

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTER MÖHRES

Auflösbare Gruppen mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind. - I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 81 (1989), p. 255-268

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1989__81__255_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Auflösbare Gruppen mit endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind. - I.

WALTER MÖHRES (*)

Diese Arbeit dient im wesentlichen zur Vorbereitung einer weiteren Arbeit, in der wir beweisen werden, daß auflösbare Gruppen von endlichem Exponenten, deren Untergruppen alle subnormal sind, nilpotent sind. Dafür ist die Behandlung von Erweiterungen elementarabelscher p -Gruppen durch elementarabelsche p -Gruppen entscheidend (vgl. [1]). In dieser Arbeit befassen wir uns mit solchen Erweiterungen, wobei uns nur interessiert, wie die Faktorgruppe auf dem Normalteiler operiert und nicht, wie die Erweiterung ansonsten beschaffen ist. Zunächst folgt eine Definition zur Verkürzung der Schreibweise.

(1.1) DEFINITION. Im folgenden sei p eine feste Primzahl. Φ sei die Klasse aller Paare (G, A) , so daß A ein Normalteiler der Gruppe G ist und A und G/A elementarabelsche p -Gruppen sind.

Mit $K_i(G)$ bezeichnen wir das i -te Glied der absteigenden, mit $Z_i(G)$ das i -te Glied der aufsteigenden Zentralreihe einer Gruppe G . Zur Definition der Kommutatoren $[x, {}_n y]$ siehe [4], S. 119. Wir erinnern daran, daß für $(G, A) \in \Phi$, $a \in A$ und $x, y \in G$ gilt $[a, {}_p x] = 1$ und $[a, x, y] = [a, y, x]$. Weiterhin verstehen wir unter N die Menge der natürlichen Zahlen, unter N_0 die Vereinigung von N mit $\{0\}$. Für $m, n \in N_0$, $m \leq n$, bezeichnen wir mit $\langle m, n \rangle$ die Menge der ganzen Zahlen zwischen m und n einschließlich m, n .

Das wesentliche Ergebnis dieser Arbeit ist der folgende Satz.

(*) Indirizzo dell'A.: Bodelschwinghstr. 40, D-8782 Karlstadt (Germ. Fed.).

(3.5) SATZ. Es gibt eine Abbildung $\beta: N \times N \rightarrow N$, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \gg p^{\beta(m,k)}$, $U \triangleleft A$ mit $|U| \leq p^k$ und $a \in A \setminus U$, so existiert ein $H \triangleleft G$ mit $H \triangleright A$, $|H/A| = p^m$ und $a \notin U^H$.

Der Abschnitt (1) enthält einige allgemeine Sätze über die zu untersuchenden Gruppen. Wir verschaffen uns zunächst ein simples Kriterium für die Nilpotenz von G , wenn $(G, A) \in \Phi$.

(1.2) LEMMA. Sei $(G, A) \in \Phi$. Ist G/A endlich, so ist G nilpotent.

BEWEIS. Siehe [3], Bd. 2, Lemma 6.34.

Im folgenden Lemma interessiert uns hauptsächlich der Fall $i = p - 1$.

(1.3) LEMMA. Für alle $i \in \langle 0, p - 1 \rangle$ gilt folgendes:

Ist $(G, A) \in \Phi$, $a \in A$, $x_1, \dots, x_i \in G$ und $[a, x_1, \dots, x_i] \neq 1$, so existiert ein $x \in \langle x_1, \dots, x_i \rangle$ mit $[a, x] \neq 1$.

BEWEIS. Für $i = 0$ ist die Aussage klar. Sei nun die Behauptung richtig für ein $i - 1 \in \langle 0, p - 2 \rangle$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, $a \in A$, $x_1, \dots, x_i \in G$ und $[a, x_1, \dots, x_i] \neq 1$. Sei $H = \langle A, x_1, \dots, x_i \rangle$. Da H/A endlich ist, ist H nilpotent nach (1.2). Also gibt es ein $k \geq i$ mit $a \in Z_{k+1}(H) \setminus Z_k(H)$. Folglich existieren $y_1, \dots, y_k \in H$ mit $[a, y_1, \dots, y_k] \neq 1$. Sei $b = [a, y_1, \dots, y_{k-i}]$. Dann ist

$$b \in Z_{i+1}(H) \quad \text{und} \quad [b, y_{k-i+1}, \dots, y_{k-1}] \notin Z(H).$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $x \in \langle y_{k-i+1}, \dots, y_{k-1} \rangle \triangleleft H$ mit $[b, {}_{i-1}x] \notin Z(H)$. Weiter existiert ein $y \in H$ mit $[b, {}_{i-1}x, y] \neq 1$.

