

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVAMBATTISTA AMENDOLA

ADELE MANES

**Libere vibrazioni di solidi termoelastici incomprimibili**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 81 (1989), p. 239-253

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1989\\_\\_81\\_\\_239\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1989__81__239_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## **Libere vibrazioni di solidi termoelastici incompressibili.**

GIOVAMBATTISTA AMENDOLA - ADELE MANES (\*)

**SUMMARY** - In this paper we study the propagation of free vibrations in two different thermoelastic incompressible materials, which occupy a half-space and an infinite layer in welded contact. This propagation occurs in these media under the same conditions that state, for such solids, either the existence of surface waves in a half-space with a free boundary or the propagation of interfacial waves on the plane where two different half-spaces are in welded contact: in the first case, thermal waves and displacement ones travel only in the layer while the bulk material is unstrained and with a constant temperature; in the second case the propagation of the waves occurs in both media.

### **1. Introduzione.**

Lo studio di alcuni problemi relativi alla propagazione di onde elementari in solidi elastici anisotropi è stato fatto in [1] da A.N. Stroh. In detto lavoro si studia in particolare la propagazione di onde elementari in un mezzo elastico anisotropo, costituito da due materiali aventi differenti proprietà, uno dei quali occupa un semispazio ed è saldato rigidamente ad uno strato piano infinito occupato dal secondo materiale.

In questa nota studiamo tale propagazione in solidi termoelastici incompressibili, omogenei ed isotropi. Tale incompressibilità viene espressa, in particolare, da una equazione che stabilisce la proporziona-

(\*) Indirizzo degli A.A.: G. AMENDOLA: Istituto di Matematiche Applicate « U. Dini », Facoltà di Ingegneria, via Diotallevi 2, Pisa; A. MANES: Dipartimento di Matematica, via Buonarroti 2, Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C.N.R. e con finanziamento del M.P.I.

lità della dilatazione cubica alla variazione di temperatura, quando si considerano trasformazioni termoelastiche infinitesime, rette dalle equazioni ricavate in [2] da T. Manacorda.

Ovviamente per tali solidi accanto alle onde di spostamento devono essere considerate anche le onde termiche. Si trovano in tale studio risultati già ricavati in precedenti note (v. [4], [5]), alle quali si rimanda anche se i risultati fondamentali sono stati qui riportati sia per completezza sia per i continui riferimenti che ad essi vengono fatti.

Le libere vibrazioni del mezzo sopra descritto possono verificarsi e ciò accade proprio nelle stesse condizioni che assicurano la propagazione delle onde superficiali (di Rayleigh) in un solido termoelastico, incomprimibile nel senso già precisato, che occupa un semispazio, ed in quelle che assicurano la propagazione di onde di interfaccia (di Stoneley) tra due solidi ciascuno dei quali occupa un semispazio. Nel primo caso è solo lo strato piano infinito ad essere sede di onde termiche e di spostamento mentre il semispazio resta indeformato e a temperatura costante; nel secondo caso la propagazione di tali onde avviene in entrambi i mezzi.

## 2. Preliminari.

Sia  $C$  un corpo termoelastico incomprimibile nel senso precisato nella introduzione e formato da due materiali diversi in modo che la regione  $C$  da esso occupata sia l'unione delle regioni  $C_1$  e  $C_2$  occupate da due solidi  $C_1$  e  $C_2$  che costituiscono  $C$ . Rispetto ad un prefissato sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $T = Ox_1, x_2, x_3$  con versori  $i_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), il solido  $C_1$  occupi il semispazio con  $x_3 > 0$  mentre  $C_2$  sia tale da formare lo strato infinito parallelo al piano di riferimento  $x_1 x_2$  e tale che la terza coordinata dei suoi punti sia  $x_3 \in (-h, 0)$  con  $h > 0$ . Supponiamo inoltre che i due solidi siano saldati fra di loro lungo la zona di contatto rappresentata dal piano  $x_3 = 0$ .

Le equazioni linearizzate per tali solidi, supposti omogenei ed isotropi, in assenza di forze di masse e di sorgenti termiche sono espresse dalle seguenti relazioni [3]

$$(2.1) \quad \begin{cases} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} = \mu_T \Delta \mathbf{u} + (\lambda_T + \mu_T) \text{grad div } \mathbf{u} - LT_0 \text{grad } \theta - \text{grad } q, \\ k \Delta \theta = cT_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} + L \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{u} - a \frac{\partial q}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{u} = aT_0 \theta, \end{cases}$$

