \notin \langle xN \rangle$, also $a \notin \langle N, x \rangle \geqslant \langle U, x \rangle$.

(iii) Sei nun M eine mehrelementige Teilmenge von I, und die Behauptung sei richtig für alle echten Teilmengen von M. Weiter sei $(i_1, \dots, i_n) \in M$, so daß $\sum_{j=1}^{n} i_j$ maximal ist. Schließlich sei

$$r = \max\{\tau(N): N \subset M, N \neq M\}.$$

Dann ist $\tau(M) = \beta(\eta(r), n)$. Der Induktionsschritt erfolgt in zwei Teilen.

(a) Sei

$$(G, A) \in \Phi, \qquad U = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \leqslant G$$

mit $U \cap A = 1$, $|G/UA| \geqslant p^r$,

$$\{(j_1, \dots, j_n) \in I: [A, {}_{j_1}x_1, \dots, {}_{j_n}x_n] \neq 1\} \subseteq M,$$

$a \in A$ und $a \notin [A, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n] =: B$ Dann ist $aB \in A/B \backslash 1$ und

$$N := \{(j_1, \dots, j_n) \in I\colon [A/B, {}_{j_1}x_1B, \dots, {}_{j_n}x_nB] \neq 1\}$$

ist eine echte Teilmenge von M, da $(i_1, \dots, i_n) \notin N$. Weiter ist

$$|(G/B)/((UB/B)(A/B))| = |G/UA| \geqslant p^r \geqslant p^{\tau(N)}$$

und

$$UB/B \cap A/B = (UB \cap A)/B = (U \cap A)B/B = 1\,.$$

Folglich gibt es ein $x \in G \backslash UA$ mit $aB \notin \langle UB/B, xB\rangle$ und damit insbesondere $a \notin \langle U, x\rangle$.

(*b*) Sei

$$(G, A) \in \Phi\,, \qquad U = \langle x_1, \dots, x_n\rangle \leqslant G$$

mit $U \cap A = 1$, $|G/UA| \geqslant p^{\tau(M)}$,

$$\{(j_1, \dots, j_n) \in I\colon [A, {}_{j_1}x_1, \dots, {}_{j_n}x_n] \neq 1\} = M \qquad \text{und } a \in A \backslash 1\,.$$

Ist $a \notin [A, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n] =: B$, so gibt es wegen $\tau(M) = \beta(\eta(r), n) \geqslant \geqslant \eta(r) \geqslant r$ nach (*a*) ein $x \in G \backslash UA$ mit $a \notin \langle U, x\rangle$. Sei also $a \in B$. Dann existiert ein $b \in A$ mit $a = [b, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n]$. Wegen der Maximalität von $\sum_{j=1}^{n} i_j$ gilt

$$[A, x_i] \leqslant \{c \in A\colon [c, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n] = 1\} =: C$$

für alle $i \in \langle 1, n\rangle$, also $[A, U] \leqslant C$. Sei $D = UA$. Dann ist D/C ein elementarabelscher Normalteiler von G/C und deshalb $(G/C, D/C) \in \Phi$. Weiter is $b \notin C = C(U \cap A) = UC \cap A$, also $bC \notin UC/C$,

$$|(G/C)/(D/C)| = |G/D| = |G/UA| \geqslant p^{\beta(\eta(r), n)}$$

und $|UC/C| \leqslant p^n$. Folglich existiert nach [2], (3.5) ein $H \leqslant G$ mit $H \geqslant D$, $|H/D| = p^{\eta(r)}$ und $bC \notin (UC/C)^{H/C}$, d.h. $b \notin (UC)^H =: N$. Also ist

$$|(H/N)/(D/N)| = p^{\eta(r)} \qquad \text{und} \qquad bN \in H/N \backslash 1\,.$$