Für alle $j \in \langle 0, i \rangle$ sei $d_j = [b, {}_{i-j}x, {}_jy]^{(i)}$. Wegen $b \in Z_{i+1}(H)$ gilt dann für alle $k \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$[b, {}_ixy^k] = \prod_{j=0}^i [b, {}_{i-j}x, {}_jy^k]^{(i)} = \prod_{j=0}^i d_j^{k^j}.$$

Da $d_1 = [b, {}_{i-1}x, y]^i \neq 1$ und

$$\det((k^j)_{j, k \in \langle 0, i \rangle}) = \prod_{0 \leq r < s \leq i} (s - r) \not\equiv 0 \pmod{p},$$

gibt es ein $k \in \langle 0, i \rangle$ mit $[b, xy^k] \neq 1$. Dann ist auch $[a, xy^k] \neq 1$. Weiter ist $xy^k \in H$. Folglich gibt es ein $z \in \langle x_1, \dots, x_i \rangle$ und $c \in A$ mit $xy^k = zc$. Dann ist $1 \neq [a, xy^k] = [a, z]$.

Das nächste Lemma handelt von Elementen $a \in A$ und $x_1, \dots, x_n \in G$ mit $[a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_n] \neq 1$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und wie üblich $(G, A) \in \Phi$. Solche Folgen (a, x_1, \dots, x_n) werden in dieser Arbeit immer wieder auftreten. Sie sind das geeignete Werkzeug zur Behandlung der von uns untersuchten Gruppen. Zur Definition der Unabhängigkeit von Elementen einer abelschen Gruppe siehe [4], S. 95.

(1.4) LEMMA. Sei $(G, A) \in \Phi$ und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

(i) Ist $a \in A \setminus Z_{n(p-1)}(G)$, so existieren $x_1, \dots, x_n \in G$ mit

$$[a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_n] \neq 1.$$

(ii) Ist $a \in A$ und sind $x_1, \dots, x_n \in G$ mit $[a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_n] \neq 1$, so sind x_1A, \dots, x_nA unabhängig.

(iii) Ist $a \in A$ und sind $x_1, \dots, x_n \in G$ mit $[a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_n] \neq 1$, so ist $\{[a, {}_{i_1}x_1, \dots, {}_{i_n}x_n] : i_1, \dots, i_n \in \langle 0, p-1 \rangle\}$ unabhängig.

BEWEIS. (i) Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Ist die Behauptung für $n - 1$ richtig, so gibt es $x_1, \dots, x_{n-1} \in G$ mit

$$[a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_{n-1}] \notin Z_{p-1}(G).$$

Dann existiert nach (1.3) ein $x_n \in G$ mit $[a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_n] \neq 1$.

(ii) Sei $i \in \langle 1, n \rangle$, $B = \langle A, x_j : j \in \langle 1, n \rangle, j \neq i \rangle$ und

$$b = [a, {}_{p-1}x_1, \dots, {}_{p-1}x_{i-1}, {}_{p-1}x_{i+1}, \dots, {}_{p-1}x_n].$$

Dann gilt $[b, B] = 1$ und $[b, x_i] \neq 1$. Also ist $x_i \notin B$. Da dies für alle $i \in \langle 1, n \rangle$ gilt, sind x_1A, \dots, x_nA unabhängig.

(iii) Angenommen, die Behauptung ist falsch. Sei etwa

$$\prod_{j=1}^m [a, {}_{i_j}x_1, \dots, {}_{i_j}x_n]^{k_j} = 1$$

mit einem $m \in N$, paarweise verschiedenen $(i_{j1}, \dots, i_{jn}) \in \langle 0, p-1 \rangle^n$ und $k_j \in \langle 1, p-1 \rangle$ für alle $j \in \langle 1, m \rangle$. Wir können annehmen, daß für alle $j \in \langle 1, m \rangle$ gilt $\sum_{s=1}^n i_{1s} < \sum_{s=1}^n i_{js}$. Sei $j \in \langle 2, m \rangle$. Da

$$(i_{11}, \dots, i_{1n}) \neq (i_{j1}, \dots, i_{jn}) \quad \text{und} \quad \sum_{s=1}^n i_{1s} < \sum_{s=1}^n i_{js},$$

existiert ein $s \in \langle 1, n \rangle$, so daß $i_{1s} < i_{js}$. Folglich ist $i_{js} + (p-1-i_{1s}) \geq p$ und somit $[a, i_{j1}x_1, \dots, i_{jn}x_n, p-1-i_{1s}x_s] = 1$. Daher gilt

$$1 = \prod_{j=1}^m [a, i_{j1}x_1, \dots, i_{jn}x_n, p-1-i_{1s}x_s, \dots, p-1-i_{1n}x_n]^{k_j} = [a, p-1x_1, \dots, p-1x_n]^{k_1}.$$

Wegen $k_1 \in \langle 1, p-1 \rangle$ folgt $[a, p-1x_1, \dots, p-1x_n] = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Das folgende Lemma zeigt, wie man aus Folgen der oben erwähnten Bauart neue derartige Folgen gewinnt.