dove  $\mathbf{u}$  è lo spostamento,  $\theta = (T - T_0)/T_0$  è la variazione specifica della temperatura,  $q$  è il parametro lagrangiano che caratterizza lo sforzo isotropo dovuto al vincolo di incomprimibilità,  $t$  è il tempo e le altre grandezze sono costanti caratteristiche del materiale, di cui  $a$ ,  $k$  e  $\mu_T$  tali che

$$(2.2) \quad a \neq 0, \quad k > 0 \quad \text{e} \quad \mu_T > 0.$$

Le (2.1) e (2.2) sono riferite a  $C_1$ ; tutte le grandezze riferite a  $C_2$  saranno indicate con le stesse lettere con un apice. Supponiamo in particolare che le temperature uniformi delle configurazioni di riferimento dei due solidi coincidano, per cui nelle equazioni (2.1) scritte per  $C_2$  si ha  $T'_0 = T_0$ .

Riportiamo l'espressione del tensore degli sforzi linearizzato riferito a  $C_1$  e  $C_2$  rispettivamente [2]

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathbf{t} = (\lambda_T \operatorname{div} \mathbf{u} - LT_0 \theta - q) \mathbf{1} + 2\mu_T \mathbf{e}, \\ \mathbf{t}' = (\lambda'_T \operatorname{div} \mathbf{u}' - L'T_0 \theta' - q') \mathbf{1} + 2\mu'_T \mathbf{e}', \end{cases}$$

dove

$$(2.4) \quad \mathbf{e} = \|\frac{1}{2}(\partial u_h / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_h)\|, \quad \mathbf{e}' = \|\frac{1}{2}(\partial u'_h / \partial x_k + \partial u'_k / \partial x_h)\|,$$

e supponiamo infine che

$$(2.5) \quad \varrho_0 \neq \varrho'_0 \quad \text{e} \quad \mu_T \neq \mu'_T.$$

### 3. Soluzioni elementari.

Consideriamo come soluzioni delle (2.1) riferite a  $C_1$  e delle analoghe relative a  $C_2$  le seguenti soluzioni elementari

$$(3.1) \quad \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{A} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], & \theta = \theta_0 \exp [i(\mathbf{h} \cdot \mathbf{r} - \omega_\theta t)] \\ & \text{per } x_3 > 0, \\ \mathbf{u}' = \mathbf{A}' \exp [i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - \omega t)], & \theta' = \theta'_0 \exp [i(\mathbf{h}' \cdot \mathbf{r} - \omega_\theta t)] \\ & \text{per } x_3 \in (-h, 0), \end{cases}$$

dove  $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ,  $\mathbf{A}' = (A'_1, A'_2, A'_3)$ ,  $\theta_0$  e  $\theta'_0$  sono le ampiezze complesse di  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}'$ ,  $\theta$  e  $\theta'$ , i vettori

$$(3.2) \quad \begin{cases} \mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3), & \mathbf{k}' = (k_1, k'_2, k'_3), \\ \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3), & \mathbf{h}' = (h_1, h'_2, h'_3) \end{cases}$$

sono elementi di  $\mathbf{C}^3$ ,  $i$  è l'unità immaginaria,  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3$  è il vettore posizione, le costanti di frequenza

$$(3.3) \quad \omega, \omega_\theta > 0;$$

infine il punto nelle (3.1) indica il prodotto scalare in  $\mathbf{C}^3$  definito da

$$(3.4) \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 v_i \bar{w}_i \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{C}^3$$

con  $v_i$  e  $w_i$  componenti complesse dei vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  rispetto alla seguente base canonica  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  di  $\mathbf{C}^3$  [6].

Se si suppone che nelle (3.2) è

$$(3.5) \quad k'_2 = h'_2 = 0$$

lo spostamento  $u'$  e la temperatura  $\theta'$  nello strato  $C_2$  risultano indipendenti dalla seconda coordinata  $x_2$ . In tale situazione, non è possibile assumere a priori analoghe relazioni per  $\mathbf{k}$ ; tuttavia, imponendo la continuità dello spostamento per  $x_2 = 0$ , come sarà fatto in seguito nella Sez. 5 [v. (5.1)<sub>1</sub> e (4.13)<sub>1</sub>, (4.18)<sub>1</sub>], si ottiene una relazione che deve sussistere per ogni  $x_2$  e ciò accade se e solo se è nulla la seconda componente di  $\mathbf{k}$  ottenendo ancora la (5.9)<sub>1</sub>. Anche la seconda componente di  $\mathbf{h}$  in tale situazione risulta nulla in base alla (2.1)<sub>3</sub>, che, come vedremo in seguito, porta alla coincidenza dei due vettori  $\mathbf{h}$  e  $\mathbf{k}$ .