Nach (1.9) folgt, daß es $L \leqslant H$ gibt mit $L \geqslant N$, $|(L/N)(D/N)/(D/N)| = p^r$ und $bN \notin L/N$, d.h. $b \notin L$. Wegen $U \leqslant N \leqslant L$ und $D = UA$ folgt

$$|L/U(L \cap A)| = |L/(L \cap UA)| = |LD/D| = p^r .$$

Wäre $a \in [L \cap A, {}_{i_1}x_1, \ldots, {}_{i_n}x_n] =: E$, so gäbe es ein $e \in L \cap A$ mit $[e, {}_{i_1}x_1, \ldots, {}_{i_n}x_n] = a = [b, {}_{i_1}x_1, \ldots, {}_{i_n}x_n]$, also $e^{-1}b \in C \leqslant N \leqslant L$ und damit $b = e(e^{-1}b) \in L$ im Widerspruch zur Wahl von L. Folglich ist $a \notin E$ und daher existiert nach (ii) ein $x \in L \backslash U(L \cap A)$ mit $a \notin \langle U, x\rangle$. Wegen $U(L \cap A) = L \cap UA$ ist dann auch $x \notin UA$.

Es folgt $\left(\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x\rangle\right) \cap A = 1$ und somit $\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x\rangle = U$. Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nun verallgemeinern wir (2.1), indem wir die Voraussetzung $U \cap A = 1$ weglassen.

(2.2) Satz. Es gibt eine Abbildung μ: $N_0 \to N$, so daß für alle $n \in N_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geqslant p^{\mu(n)}$ und $U \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^n$, so ist

$$\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x\rangle = U .$$

Beweis. ϑ sei die Abbildung aus (2.1), β die aus [2], (3.5). Sei $\mu(0) = \vartheta(0)$ und $\mu(n) = \max\{\vartheta(n), \beta(\mu(n-1), n)\}$ für alle $n \in N$. Für $n = 0$ ist dann die Aussage nach (2.1) richtig. Sei die Behauptung für ein $n - 1 \in N_0$ richtig.

Sei $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geqslant p^{\mu(n)}$ und sei $U \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^n$. Ist $U \cap A = 1$, so gilt wegen $|G/A| \geqslant p^{\vartheta(n)}$ nach (2.1) $\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x\rangle = U$. Sei also $U \cap A \neq 1$. Wegen $\bigcap_{x \in G \setminus UA} \langle U, x\rangle \leqslant UA$ können wir annehmen, daß ein $a \in A \backslash U$ existiert. Sei $r = \mu(n-1)$. Nach [2], (3.5) existiert ein $H \leqslant G$ mit $H \geqslant A$, $|H/A| = p^r$ und $a \notin (U \cap A)^H =: N$. Dann ist $a \notin N = N(U \cap A) = UN \cap A$, d.h. $aN \notin UN/N$, $|UN/N| \leqslant p^{n-1}$, da $U \cap A \neq 1$, und $|(H/N)/(A/N)| = p^{\mu(n-1)}$. Nach Induktionsannahme gibt es folglich ein $x \in H \backslash UA$ mit $aN \notin \langle UN/N, xN\rangle$ und damit insbesondere $a \notin \langle U, x\rangle$.

Nun folgt das angekündigte Resultat.

(2.3) Lemma. Es gibt eine Abbildung ξ: $N_0 \times N_0 \times N \to N$, so daß für alle $n, k \in N_0$ und $m \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$, sind $U, V \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^n$, $|V| \leqslant p^k$ und $U \cap V = 1$ und ist $K \leqslant G$ mit $G/A = K/A \times UA/A \times VA/A$ und $|K/A| \geqslant p^{\xi(n,k,m)}$, so existiert ein $W \leqslant K$ mit $|WA/A| = p^m$ und $\langle U, W\rangle \cap V = 1$.