(1.5) LEMMA. Seien

$$\begin{aligned} (G, A) \in \Phi, \quad a \in A, \quad n \in N, \quad x_1, \dots, x_n \in G, \\ [a, p-1x_1, \dots, p-1x_n] \neq 1, \quad H = \langle A, x_1, \dots, x_n \rangle, \\ m \in N, \quad y_1, \dots, y_m \in H \quad \text{und} \quad y_1A, \dots, y_mA \end{aligned}$$

unabhängig. Dann ist $[a, p-1y_1, \dots, p-1y_m] \neq 1$.

BEWEIS. Sind $x, y \in G$, $c, d \in A$ und ist m eine ganze Zahl, die nicht von p geteilt wird, so gilt

$$[c, p-1x, p-1y] = [c, p-1x, p-1yx], \quad [c, p-1x] = [c, p-1xd]$$

und

$$[c, p-1x^m] = [c, p-1x]^{m^{p-1}} = [c, p-1x].$$

Ist also $\{z_1A, \dots, z_nA\}$ eine Basis von H/A , so ist

$$[a, p-1z_1, \dots, p-1z_n] = [a, p-1x_1, \dots, p-1x_n] \neq 1.$$

Da man $\{y_1A, \dots, y_mA\}$ zu einer Basis von H/A ergänzen kann, folgt die Behauptung.

In Abschnitt (2) wollen wir zeigen, daß es für eine endliche Untergruppe U von A , die trivialen Durchschnitt mit einem geeigneten, von ihrer Ordnung abhängenden Glied der aufsteigenden Zentralreihe von G hat, ein $x \in G$ gibt mit $[u, {}_{p-1}x] \neq 1$ für alle $u \in U \setminus 1$. Dazu zunächst folgender Hilfssatz.

(2.1) LEMMA. Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ und sei $m = k \cdot (p - 1)^n$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, $c_1, \dots, c_n \in A$, $x_1, \dots, x_m \in G$ und $[c_i, x_1, \dots, x_m] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$. Dann existieren paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_k \in \langle 1, m \rangle$, so daß $x_{i_1}C_G(c_1), \dots, x_{i_k}C_G(c_1)$ unabhängig sind für alle $i \in \langle 1, n \rangle$.

BEWEIS. Für $n = 0$ ist die Aussage klar. Sei nun die Behauptung richtig für ein $n - 1 \in \mathbb{N}_0$. Sind $G, A, c_1, \dots, c_n \in A$ und $x_1, \dots, x_m \in G$ wie oben gegeben, so gibt es wegen $m = (k(p - 1)) \cdot (p - 1)^{n-1}$ nach Induktionsvoraussetzung paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_{k(p-1)} \in \langle 1, m \rangle$, so daß $x_{i_1}C_G(c_1), \dots, x_{i_{k(p-1)}}C_G(c_1)$ unabhängig sind für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$. Sei $y_j = x_{i_j}$ für alle $j \in \langle 1, k(p - 1) \rangle$. Dann ist $[c_n, y_1, \dots, y_{k(p-1)}] \neq 1$.

Sei $C = C_G(c_n)$ und $H = \langle C, y_1, \dots, y_{k(p-1)} \rangle$. Angenommen,

$$|H:C| \leq p^{k-1}.$$

Dann existieren $z_1, \dots, z_{k-1} \in H$ mit $H = \langle C, z_1, \dots, z_{k-1} \rangle$. Also gilt

$$[c_n, {}_{k(p-1)}H] = \left\langle [c_n, i_1z_1, \dots, i_{k-1}z_{k-1}] : \sum_{j=1}^{k-1} l_j \geq k(p-1) \right\rangle = 1$$

im Widerspruch zu $[c_n, y_1, \dots, y_{k(p-1)}] \neq 1$. Folglich ist $|H:C| \geq p^k$ und es gibt paarweise verschiedene $s_1, \dots, s_k \in \langle 1, k(p - 1) \rangle$, so daß $y_{s_1}C, \dots, y_{s_k}C$ unabhängig sind. Natürlich sind dann auch $y_{s_1}C_G(c_1), \dots, y_{s_k}C_G(c_1)$ unabhängig für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$.

(2.2) LEMMA. Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $t = (p - 1)^{\binom{n+1}{2}}$. Weiter sei

$$(G, A) \in \Phi, \quad u_1, \dots, u_n \in A, \quad x_1, \dots, x_t \in G$$

und $[u_i, x_1, \dots, x_t] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$. Dann existiert ein $y \in G$ mit $[u_i, {}_{p-1}y] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$.

BEWEIS. Für $n = 1$ ist die Aussage klar nach (1.3). Sei die Behauptung richtig für ein $n - 1 \in \mathbb{N}$.