Per non complicare inutilmente i calcoli successivi ed in particolare l'espressione della relazione di dispersione, assumiamo fin da ora

$$(3.6) \quad k_2 = h_2 = 0,$$

relazione che è anche giustificata dal fatto che  $C_1$  è omogeneo ed isotropo, come  $C_2$ .

Poniamo inoltre

$$(3.7) \quad k_1, h_1 > 0 \quad \text{e} \quad k_3, k'_3, h_3, h'_3 \in \mathbb{C} - \{0\} .$$

Ricordiamo che in questo contesto sono le parti reali o quelle immaginarie delle (3.1) che hanno il significato fisico di spostamento e di temperatura. Le (3.1) esprimono la propagazione di onde elementari nei due solidi; tale propagazione, in virtù delle assunzioni fatte con le (3.5) e (3.7), è indipendente dalla coordinata spaziale  $x_2$  e non subisce attenuazioni nella direzione positiva dell'asse  $x_1$ . Ammettendo infine che nella regione  $C_1$  le onde si attenuano con la profondità, cioè per  $x_3 \rightarrow +\infty$ , ci limiteremo a considerare le soluzioni (3.1) con

$$(3.8) \quad \text{Im } k_3, \quad \text{Im } h_3 > 0 .$$

#### 4. Relazioni di dispersione e loro conseguenze.

Le (3.1) devono verificare le equazioni differenziali (2.1) e le analoghe riferite a  $C_2$ . In base alle terze equazioni di questi due sistemi, si ricava, in particolare che

$$(4.1) \quad \mathbf{k} = \mathbf{h}, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{h}', \quad \omega = \omega_\theta ;$$

dalle altre equazioni si ricavano le espressioni delle derivate parziali prime di  $q$  e di  $q'$ . Imponendo quindi l'uguaglianza delle derivate seconde di  $q$  e di  $q'$  si ottengono due sistemi lineari ed omogenei nelle ampiezze  $A, \theta_0$  e  $A', \theta'_0$ ; il primo di questi, cioè quello relativo a  $C_1$ , è il seguente

$$(4.2) \quad \begin{cases} i\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{k}} = aT_0 \theta_0, \\ (\rho_0 \omega^2 - \mu_T \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}}) A_2 = 0, \\ (\rho_0 \omega^2 - \mu_T \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}})(k_3 A_1 - k_1 A_3) = 0, \\ \omega a (\rho_0 \omega^2 - \mu_T \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}}) A_1 + \\ \quad + \{k \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}} - i\omega T_0 [c + 2aL - (\lambda_T + \mu_T) a^2]\} k_1 \theta_0 = 0, \end{cases}$$

quello relativo a  $C_2$  è identico a questo purchè si sostituiscano le grandezze con quelle relative a  $C_2$ .

Questi due sistemi ammettono soluzioni non nulle per  $\mathbf{A}$  e  $\theta_0$  ( $\mathbf{A}'$  e  $\theta'_0$ ) se e solo se sono nulli i determinanti dei loro coefficienti. Queste due condizioni sono espresse da

$$(4.3) \quad (\varrho_0 \omega^2 - \mu_T \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}})^2 \cdot (\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}} \{i k \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}} + \omega T_0 [c + 2aL - (\lambda_T + 2\mu_T) a^2]\} + \varrho_0 \omega^3 a^2 T_0) = 0$$

e dall'analoga per  $C_2$ .

Nella (4.3) non può essere nullo il primo fattore, in quanto dalla (4.2)<sub>4</sub> si otterrebbe una espressione immaginaria per  $\omega$  supposta invece reale [4]; ciò accade anche per  $\omega'$ , per cui le relazioni di dispersione si riducono a

$$(4.4) \quad \begin{cases} (\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}})^2 - i \frac{m\omega}{l} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{k}} - i \frac{\varrho_0 \omega^3}{l} = 0, \\ (\mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{k}}')^2 - i \frac{m'\omega'}{l'} \mathbf{k}' \cdot \bar{\mathbf{k}}' - i \frac{\varrho'_0 \omega'^3}{l'} = 0, \end{cases}$$

dove

$$(4.5) \quad \begin{cases} l = \frac{k}{a^2 T_0} \neq 0, & m = \frac{1}{a^2} [c + 2aL - (\lambda_T + 2\mu_T) a^2], \\ l' = \frac{k'}{a'^2 T'_0} \neq 0, & m' = \frac{1}{a'^2} [c' + 2a' L' - (\lambda'_T + 2\mu'_T) a'^2]. \end{cases}$$