Beweis. Wegen (2.2) und (1.7) gibt es eine Abbildung $\nu\colon \boldsymbol{N} \times \times \boldsymbol{N}_0 \to \boldsymbol{N}$, so daß für alle $(m, n) \in \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geqslant p^{\nu(m,n)}$, $U \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^n$ und $a \in A \backslash U$, so existiert ein $L \leqslant G$ mit $L \geqslant U$, $|LA/UA| = p^m$ und $a \notin L$.

Sei $\xi(n, 0, m) = m$ und $\xi(n, k, m) = \nu(\xi(n, k-1, m), n)$ für alle $(n, k, m) \in \boldsymbol{N}_0 \times \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$. Dann gilt die Aussage für $k = 0$. Sei die Behauptung richtig für ein $k - 1 \in \boldsymbol{N}_0$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, seien $U, V \leqslant G$ mit $|U| \leqslant p^n$, $|V| \leqslant p^k$ und $U \cap V = 1$ und es sei $K \leqslant G$ mit

$$G/A = K/A \times UA/A \times VA/A \qquad \text{und} \qquad |K/A| \geqslant p^{\xi(n,k,m)}.$$

Dann ist $|UK/A| \geqslant p^{\nu(\xi(n,k-1,m),n)}$. Wir können annehmen, daß ein $v \in V \backslash 1$ existiert. Dann gibt es ein $L \leqslant UK$ mit $L \geqslant U$, $|LA/UA| = p^{\xi(n,k-1,m)}$ und $v \notin L$. Dann ist $|V \cap L| < |V|$ und daher $|V \cap L| \leqslant p^{k-1}$. Weiter ist

$$L = UK \cap L = U(L \cap K)$$

und

$$U(L \cap A) \cap (L \cap K) \leqslant UA \cap (L \cap K) = L \cap (UA \cap K) = L \cap A\,,$$

also

$$L/(L \cap A) = (L \cap K)/(L \cap A) \times U(L \cap A)/(L \cap A)\,.$$

Schließlich ist

$$|(L \cap K)/(L \cap A)| = |L/U(L \cap A)| = \\ = |L/(L \cap UA)| = |LA/UA| = p^{\xi(n,k-1,m)}\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $W \leqslant L \cap K$ mit

$$|W(L \cap A)/(L \cap A)| = p^m \qquad \text{und} \qquad \langle U, W\rangle \cap (L \cap V) = 1\,.$$

Dann ist

$$|WA/A| = |W/(W \cap A)| = |W(L \cap A)/(L \cap A)| = p^m$$

und

$$\langle U, W\rangle \cap V = (\langle U, W\rangle \cap L) \cap V = \langle U, W\rangle \cap (L \cap V) = 1 \,.$$

Das nächste Lemma werden wir in (2.5) dazu benutzen, um in nicht nilpotenten Gruppen G zwei aufsteigende Folgen $(U_i)_{\boldsymbol{N}}$ und $(V_i)_{\boldsymbol{N}}$ zu konstruieren, deren Vereinigungen nicht beide subnormal sein können.

(2.4) LEMMA. Sei $(G, A) \in \Phi$, G nicht nilpotent, $m \in \boldsymbol{N}$ und U und V endliche Untergruppen von G mit $U \cap V = 1$ und $UA \cap \cap VA = A$. Dann existieren endliche Untergruppen $\hat{U}$ und $\hat{V}$ von G, so daß $U \leqslant \hat{U}$, $V \leqslant \hat{V}$, $\hat{U} \cap \hat{V} = 1$, $\hat{U}A \cap \hat{V}A = A$ und $[A, {}_m\hat{U}, {}_m\hat{V}] \neq 1$.