Sei $(G, A) \in \Phi$, $u_1, \dots, u_n \in A$, $x_1, \dots, x_t \in G$ und $[u_i, x_1, \dots, x_t] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$. Sei $r = (p - 1)^{\frac{2}{p}}$ und sei $s = (p - 1)^n$. Dann ist $r \cdot s = t$. Wir zeigen nun, daß es für alle $k \in \langle 0, r \rangle$ Elemente $y_1, \dots, y_k \in G$ gibt mit

$$[u_i, y_1, \dots, y_k, x_{sk+1}, \dots, x_t] \neq 1$$

für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$ und

$$[u_n, {}_{p-1}y_1, \dots, {}_{p-1}y_k, x_{sk+1}, \dots, x_t] \neq 1.$$

Für $k = 0$ ist diese Aussage klar. Sei die Behauptung für ein $k \in \langle 0, r - 1 \rangle$ richtig. Für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$ sei

$$c_i = [u_i, y_1, \dots, y_k, x_{sk+s+1}, \dots, x_t],$$

und es sei

$$c_n = [u_n, {}_{p-1}y_1, \dots, {}_{p-1}y_k, x_{sk+s+1}, \dots, x_t].$$

Dann ist $[c_i, x_{sk+1}, \dots, x_{sk+s}] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$. Nach (2.1) gibt es paarweise verschiedene $i_1, \dots, i_{p-1} \in \langle sk + 1, sk + s \rangle$, so daß

$$x_{i_1} C_G(c_i), \dots, x_{i_{p-1}} C_G(c_i)$$

unabhängig sind für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$. Da $[c_n, x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-1}}] \neq 1$, gibt es nach (1.3) ein $y_{k+1} \in \langle x_{i_1}, \dots, x_{i_{p-1}} \rangle$ mit $[c_n, {}_{p-1}y_{k+1}] \neq 1$. Dann gilt

$$1 \neq [c_i, y_{k+1}] = [u_i, y_1, \dots, y_{k+1}, x_{sk+s+1}, \dots, x_t]$$

für $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$ und

$$1 \neq [c_n, {}_{p-1}y_{k+1}] = [u_n, {}_{p-1}y_1, \dots, {}_{p-1}y_{k+1}, x_{sk+s+1}, \dots, x_t].$$

Man erhält also $y_1, \dots, y_r \in G$ mit $[u_i, y_1, \dots, y_r] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$ und $[u_n, {}_{p-1}y_1, \dots, {}_{p-1}y_r] \neq 1$. Sei $H = \langle A, y_1, \dots, y_r \rangle$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $y \in H$ mit $[u_i, {}_{p-1}y] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n - 1 \rangle$. Dann ist $y \notin A$ und folglich $[u_n, {}_{p-1}y] \neq 1$ nach (1.5).

Das nächste Lemma benutzt einen Satz von B.H. Neumann, [2], der besagt, daß eine Gruppe niemals die Vereinigung von n Nebenklassen von Untergruppen ist, deren Indizes alle größer als n sind.

(2.3) LEMMA. Seien $n, s \in \mathbb{N}$ mit $p^s > n$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, $a_1, \dots, a_n \in A \setminus Z_{s(p-1)}(G)$. Dann existiert ein $x \in G$ mit $[a_i, x] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$.

BEWEIS. Sei $i \in \langle 1, n \rangle$. Da $a_i \notin Z_{s(p-1)}(G)$, gibt es $x_1, \dots, x_{s(p-1)} \in G$, so daß $[a_i, x_1, \dots, x_{s(p-1)}] \neq 1$. Nach (2.1) ist der Index von $C_o(a_i)$ in G mindestens p^s , also größer als n . Nach einem Satz von B. H. Neumann, [2], (4.1) ist G folglich nicht die Vereinigung der $C_o(a_i)$ mit $i \in \langle 1, n \rangle$. Es existiert daher ein $x \in G$, das in keinem der $C_o(a_i)$ enthalten ist, d.h. $[a_i, x] \neq 1$ für alle $i \in \langle 1, n \rangle$.

Es folgt der vorhin angekündigte Satz.

(2.4) SATZ. Es gibt eine Abbildung $\chi: N_0 \rightarrow N_0$, so daß für alle $n \in N_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ und U eine Untergruppe von A der Ordnung p^n mit $U \cap Z_{\chi(n)}(G) = 1$, so existiert ein $x \in G$ mit $[u, {}_{p-1}x] \neq 1$ für alle $u \in U \setminus 1$.

BEWEIS. Sei $n \in N_0$, $m = (p-1)\binom{n}{2}$ und $t = n(p-1)m$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$ und U eine Untergruppe von A der Ordnung p^n mit $U \cap Z_t(G) = 1$. Da $p^n > |U \setminus 1|$, gibt es nach (2.3) $x_1, \dots, x_m \in G$, so daß $[u, x_1, \dots, x_i] \notin Z_{n(p-1)(m-i)}(G)$ für alle $u \in U \setminus 1$ und alle $i \in \langle 0, m \rangle$. Insbesondere ist $[u, x_1, \dots, x_m] \neq 1$ für alle $u \in U \setminus 1$. Da $|U \setminus 1| = p^n - 1$, existiert nach (2.2) ein $x \in G$ mit $[u, {}_{p-1}x] \neq 1$ für alle $u \in U \setminus 1$. Setze also $\chi(n) = t$.