Le (4.4) sono due biquadratiche che risolte danno  $k_3$  e  $k'_3$  in funzione di  $k_1$  e  $\omega$ . In base alle (3.8), per la regione  $C_1$  sono accettabili solo le seguenti due soluzioni  $k_3^{(M)}$  ( $M = 1, 2$ ) della (4.4)<sub>1</sub>

$$(4.6) \quad \begin{cases} k_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( - \left[ \left[ \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l^2} (m - \beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \quad \left. + i \left[ \left[ \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right)^2 + \frac{\omega^2}{2l^2} (m - \beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right), \\ k_3^{(2)} = \\ \quad = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( + \left[ \left[ \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l^2} (m + \beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \quad \left. + i \left[ \left[ \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l^2} (m + \beta)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l} \alpha \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

con

$$(4.7) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} [(m^4 + 16\rho_0^2 \omega^2 l^2)^{\frac{1}{2}} - m^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} [(m^4 + 16\rho_0^2 \omega^2 l^2)^{\frac{1}{2}} + m^2]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq \beta; \end{cases}$$

per la regione  $C_2$  si devono prendere in considerazione tutte e quattro le soluzioni  $k_3^{(N)}$  ( $N = 1, 2, 3, 4$ ) della (4.4)<sub>2</sub> e cioè

$$(4.8) \quad \begin{cases} k_3^{(1)} = -k_3^{(2)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( - \left\{ \left[ \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l'^2} (m' - \beta')^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right) \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + i \left\{ \left[ \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l'^2} (m' - \beta')^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left( k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right), \\ k_3^{(3)} = -k_3^{(4)} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( + \left\{ \left[ \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l'^2} (m' + \beta')^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right) \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + i \left\{ \left[ \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right)^2 + \frac{\omega^2}{4l'^2} (m' + \beta')^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left( -k_1^2 + \frac{\omega}{2l'} \alpha' \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right), \end{cases}$$

con

$$(4.9) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(m'^4 + 16\rho_0'^2 \omega^2 l'^2)^{\frac{1}{2}} - m'^2]^{\frac{1}{2}}, \\ \beta' = \frac{1}{\sqrt{2}} [(m'^4 + 16\rho_0'^2 \omega^2 l'^2)^{\frac{1}{2}} + m'^2]^{\frac{1}{2}}, \quad 0 < \alpha' \leq \beta'. \end{cases}$$

Per la regione  $C_1$  si ottengono pertanto due vettori  $\mathbf{k}$  che indichiamo con

$$(4.10) \quad \mathbf{k}^{(M)} = (k_1, 0, k_3^{(M)}) \quad (M = 1, 2);$$

dal sistema (4.2) si ricavano di conseguenza due soluzioni linearmente indipendenti per le ampiezze  $\mathcal{A}$  e  $\theta_0$  e quindi due soluzioni accetta-



bili per  $\mathbf{u}$  e  $\theta$ , in base alle (3.1)<sub>1,2</sub>; si ha cioè

$$(4.11) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{(M)} = A^{(M)} \exp [i(\mathbf{k}^{(M)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \\ \theta^{(M)} = \theta_0^{(M)} \exp [i(\mathbf{k}^{(M)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \end{cases} \quad (M = 1, 2),$$

dove

$$(4.12) \quad \begin{cases} A^{(M)} = \left( A_1^{(M)}, 0, \frac{k_3^{(M)}}{k_1} A_1^{(M)} \right), \\ \theta_0^{(M)} = \frac{i}{aT_0 k_1} \mathbf{k}^{(M)} \cdot \overline{\mathbf{k}^{(M)}} A_1^{(M)}, \end{cases} \quad (M = 1, 2).$$

La soluzione delle (2.1) sarà pertanto data da una combinazione lineare delle due soluzioni trovate e precisamente da

$$(4.13) \quad \mathbf{u} = \sum_{M=1}^2 \alpha^{(M)} \mathbf{u}^{(M)}, \quad \theta = \sum_{M=1}^2 \beta^{(M)} \theta^{(M)}$$

con  $\alpha^{(M)}, \beta^{(M)} \in \mathbf{C} \quad (M = 1, 2);$

i coefficienti di queste combinazioni lineari devono coincidere e cioè

$$(4.14) \quad \alpha^{(M)} = \beta^{(M)} \quad (M = 1, 2),$$

come si può controllare imponendo che le (4.13) devono verificare la (2.1)<sub>3</sub> per ogni  $\mathbf{r} \in C_1 \subset \mathbf{R}^3$  e tenendo conto della (4.2)<sub>1</sub>. Le (2.1)<sub>1,2</sub> forniscono le derivate parziali di  $q$ ; esse sono espresse da