BEWEIS. Sei $G/A = K/A \times UA/A \times VA/A$ mit einer geeigneten Untergruppe K. Sei $|U| = p^n$ und $|V| = p^k$ mit geeigneten $n, k \in \boldsymbol{N}_0$. Sei ω die Abbildung aus (1.1) und ξ die aus (2.3). Sei

$$s = \max\{m + \xi(k, \omega(n+m), m), \xi(n, k, m)\} \,.$$

Nach [2], (1.2) sind UA und VA nilpotente Normalteiler von G. Da $G = K \cdot UA \cdot VA$ nicht nilpotent ist, ist auch K nicht nilpotent. Also gibt es nach [2], (1.4) Elemente $x_1, \ldots, x_s \in K$ mit $[A, {}_{p-1}x_1, \ldots, {}_{p-1}x_s] \neq 1$. Sei $L = \langle A, x_1, \ldots, x_s\rangle$. Dann ist $|L/A| = p^s \geqslant p^{\xi(n,k,m)}$ nach [2], (1.4). Also existiert nach (2.3) ein $W \leqslant L$ mit $|WA/A| = p^m$ und $\langle U, W\rangle \cap \cap V = 1$. Wir können W so wählen, daß es von m Elementen erzeugt wird. Dann ist nach (1.1) $|\langle U, W\rangle| \leqslant p^{\omega(n+m)}$. Sei $L/A = M/A \times WA/A$ mit einer geeigneten Untergruppe M. Dann ist $|M/A| = p^{s-m} \geqslant \geqslant p^{\xi(k,\omega(n+m),m)}$. Also gibt es nach (2.3) ein $X \leqslant M$ mit $|XA/A| = p^m$ und $\langle U, W\rangle \cap \langle V, X\rangle = 1$.

Es existieren $y_1, \ldots, y_m \in W$ und $y_{m+1}, \ldots, y_{2m} \in X$, so daß $y_1A, \ldots \ldots, y_{2m}A$ unabhängig sind. Nach [2], (1.5) folgt $[A, {}_{p-1}y_1, \ldots, {}_{p-1}y_{2m}] \neq 1$ und damit auch $[A, y_1, \ldots, y_{2m}] \neq 1$. Folglich sind $\hat{U} := \langle U, W\rangle$ und $\hat{V} := \langle V, X\rangle$ die gewünschten Untergruppen.

Nun folgt endlich unser angestrebtes Ergebnis über die Erweiterungen elementarabelscher Gruppen durch elementarabelsche Gruppen.

(2.5) LEMMA. Sei $(G, A) \in \Phi$ und jede Untergruppe von G sei subnormal in G. Dann ist G nilpotent.

BEWEIS. Angenommen, das Lemma ist falsch. Dann existieren nach (2.4) Folgen $(U_n)_{\boldsymbol{N}_0}$ und $(V_n)_{\boldsymbol{N}_0}$, so daß für alle $n \in \boldsymbol{N}_0$ folgendes gilt:

$$U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant G\,, \qquad V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant G\,, \qquad U_n \cap V_n = 1\,,$$
$$U_n A \cap V_n A = A\,, \qquad [A, {}_nU_n, {}_nV_n] \neq 1\,.$$

Dann sind $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ und $V := \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ zwei Untergruppen von G mit trivialem Durchschnitt. Sei d eine obere Schranke für ihre Defekte in G. Dann gilt $1 \neq [A, {}_dU_d, {}_dV_d] \leqslant [A, {}_dU, {}_dV] \leqslant U \cap V = 1$. Dieser Widerspruch zeigt die Behauptung.

Wir könnten nun unseren Satz mit Hilfe eines Resultates von H. Heineken und I. J. Mohamed, [1] sofort beweisen. Stattdessen führen wir hier aber einen eigenen Beweis an. Dafür benötigen wir ein weiteres Lemma, das eine Folgerung aus einem bekannten Satz von J. E. Roseblade ist.

(2.6) Lemma. Sei G eine Torsionsgruppe, deren Untergruppen alle subnormal sind.

(i) Es existiert ein $c \in \boldsymbol{N}$, so daß alle p-Komponenten von G bis auf endlich viele nilpotent der Klasse höchstens c sind.

(ii) Sind alle p-Komponenten von G nilpotent, so ist auch G nilpotent.