Unsere nächste Aufgabe ist es, uns eine Funktion β für den oben erwähnten Satz (3.5) zu verschaffen. Lemma (3.1) reduziert das Problem auf die Konstruktion einer einfacheren Abbildung α . Dabei nehmen wir statt des a aus (3.5) zunächst ein Element $z \in Z(G) \cap A \setminus U$. Dies hat jedoch, wie sich später zeigen wird, keine große Bedeutung.

(3.1) LEMMA. Sei σ eine Ordinalzahl und sei $\alpha: N \rightarrow N$ eine Abbildung, so daß für alle $k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\alpha(k)}$, $U \leq Z_\sigma(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $x \in G \setminus A$ mit $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

Dann gibt es eine Abbildung $\beta: N \times N \rightarrow N$, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq Z_\sigma(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $z \notin U^H$.

BEWEIS. Für alle $m, k \in N$ sei $\beta(m, k) = m - 1 + \alpha(p^{m-1}k)$. Dann gilt die Aussage nach Voraussetzung für $m = 1$. Sei die Behauptung richtig für ein $m - 1 \in N$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq Z_\sigma(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$. Wegen $\beta(m, k) \geq \alpha(p^{m-1}k)$ und $|U| \leq p^{p^{m-1}k}$ gibt es ein $x \in G \setminus A$ mit $z \notin U^{\langle x \rangle} =: V$. Sei $G/A = L/A \times \langle x \rangle A/A$ mit einer geeigneten Untergruppe L . Dann ist $|L/A| \geq p^{m-2+\alpha(p^{m-1}k)} = p^{\beta(m-1, p^k)}$ und $|V| \leq |U|^p \leq p^{pk}$. Folglich existiert nach Induktionsannahme ein $K \leq L$ mit $K \geq A$, $|K/A| = p^{m-1}$ und $z \notin V^K$. Sei $H = \langle K, x \rangle$. Dann ist $|H/A| = p^m$ und $z \notin V^K = U^H$.

In all unseren Betrachtungen können wir G/A als endlich und damit G als nilpotent annehmen. Also gibt es ein $n \in N$ mit $U \leq Z_n(G)$. Wir konstruieren jetzt zunächst für jedes $n \in N$ eine Abbildung α_n , so daß α_n die in (3.1) erwähnten Eigenschaften von α hat, wobei $\sigma = n$. Diesen Zweck dienen die nächsten beiden Lemmata.

(3.2) **LEMMA.** Sei $n \in N$ und sei $\beta: N \times N \rightarrow N$ eine Abbildung, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq Z_{n-1}(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $z \notin U^H$.

Dann gibt es ein $t \in N$, so daß folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$, $|G/A| \geq p^t$, $a \in Z_n(G) \cap A$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus \langle a \rangle$, so existiert ein $x \in G \setminus A$ mit $z \notin a^{\langle x \rangle}$.

BEWEIS. Sei $a(1) = \beta(1, 1)$ und $a(i+1) = \beta(a(i), p-2)$ für alle $i \in N$. Sei $s = (p-1)^2 + 1$ und $t = a(s)$. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$, $|G/A| \geq p^t$, $a \in Z_n(G) \cap A$ und $z \in (G) \cap A \setminus \langle a \rangle$. Wir nehmen nun an, daß $z \in a^{\langle x \rangle}$ für alle $x \in G \setminus A$.

Sei $x \in G \setminus A$ und sei $k \in \langle 0, p-1 \rangle$ maximal mit $[a, {}_k x] \neq 1$. Weiter sei $U = \langle [a, {}_j x] : j \in \langle 1, k-1 \rangle \rangle$. Sei

$$b = \prod_{j=i}^k [a, {}_j x]^{m_j} \in Z(G)$$

mit $i \in \langle 0, k \rangle$ und $m_i, \dots, m_k \in \mathbf{Z}$, wobei p kein Teiler von m_i sei. Dann gilt

$$[b, {}_{k-i}x] = \prod_{j=i}^k [a, {}_{j+k-i}x]^{m_j} = [a, {}_kx]^{m_i} \neq 1.$$

Wegen $b \in Z(G)$ folgt $k = i$ und damit $b = [a, {}_kx]^{m_k}$. Also ist $U \cap Z(G) = 1$ und $a^{\langle x \rangle} \cap Z(G) \leq \langle [a, {}_kx] \rangle$. Folglich ist $z \notin U$ und $z \in \langle [a, {}_kx] \rangle$.

Für jedes $x \in G \setminus A$ gibt es also $k(x), m(x) \in \langle 1, p-1 \rangle$ mit $[a, {}_{k(x)}x] = z^{m(x)}$. Weiter ist

$$z \notin U(x) := \langle [a, {}_jx] : j \in \langle 1, k(x) - 1 \rangle \rangle,$$

$U(x) \leq Z_{n-1}(G) \cap A$ und $|U(x)| \leq p^{p-2}$.