$$(4.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} = \sum_{M=1}^2 \frac{k}{a} \left[ \mathbf{k}^{(M)} \cdot \overline{\mathbf{k}^{(M)}} - i\omega \frac{T_0}{k} (c + aL) \right] \alpha^{(M)} \theta^{(M)}, \\ \text{grad } q = \sum_{M=1}^2 \left[ \varrho_0 \omega^2 - \left( \lambda_T + 2\mu_T - \frac{L}{a} \right) \mathbf{k}^{(M)} \cdot \overline{\mathbf{k}^{(M)}} \right] \alpha^{(M)} \mathbf{u}^{(M)}, \end{cases}$$

integrando le quali si ricava per  $q$  la seguente espressione

$$(4.16) \quad \begin{aligned} q(x_1, x_3, t) &= \\ &= \sum_{M=1}^2 \frac{i}{k_1} \left[ \left( \lambda_T + 2\mu_T - \frac{L}{a} \right) \mathbf{k}^{(M)} \cdot \overline{\mathbf{k}^{(M)}} - \varrho_0 \omega^2 \right] \alpha^{(M)} A_1^{(M)} \exp [i(\mathbf{k}^{(M)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + q_0, \end{aligned}$$

dove  $q_0$  è una costante.

In modo analogo per la regione  $C_2$  si hanno quattro vettori

$$(4.17) \quad \mathbf{k}'^{(N)} = (k_1, 0, k_3^{(N)}) \quad (N = 1, 2, 3, 4),$$

in corrispondenza dei quali il sistema (4.2), scritto per  $C_2$ , dà quattro soluzioni linearmente indipendenti per  $\mathbf{A}'$  e  $\theta'_0$  e quindi [v. (3.1)<sub>3,4</sub>]

$$(4.18) \quad \begin{cases} \mathbf{u}'^{(N)} = \mathbf{A}'^{(N)} \exp [i(\mathbf{k}'^{(N)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \\ \theta' = \theta'_0 \exp [i(\mathbf{k}'^{(N)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \quad (N = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

dove

$$(4.19) \quad \mathbf{A}'^{(N)} = \left( A_1'^{(N)}, 0, \frac{k_3^{(N)}}{k_1} A_1'^{(N)} \right), \quad \theta'_0 = \frac{i}{aT_0 k_1} \mathbf{k}'^{(N)} \cdot \overline{\mathbf{k}'^{(N)}} A_1'^{(N)},$$

$$(N = 1, 2, 3, 4).$$

Di conseguenza la soluzione delle (2.1), relative a  $C_2$ , sarà espressa da

$$(4.20) \quad \mathbf{u}' = \sum_{N=1}^4 \alpha'^{(N)} \mathbf{u}'^{(N)}, \quad \theta' = \sum_{N=1}^4 \beta'^{(N)} \theta'^{(N)}$$

$$\text{con } \alpha'^{(N)}, \beta'^{(N)} \in \mathbf{C} \quad (N = 1, 2, 3, 4),$$

dove, come per  $C_1$ , deve essere

$$(4.21) \quad \alpha'^{(N)} = \beta'^{(N)} \quad (N = 1, 2, 3, 4);$$

inoltre dalle analoghe delle (4.15), riferite a  $C_2$ , si ottiene

$$(4.22) \quad q'(x_1, x_3, t) = \sum_{N=1}^4 \frac{i}{k_1} \left[ \left( \lambda'_r + 2\mu'_r - \frac{L'}{a'} \right) \mathbf{k}'^{(N)} \cdot \overline{\mathbf{k}'^{(N)}} - \varrho'_0 \omega^2 \right] \cdot$$

$$\cdot \alpha'^{(N)} A_1'^{(N)} \exp [i(\mathbf{k}'^{(N)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + q'_0,$$

con  $q'_0$  costante di integrazione.

### 5. Condizioni al contorno.

Assumiamo come condizione al contorno le seguenti relazioni

$$(5.1) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}', \quad \mathbf{t}\mathbf{i}_3 = \mathbf{t}'\mathbf{i}_3 \quad \text{per } x_3 = 0$$

e

$$(5.2) \quad \mathbf{t}'\mathbf{i}_3 = \mathbf{0} \quad \text{per } x_3 = -h.$$

Esse esprimono la continuità dello spostamento e degli sforzi nei punti del piano di saldatura di  $C_1$  con  $C_2$  ed il fatto che l'altro piano ( $x_3 = -h$ ) di frontiera per  $C_2$  è una superficie libera; ovvie conseguenze si hanno per  $\theta$  in virtù della (2.1)<sub>3</sub>.