Beweis. (i) Da alle Untergruppen von G subnormal in G sind, ist G lokal nilpotent. Als Torsionsgruppe ist G folglich ein direktes Produkt von p-Gruppen. Sei etwa $G = \prod_{p \in \boldsymbol{P}} G_p$ mit einer p-Gruppe G_p für jedes $p \in \boldsymbol{P}$.

Angenommen, (i) ist falsch. Für ein $i \in \boldsymbol{N}$ seien paarweise verschiedene $p_1, \dots, p_{i-1} \in \boldsymbol{P}$ und Untergruppen $H_1, \dots, H_{i-1}$ gegeben, so daß $H_j \leqslant G_{p_j}$ und der Defekt von H_j in G_{p_j} größer als j ist für alle $j \in \langle 1, i-1 \rangle$. Nach einem Satz von J. E. Roseblade, [5] gibt es ein $c \in \boldsymbol{N}$, so daß alle Gruppen, deren Untergruppen alle subnormal vom Defekt höchstens i sind, nilpotent der Klasse höchstens c sind. Nach Annahme existiert ein $p_i \in \boldsymbol{P} \backslash \{p_1, \dots, p_{i-1}\}$, so daß G_{p_i} nicht nilpotent der Klasse höchstens c ist. Folglich gibt es ein $H_i \leqslant G_{p_i}$, so daß der Defekt von H_i in G_{p_i} größer als i ist.

Sei $H = \langle H_i \colon i \in \boldsymbol{N} \rangle$. Nach Voraussetzung ist H subnormal in G, etwa vom Defekt d. Sei $\pi \colon G \to G_{p_d}$ die kanonische Projektion bezüglich der Zerlegung $G = \prod_{p \in \boldsymbol{P}} G_p$. Dann ist $H_d = \pi(H)$ subnormal vom Defekt höchstens d in $G_{p_d} = \pi(G)$ im Widerspruch zur Wahl vom H_d.

(ii) Klar nach (i).

Jetzt haben wir alle Werkzeuge beisammen, um unseren Satz beweisen zu können.

(2.7) SATZ. Eine auflösbare Gruppe mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind, ist nilpotent.

BEWEIS. Sei G eine auflösbare Gruppe mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind. Sei H eine p-Komponente von G. Dann gibt es eine Reihe $1 = H_0 \leqslant \ldots \leqslant H_n = H$ von Normalteilern von H, so daß H_i/H_{i-1} eine elementarabelsche p-Gruppe ist für alle $i \in \langle 1, n \rangle$. Für ein $i \in \langle 1, n \rangle$ sei H_{i-1} nilpotent. Nach (2.5) ist $H_i/(H'_{i-1}H^p_{i-1})$ nilpotent, etwa der Klasse c. Per Induktion nach m zeigt man

$$[H_{i-1}, {}_{mc}H_i] \leqslant H'_{i-1}H^{p^m}_{i-1}.$$

Da H_{i-1} endlichen Exponenten hat, ist folglich H_i/H'_{i-1} nilpotent. Nach einem Satz von P. Hall, [4], 5.2.10 ist daher auch H_i nilpotent. Per Induktion folgt, daß $H = H_n$ nilpotent ist. Da dies für alle p-Komponenten von G gilt, ist G nach (2.6) nilpotent.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. HEINEKEN - I. J. MOHAMED, *Non-nilpotent groups with normalizer condition*, Proc. Sec. Internat. Conf. Theory of Groups 1973, Lecture Notes in Mathematics, **372**, pp. 357-360, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[2] W. MÖHRES, *Auflösbare Gruppen mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind - I*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **81** (1989), pp. 255-268.

[3] B. H. NEUMANN, *Groups covered by permutable subsets*, J. London Math. Soc., **29** (1954), pp. 236-248.

[4] D. J. S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1982).

[5] J. E. ROSEBLADE, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra, **2** (1965), pp. 402-412.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 18 luglio 1988.