Da $|G/A| \geq p^{a(s)} \geq p^{a(1)} = p^{\beta(1,1)}$, ist $a \notin Z_{n-1}(G)$. Angenommen $n \geq p + 1$. Dann existiert nach (1.3) ein $x \in G$ mit $[a, {}_{p-1}x] \notin Z(G)$. Folglich ist $k(x) = p - 1$ und daher $[a, {}_{p-1}x] \in Z(G)$ im Widerspruch zur Wahl von x . Es folgt $n < p$.

Ist $A \leq H \leq G$ mit $|H/A| \geq p^{a(1)} = p^{\beta(1,1)}$, so ist $a \notin Z_{n-1}(H)$ nach Voraussetzung. Also gibt es nach (1.3) ein $x \in G$ mit $[a, {}_{n-1}x] \neq 1$. Wegen $a \in Z_n(G)$ ist dann $k(x) = n - 1$.

Wir zeigen nun, daß für alle $r \in \mathbf{N}$ und für alle $H \leq G$ mit $|H/A| \geq p^{a(r)}$ Elemente $x_1, \dots, x_r \in H$ existieren, so daß x_1A, \dots, x_rA unabhängig sind, $k(x) = n - 1$ für alle $x \in \langle A, x_1, \dots, x_r \rangle \setminus A$ und für alle nichtleeren Teilmengen I von $\langle 1, r \rangle$ gilt

$$m \left(\prod_{i \in I} x_i \right) \equiv \sum_{i \in I} m(x_i) \pmod{p}.$$

Für $r = 1$ gilt die Behauptung nach dem oben bemerkten. Sei die Aussage für ein $r - 1 \in \mathbf{N}$ richtig. Weiter sei $H \leq G$ mit $H \geq A$ und $|H/A| \geq p^{a(r)}$. Wegen $a(r) \geq a(1)$ existiert nach dem oben ausgeführten ein $x_r \in H \setminus A$ mit $k(x_r) = n - 1$. Dann ist $|H/A| \geq p^{\beta(a(r-1), p-2)}$, $|U(x_r)| \leq p^{p-2}$ und $z \notin U(x_r)$. Folglich gibt es ein $K \leq H$ mit $K \geq A$, $|K/A| = p^{a(r-1)}$ und $z \notin U(x_r)^K$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren dann Elemente $x_1, \dots, x_{r-1} \in K$, so daß $x_1A, \dots, x_{r-1}A$ unabhängig sind, $k(y) = n - 1$ für $y \in \langle A, x_1, \dots, x_{r-1} \rangle \setminus A$ und für alle nichtleeren Teilmengen I von $\langle 1, r - 1 \rangle$ gilt

$$m \left(\prod_{i \in I} x_i \right) \equiv \sum_{i \in I} m(x_i) \pmod{p}.$$

Da $z \in U(x_r)^{\langle x_r \rangle}$, ist $x_r \notin \langle A, x_1, \dots, x_{r-1} \rangle =: L$ und daher sind $x_1 A, \dots, x_r A$ unabhängig.

Sei $x \in \langle A, x_1, \dots, x_r \rangle \setminus L$. Dann gibt es ein $m \in \langle 1, p-1 \rangle$ und $y \in L$ mit $x^m = x_r y$. Angenommen, $k(x) < n-1$. Dann ist $[a, {}_{k(x)}x^m] \in \langle z \rangle \leq Z(G)$ und daher

$$1 = [a, {}_{k(x)}x_r y, {}_{n-1-k(x)}x_r] = \prod_{i=0}^{k(x)} [a, {}_i y, {}_{n-1-i}x_r]^{(k(x)_i)},$$

da $a \in Z_n(G)$. Es folgt

$$z^{m(x_r)} = [a, {}_{n-1}x_r] = \prod_{i=1}^{k(x)} [a, {}_{n-1-i}x_r, {}_i y]^{-(k(x)_i)} \in U(x_r)^{\langle y \rangle} \leq U(x_r)^K$$

im Widerspruch zur Wahl von K . Also ist $k(x) \geq n-1$. Wegen $a \in Z_n(G)$ ist außerdem $k(x) \leq n-1$, folglich $k(x) = n-1$.

Sei nun J eine nichtleere Teilmenge von $\langle 1, r-1 \rangle$ und $y = \prod_{i \in J} x_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z^{m(x_r y)} &= [a, {}_{n-1}x_r y] = \prod_{i=0}^{n-1} [a, {}_i x_r, {}_{n-1-i} y]^{(n-1)_i} \equiv \\ &\equiv [a, {}_{n-1}x_r][a, {}_{n-1}y] = z^{m(x_r) + m(y)} \pmod{U(x_r)^{\langle y \rangle}}. \end{aligned}$$

Da $z \notin U(x_r)^{\langle y \rangle}$, folgt

$$m(x_r y) \equiv m(x_r) + m(y) \equiv m(x_r) + \sum_{i \in J} m(x_i) \pmod{p}.$$

Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt.