Le espressioni delle componenti dei due vettori che compaiono nella (5.1)<sub>2</sub> si ricavano facilmente tenendo presenti le (2.3), (2.4), (4.12), (4.13), (4.19) e (4.20); esse sono

$$(5.3) \quad \begin{cases} t_{13} = i\mu_T \sum_{M=1}^2 (k_1 A_3^{(M)} + k_3^{(M)} A_1^{(M)}) \alpha^{(M)} \exp [i(\mathbf{k}^{(M)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], & t_{23} = 0, \\ t_{33} = -q_0 + \frac{i}{k_1} (\varrho_0 \omega^2 - 2\mu_T k_1^2) \sum_{M=1}^2 \alpha^{(M)} A_1^{(M)} \exp [i(\mathbf{k}^{(M)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] \end{cases}$$

e

$$(5.4) \quad \begin{cases} t'_{13} = i\mu'_T \sum_{N=1}^4 (k_1 A_3'^{(N)} + k_3'^{(N)} A_1'^{(N)}) \alpha'^{(N)} \exp [i(\mathbf{k}'^{(N)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], & t'_{23} = 0, \\ t'_{33} = -q'_0 + \frac{i}{k_1} (\varrho'_0 \omega^2 - 2\mu'_T k_1^2) \sum_{N=1}^4 \alpha'^{(N)} A_1'^{(N)} \exp [i(\mathbf{k}'^{(N)} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \end{cases}$$

Dalle (5.1)<sub>2</sub> e (5.2), tenendo conto delle (5.3)<sub>3</sub> e (5.4)<sub>3</sub>, in particolare si hanno

$$(5.5) \quad \begin{aligned} q'_0 - q_0 = & \\ = \frac{i}{k_1} \left[ (\varrho'_0 \omega^2 - 2\mu'_T k_1^2) \sum_{N=1}^4 \alpha'^{(N)} A_1'^{(N)} - (\varrho_0 \omega^2 - 2\mu_T k_1^2) \sum_{M=1}^2 \alpha^{(M)} A_1^{(M)} \right] & \\ & \cdot \exp [i(k_1 x_1 - \omega t)] \end{aligned}$$

e

$$(5.6) \quad q'_0 = \frac{i}{k_1} (\varrho'_0 \omega^2 - 2\mu'_T k_1^2) \cdot \left\{ \sum_{N=1}^4 \alpha^{(N)} A_1^{(N)} \exp[-ik_3^{(N)} h] \right\} \exp[i(k_1 x_1 - \omega t)],$$

che sussistono per ogni  $x_1$  e  $t$  se e solo se in esse risulta

$$(5.7) \quad q_0 = q'_0 = 0.$$

In definitiva, le (5.1) e (5.2) danno un sistema lineare e omogeneo di sei equazioni nelle sei incognite  $\alpha^{(M)}$  ( $M = 1, 2$ ) e  $\alpha^{(N)}$  ( $N = 1, 2, 3, 4$ ). Con qualche conto, tenendo presente la (2.5)<sub>2</sub> e che, in base alle (4.12)<sub>1</sub> e (4.19)<sub>1</sub>, risulta

$$(5.8) \quad k_1 A_3^{(M)} = k_3^{(M)} A_1^{(M)}, \quad k_1 A_3^{(N)} = k_3^{(N)} A_1^{(N)},$$

a tale sistema si può dare la seguente forma

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{M=1}^2 A_1^{(M)} \alpha^{(M)} = \sum_{N=1}^4 A_1^{(N)} \alpha^{(N)}, \\ \sum_{M=1}^2 k_3^{(M)} A_1^{(M)} \alpha^{(M)} = 0, \\ \sum_{N=1}^4 k_3^{(N)} A_1^{(N)} \alpha^{(N)} = 0, \\ [\omega^2(\varrho_0 - \varrho'_0) - 2k_1^2(\mu_T - \mu'_T)] \sum_{M=1}^2 A_1^{(M)} \alpha^{(M)} = 0, \\ \sum_{N=1}^4 k_3^{(N)} \exp[-ik_3^{(N)} h] A_1^{(N)} \alpha^{(N)} = 0, \\ (\varrho'_0 \omega^2 - 2\mu'_T k_1^2) \sum_{N=1}^4 \exp[-ik_3^{(N)} h] A_1^{(N)} \alpha^{(N)} = 0. \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette soluzioni non nulle se e solo se il determinante dei coefficienti è uguale a zero; questa condizione, con qualche

calcolo, assume la seguente forma

$$(5.10) \quad A_1^{(1)} A_1^{(2)} A_1'^{(1)} A_1'^{(2)} A_1'^{(3)} A_1'^{(4)} \cdot \\ \cdot (\varrho_0' \omega^2 - 2\mu_T' k_1^2) [\omega^2(\varrho_0 - \varrho_0') - 2k_1^2(\mu_T - \mu_T')] (k_3^{(2)} - k_3^{(1)}) \cdot \\ \cdot 2 \{ 4k_3^{(1)} k_3^{(3)} + (k_3^{(1)} - k_3^{(3)})^2 \cos [h(k_3^{(1)} + k_3^{(3)})] + \\ - (k_3^{(1)} + k_3^{(3)})^2 \cos [h(k_3^{(1)} - k_3^{(3)})] \} = 0 ,$$

per la quale si deve supporre

$$(5.11) \quad A_1^{(M)} \neq 0 \quad (M = 1, 2) \quad \text{e} \quad A_1'^{(N)} \neq 0 \quad (N = 1, 2, 3, 4) .$$