Da $|G/A| \geq p^{\alpha(s)}$, gibt es x_1, \dots, x_s wie oben beschrieben. Wegen $s = (p-1)^2 + 1$ existiert eine p -elementige Teilmenge I von $\langle 1, s \rangle$ mit $m(x_i) = m(x_j)$ für $i, j \in I$. Dann gilt

$$m\left(\prod_{i \in I} x_i\right) \equiv \sum_{i \in I} m(x_i) \equiv 0 \pmod{p}$$

im Widerspruch dazu, daß $m(y) \in \langle 1, p-1 \rangle$ für alle $y \in G \setminus A$.

(3.3) LEMMA. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gibt es eine Abbildung $\alpha_n: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, so daß für alle $k \in \mathbf{N}$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\alpha_n(k)}$, $U \leq Z_n(G) \cap A$ mit $|U| < p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $x \in G \setminus A$ mit $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

BEWEIS. Setzt man $\alpha_1(k) = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so gilt die Aussage für $n = 1$. Sei nun für ein $n - 1 \in \mathbb{N}$ die Abbildung α_{n-1} gegeben. Nach (3.1) existiert dann eine Abbildung $\beta: N \times N \rightarrow N$, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq Z_{n-1}(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $z \notin U^H$.

Nach (3.2) gibt es ein $t \in N$, so daß folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^t$, $a \in Z_n(G) \cap A$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus \langle a \rangle$, so existiert ein $x \in G \setminus A$ mit $z \notin a^{\langle x \rangle}$.

Für alle $r \in N$ sei $\varrho(r) = \beta(t, p^{r-1}) + r - 1$. Sei $r \in N$, $s = p^{r-1}$, $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\varrho(r)}$, $A \leq K \leq G$ mit $|K/A| \leq p^{r-1}$, $a \in Z_r(G) \cap A$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus a^K$. Sei $G/A = K/A \times H/A$ mit einer geeigneten Gruppe H . Dann ist $|H/A| \geq p^{\beta(t,s)}$. Weiter ist $|a^K| \leq p^{|K/A|} \leq p^s$. Folglich gibt es ein $L \leq H$ mit $L \geq A$,

$$|L/A| = p^t \quad \text{und} \quad z \notin (a^{\bar{x}} \cap Z_{r-1}(G))^L =: N.$$

Also ist

$$z \notin N = N(\langle a \rangle \cap Z_{r-1}(G)) = N\langle a \rangle \cap Z_{r-1}(G),$$

d.h. $zN \notin \langle aN \rangle$. Außerdem gilt $(L/N, A/N) \in \Phi$, $|(L/N)/(A/N)| = p^t$ und $aN \in Z_r(L/N) \cap A/N$. Folglich gibt es ein $x \in L \setminus A$ mit $zN \notin \langle aN \rangle^{\langle xN \rangle}$ und daher $z \notin \langle a, N \rangle^{\langle x \rangle} \geq \langle a^K \rangle^{\langle x \rangle} = a^{\langle K, x \rangle}$. Weiter ist $|\langle K, x \rangle/A| = p \cdot |K/A|$. Es folgt nun für alle $r \in N$:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\varrho(r)}$, $a \in Z_r(G) \cap A$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus \langle a \rangle$, so existiert ein $K \leq G$ mit $K \geq A$, $|K/A| = p^r$ und $z \notin a^K$.

Sei $\alpha_n(1) = t$, und für alle $k \in N$ sei

$$\alpha_n(k + 1) = \max \{ \varrho(\alpha_n(k)), \beta(\alpha_n(k), k + 1) \}.$$

Die Aussage des Lemmas gilt für $k = 1$. Sei die Behauptung für ein $k - 1 \in N$ richtig. Weiter sei $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\alpha_n(k)}$, $U \leq Z_n(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$. Sei $m = \alpha_n(k - 1)$.

Sei zunächst $V := U \cap Z_{n-1}(G) \neq 1$. Wegen $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$ und $|V| \leq p^k$ gibt es ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $z \notin V^H =: N$.

Dann ist $z \notin N = N(U \cap Z_{n-1}(G)) = UN \cap Z_{n-1}(G)$, also $zN \notin UN/N$. Wegen $|(H/N)/(A/N)| = |H/A| = p^{\alpha_n(k-1)}$ und $|UN/N| \leq p^{k-1}$ gibt es ein $x \in H \setminus A$ mit $zN \notin (UN/N)^{\langle xN \rangle}$. Dann ist $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

Sei nun $U \cap Z_{n-1}(G) = 1$. Wir können annehmen, daß ein $c \in U \setminus 1$ existiert. Wegen $|G/A| \geq p^{e(m)}$ gibt es wie oben gezeigt ein $K \leq G$ mit $K \geq A$, $|K/A| = p^m$ und $z \notin c^K =: S$. Dann ist

$$z \notin [c, K] = [c, K](U \cap Z_{n-1}(G)) = U[c, K] \cap Z_{n-1}(G) = US \cap Z_{n-1}(G)$$

und daher $zS \notin US/S$. Außerdem ist $|US/S| < |U|$, d.h. $|US/S| \leq p^{k-1}$, und $|K/A| = p^{\alpha_n(k-1)}$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert daher ein $x \in K \setminus A$ mit $zS \notin (US/S)^{\langle xS \rangle}$, also $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

Jetzt konstruieren wir die in (3.1) erwähnte Funktion α , die unabhängig davon ist, in welchem Glied der aufsteigenden Zentralreihe U liegt.