Sono certamente soluzioni del nostro problema

$$(5.12) \quad (k_1)_1 = \omega \left( \frac{\varrho_0'}{2\mu_T'} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad (k_1)_2 = \omega \left( \frac{1}{2} \frac{\varrho_0 - \varrho_0'}{\mu_T - \mu_T'} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

La prima di queste due soluzioni coincide con quella, ricavata in [4], che assicura la propagazione delle onde di Rayleigh nello stesso solido termoelastico incomprimibile che occupa un semispazio; la seconda coincide con la soluzione che assicura la propagazione delle onde di Stoneley nell'interfaccia tra due mezzi, ciascuno dei quali occupa un semispazio [4], purchè il mezzo con densità materiale più grande abbia anche un maggiore valore del coefficiente  $\mu_T$ .

La risoluzione completa dell'equazione (5.10) non può essere fatta per le notevoli difficoltà che presenta l'espressione in parentesi graffe, dove  $k_1$  compare in base alle complicate relazioni (4.8). Una semplificazione di tale espressione si ottiene ponendo in essa

$$(5.13) \quad \sigma = (k_3^{(1)} - k_3^{(3)}) h \quad \text{e} \quad \tau = (k_3^{(1)} + k_3^{(3)}) h ,$$

dove, in base alle (4.8), è

$$(5.14) \quad \begin{cases} \sigma, \tau \in \mathbf{C} - \{0\}, & \tau \neq \pm \sigma, & \text{Im } \tau > 0, \\ \text{Re } \sigma < 0, & \text{Im } \sigma \neq \pm \text{Im } \tau, & \text{Re } \sigma \neq \pm \text{Re } \tau; \end{cases}$$

con tale posizione si ha in particolare

$$(5.15) \quad 4k_3^{(1)} k_3^{(3)} = \tau^2 - \sigma^2,$$

e l'espressione, posta uguale a zero, si riduce a

$$(5.16) \quad \frac{1 - \cos \sigma}{\sigma^2} = \frac{1 - \cos \tau}{\tau^2}.$$

Dall'esame della funzione di variabile complessa  $f(z) = (1 - \cos z)/z^2$  risulta che se esistono soluzioni della (5.16) queste verificano certamente le (5.14), essendo  $f(z)$  pari; inoltre  $z = \infty$  è un punto di singolarità essenziale di  $f(z)$ , per cui, in virtù del teorema di Picard sulle funzioni di variabile complessa, in ogni intorno di  $z = \infty$  la funzione  $f(z)$  assume un qualunque prefissato valore in infiniti punti.

Purtroppo non è possibile stabilire se tali punti verificano (5.13) e le complicate relazioni (4.8) e quindi se esistono soluzioni della (5.10) diverse dalle (5.12).

Le stesse difficoltà si sono incontrate nello studio delle libere vibrazioni di uno strato piano infinito composto dallo stesso materiale qui considerato [5]. Ovviamente se si fissa un valore per  $k_1$  è possibile controllare se esso verifica o meno la (5.10).

## 6. Conclusioni.

Dalla precedente sezione risulta che il nostro problema ammette certamente soluzioni quando si assegna a  $k_1$ , che a priori era indeterminato, uno dei due valori espressi dalle (5.12).

Infatti, in corrispondenza a tali valori di  $k_1$  il determinante dei coefficienti del sistema omogeneo (5.9) è nullo [v. (5.10)] e pertanto è assicurata l'esistenza di soluzioni per le incognite  $\alpha^{(M)}$  ( $M = 1, 2$ ) e  $\alpha^{(N)}$  ( $N = 1, 2, 3, 4$ ) e quindi per lo spostamento e la temperatura, espressi dalle (4.13) e (4.20).

Esaminiamo ora questi due casi separatamente e cominciamo con l'esame della prima delle due espressioni (5.12) di  $k_1$ , cioè  $(k_1)_1$ .

In corrispondenza a tale valore di  $k_1$  il sistema (5.9) si riduce a

$$(6.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_1^{(1)} \alpha^{(1)} = -A_1^{(2)} \alpha^{(2)}, \\ \sum_{N=1}^4 A_1^{(N)} \alpha'^{(N)} = 0, \\ (k_3^{(1)} - k_3^{(2)}) A_1^{(1)} \alpha^{(1)} = 0, \\ \sum_{N=1}^4 k_3^{(N)} A_1^{(N)} \alpha'^{(N)} = 0, \\ \sum_{N=1}^4 k_3'^{(N)} \exp[-ik_3'^{(N)} h] A_1'^{(N)} \alpha'^{(N)} = 0, \end{array} \right.$$

in quanto l'equazione (5.9)<sub>6</sub> con  $k_1 = (k_1)_1$  diventa una identità, e nella (5.9)<sub>4</sub> è stato semplificato il fattore in parentesi quadre diverso da zero per  $k_1 = (k_1)_1$ .

In questo sistema è  $k_3^{(1)} \neq k_3^{(2)}$  in base alle (4.6), pertanto la terza equazione, in virtù delle (5.11), si riduce alla seguente condizione

$$(6.2) \quad \alpha^{(1)} = 0;$$

di conseguenza, tenendo presente sempre le (5.11), dalla (6.1)<sub>1</sub> si ha

$$(6.3) \quad \alpha^{(2)} = 0$$

e in definitiva per le (4.13) e (4.14) risulta in  $C_1$

$$(6.4) \quad \mathbf{u}(x_1, x_3, t) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \theta(x_1, x_3, t) = 0.$$

Rimangono nel sistema (6.1) le tre equazioni (6.1)<sub>2,4,5</sub> nelle quattro incognite residue  $\alpha'^{(N)}$  ( $N = 1, 2, 3, 4$ ), per cui si hanno per esse certamente soluzioni non nulle, mediante le quali è possibile scrivere le combinazioni lineari delle soluzioni elementari che danno  $\mathbf{u}'$  e  $\theta'$ , in base alle (4.20) e (4.21).

In definitiva con il valore  $(k_1)_1$  di  $k_1$  lo spostamento  $\mathbf{u}$  e la variazione di temperatura  $\theta$  sono nulli, in base alle (6.4); quindi il mezzo  $C_1$  resta indeformato e a temperatura uniforme, mentre nell'altro mezzo  $C_2$  si propagano onde di spostamento e onde termiche espresse dalle (4.20) e (4.21). Queste libere vibrazioni di  $C_2$ , come abbiamo già detto, sono espresse dalla sovrapposizione di quattro onde elementari e la

loro combinazione lineare è tale da annullare  $\mathbf{u}'$  e  $\theta'$  sull'interfaccia tra  $C_1$  e  $C_2$  in modo che sia, in particolare, verificata la continuità dello spostamento (5.1)<sub>1</sub>.

Resta ora da esaminare la seconda espressione di  $k_1$ , cioè  $(k_1)_2$  [v. (5.12)<sub>2</sub>].

Con tale valore di  $k_1$  il sistema (5.9) si semplifica ancora, in quanto in esso l'equazione (5.9)<sub>4</sub> diventa un'identità e nell'ultima (5.9)<sub>6</sub> il fattore in parentesi tonde può essere semplificato. Restano pertanto cinque equazioni che ammettono soluzioni non nulle per le sei incognite  $\alpha^{(M)}$  ( $M = 1, 2$ ) e  $\alpha^{(N)}$  ( $N = 1, 2, 3, 4$ ), per cui si possono scrivere le combinazioni lineari (4.13) e (4.20) per  $\mathbf{u}$  e  $\theta$ ,  $\mathbf{u}'$  e  $\theta'$ .

In questo secondo caso, cioè con il valore  $(k_1)_2$  di  $k_1$ , il mezzo  $C_2$ , sede di onde termiche e di spostamento espresse dalle (4.20), riesce a mettere in vibrazione anche il solido  $C_1$ , nel quale ora è possibile la propagazione di onde termiche e di spostamento, espresse dalle (4.13).

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] A. N. STROH, *Steady state problems in anisotropic elasticity*, J. Math. Phys., **41** (1962), pp. 77-103.
- [2] T. MANACORDA, *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2), **1** (1960), pp. 149-170.
- [3] T. MANACORDA, *Onde elementari nella termoelasticità di solidi incomprimibili*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **101** (1966-67), pp. 503-509.
- [4] G. AMENDOLA, *Surface and interfacial waves in incompressible materials*, Boll. Un. Mat. Ital., (5), **13-B** (1976), pp. 395-417.
- [5] G. AMENDOLA, *The problem of an excited layer for incompressible thermoelastic materials*, Boll. Un. Mat. Ital., (5), **16-B** (1979), pp. 662-673.
- [6] G. F. SIMMONS, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, London, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 luglio 1988.