(3.4) LEMMA. Es gibt eine Abbildung $\alpha: N_0 \rightarrow N$, so daß für alle $k \in N_0$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\alpha(k)}$, $U \leq A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $x \in G \setminus A$ mit $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

BEWEIS. Nach (3.3) und (3.1) gibt es für alle $n \in N$ eine Abbildung $\beta_n: N \times N \rightarrow N$, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta_n(m, k)}$, $U \leq Z_n(G) \cap A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $z \notin U^H$.

Sei χ die Abbildung aus (2.4). Sei $\alpha(0) = 1$, und für alle $k \in N$ sei $\alpha(k) = \beta_{\chi(k)+1}(\alpha(k-1), k)$. Die Behauptung des Lemmas gilt dann für $k = 0$. Sei die Aussage nun richtig für ein $k-1 \in N_0$, und sei $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\alpha(k)}$, $U \leq A$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$. Weiter sei $t = \chi(k) + 1$ und $V = U \cap Z_t(G)$.

Ist $V = 1$, so existiert nach (2.4) ein $x \in G \setminus A$ mit $[u, {}_{p-1}x] \notin Z(G)$ für alle $u \in U \setminus 1$. Sei $a \in U^{\langle x \rangle} \cap Z(G)$. Dann gibt es $u_0, \dots, u_{p-1} \in U$ mit $a = \prod_{j=0}^{p-1} [u_j, {}_jx]$. Für alle $i \in \langle 1, p-1 \rangle$ folgt

$$1 = [a, x] = \prod_{j=0}^{p-1-i} [u_j, {}_{j+i}x]$$

und damit per Induktion $[u_j, {}_{p-1}x] = 1$, also $u_j = 1$ für alle $j \in \langle 0, p-2 \rangle$. Folglich ist $[u_{p-1}, {}_{p-1}x] = a \in Z(G)$ und daher auch $u_{p-1} = 1$. Es folgt $U^{\langle x \rangle} \cap Z(G) = 1$ und damit insbesondere $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

Sei nun $V \neq 1$. Dann existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^{\alpha(k-1)}$ und $z \notin V^H =: N$. Folglich gilt $z \notin N = N(U \cap Z_i(G)) = UN \cap Z_i(G)$, also $zN \notin UN/N$, und $|UN/N| \leq p^{k-1}$. Daher existiert nach Induktionsannahme ein $x \in H \setminus A$ mit $zN \notin (UN/N)^{\langle xN \rangle}$ und damit insbesondere $z \notin U^{\langle x \rangle}$.

Es folgt das Hauptergebnis dieser Arbeit.

(3.5) SATZ. Es gibt eine Abbildung $\beta: N \times N \rightarrow N$, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq A$ mit $|U| \leq p^k$ und $a \in A \setminus U$, so existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $a \notin U^H$.

BEWEIS. Sei α die Abbildung aus (3.4). Nach (3.1) gibt es dann eine Abbildung $\beta: N \times N \rightarrow N$, so daß für alle $m, k \in N$ folgendes gilt:

Ist $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq A \cap Z_\omega(G)$ mit $|U| \leq p^k$ und $z \in Z(G) \cap A \setminus U$, so existiert ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $z \notin U^H$.

Seien nun $m, k \in N$, $(G, A) \in \Phi$ mit $|G/A| \geq p^{\beta(m,k)}$, $U \leq A$ mit $|U| \leq p^k$ und $a \in A \setminus U$. Wir können annehmen, daß G/A endlich und folglich G nilpotent ist. Dann ist $U \leq A \cap Z_\omega(G)$. Weiter gibt es ein $n \in N$ mit $a \in UZ_n(G)$ und $a \notin UZ_{n-1}(G)$. Also existieren $u \in U$ und $z \in Z_n(G)$ mit $a = uz$. Sei $Z = Z_{n-1}(G) \cap A$. Wegen $a \notin UZ$ ist auch $z \notin UZ$. Folglich ist $zZ \in A/Z \cap Z(G/Z) \setminus UZ/Z$. Also gibt es wie oben gezeigt ein $H \leq G$ mit $H \geq A$, $|H/A| = p^m$ und $zZ \notin (UZ/Z)^{H/Z}$, d.h. $z \notin U^H$. Dann ist auch $a \notin U^H$.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] H. HEINEKEN - I. J. MOHAMED, *Non-nilpotent groups with normalizer condition*, Proc. Sec. Internat. Conf. Theory of Groups 1973, Lecture Notes in Mathematics, **372**, pp. 357-360, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

- [2] B. H. NEUMANN, *Groups covered by permutable subsets*, J. London Math. Soc., **29** (1954), pp. 236-248.
- [3] D. J. S. ROBINSON, *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1972).
- [4] D. J. S. ROBINSON, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1982).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 luglio 1988.