RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

R. SANCHEZ PEREGRINO

Identité de Bernstein pour une fonction homogène à singularité isolée

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 81 (1989), p. 221-227

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1989__81__221_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 81 (1989)

Identité de Bernstein pour une fonction homogène à singularité isolée.

R. SANCHEZ PEREGRINO (*)

RÉSUMÉ - Le but de cet article est de déterminer de façon simple l'identité de Bernstein $Q(s, x, D_x) f^{s+1} = b(s) f^s$ et de calculer les racines du polynôme de Bernstein $b(s)$ pour une fonction f: $(\mathbf{C}, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ à singularité isolée homogène de degré k. D'après l'identité de Euler, il existe un opérateur différentiel P tel que $Pf = (k + n) f$. Nous donnons pour P une formule (cf. (2.3.1)) permettant d'exprimer les puissances P^r en fonction d'opérateurs $\mathbf{P}^{(m)}$, satisfaisant $\mathbf{P}^{(m)} f^s = \prod_{j=1}^{m} (ks + j + n - 1) f^s$. Nous démontrons enfin qu'il existe un polynôme $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ de degré $r = n \cdot (k-2) + 1$ tel que $b(P) = \mathbf{P}^{(r)}$ ce qui nous permettra de construire la identité de Bernstein. Je tiens à exprimer ma reconaissance à M.le professeur F. Baldassarri qui ma permis de profiter de l'ambiance de l'Université de Padoue, aussi que de son conseil pendant la préparation de ce travail.

1. Notations et définitions.

$\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ = l'anneau des germes de fonctions analytiques a l'origine 0 de $\mathbf{C}^n$.

$\mathcal{M}$ = l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

$J(f)$ = l'idéal engendré par $\{\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n\}$ dans $\mathcal{O}$, pour $f \in \mathcal{O}$.

(*) Indirizzo dell'A.: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria, México 20 D.F., México.

$\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial/\partial x_1, ..., \partial/\partial x_n]$ = l'anneau des germes d'opérateurs différentiel analytiques à l'origine de $\mathbf{C}^n$, $D_x = \partial/\partial x$.

$\mathcal{D}(f)$ = l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par $J(f)$.

$\mathcal{O}/J(f)$ = *algèbre locale* d'une fonction $f \in \mathcal{O}$.

1.1. Une fonction holomorphe f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ est appelée *fonction quasi homogène de degré d à exposants* $(a_1, ..., a_n) \in \mathbf{Q}^n$ si pour tout $t > 0$ on a $f(t^{a_1}x_1, ..., t^{a_n}x_n) = t^a f(x_1, ..., x_n)$.

1.2. Une function quasi homogène f *est non dégénérée* si 0 en est un poinr critique isolé (C.a.d. si $J(f)$ contient une puissance $\mathcal{M}^\mu$ de $\mathcal{M}$ on peut prendre $\mu = \dim_{\mathbf{C}} (\mathcal{O}/J(f))$).

1.3. On dit qu'un monôme $x^k = x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$ est de *quasi-degré d* si $a_1 k_1 + ... + a_n k_n = d$.

1.4. Une function $g \in \mathbf{C}\{x_1, ..., x_n\}$ est *d'ordre d* si les monômes qui la composent sont tout de quasi-degré égal ou supérieur à d, et au moins un monôme de quasi-degré d y apparaît effectivement; dans le cas où d est le quasi-degré de tous les monômes, on dit que d est le quasi-degré de la fonction; on admet que 0 est de quasi-degré ∞.

1.5. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{O}$ est *semi-quasi homogène de degré d à exposants* $a_1, ..., a_n$ si elle est la forme $f = f_0 + f_1$; où f_0 est une fonction quasi homogène non dégénérée de degré d à exposants $a_1, ..., a_n$ et f_1 une fonction d'ordre strictement supérieur à d.

1.6. On appelle *ensemble de générateurs* d'une algèbre locale de dimension finie $\mathcal{O}/J(f)$ un ensemble d'éléments $(e_1, ..., e_\mu)$ de $\mathcal{O}$ qui se transforme en ensemble de générateurs du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathcal{O}/J(f)$ par passage au quotient par l'idéal $J(f)$.

D'après V. Arnold [1] on a le résultant suivant: « Un ensemble de générateurs, monômial en $x_1, ..., x_n$, de l'algèbre locale d'une fonction semi-quasi homogène f à exposants $a_1, ..., a_n$ de degré 1 contient un et un seul élément de quasi-degré maximal $d_{\max} = \sum_{i=1}^{n} (1 - 2a_i)$; tous le monômes en $x_1, ..., x_n$ de quasi degré plus élevé appartiennent à l'idéal $J(f)$ ».

Dorenavant, f dénotera une fonction de $\mathcal{O}$ à singularité isolée qui soit aussi un polynôme de degré k en les $x_1, \ldots, x_n$: On peut regarder f comme fonction semi-quasi homogène à exposants $(1/k, \ldots, 1/k)$ et degré 1. On déduit du théorème de Arnold que:

$$\mathcal{M}^{n(k-2)} \not\subset J(f) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^{n(k-2)+1} \subset J(f) . \tag{1.17}$$

2.

(2.1) PROPOSITION. Soient

$$X_i^{(j)} = \frac{\partial^j}{\partial x_i^j} x_i^j \in \mathfrak{D} , \qquad i \in \{1, \ldots, n\} , \; j \in \mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$$

et

$$\mathbf{P}^{(m)} = \sum_{v_1+\ldots+v_n=m} \binom{m}{v_1, \ldots, v_n} X^{(v_1)} \ldots X_n^{(v_n)} \quad \text{où} \quad \binom{m}{v_1, \ldots, v_n} = \frac{m!}{v_1! \ldots v_n!} .$$

Alors

$$\mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^{(m+1)} - m\mathbf{P}^{(m)} , \qquad \text{pour tout } m \in \mathbf{N} . \tag{2.1.1}$$

(2.2) REMARQUE. D'après (1.7), $\{\mathbf{P}^{(1)}, \ldots, \mathbf{P}^{(n(k-2))}\}$ sont **C**-linéairement indépendants dans $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}(f)$.

DÉMONSTRATION DE (2.1).

$$\mathbf{P}^{(1)} \cdot \mathbf{P}^{(m)} = \sum_{j=1}^{n} X_j^{(1)} \sum_{v_1+\ldots+v_n=m} \binom{m}{v_1, \ldots, v_n} X_1^{(v_1)} \ldots X_n^{(v_n)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{n} \sum_{v_1+\ldots+v_n=m} \binom{m}{v_1, \ldots, v_n} X_1^{(v_1)} \ldots X_j^{(v_j+1)} - v_j X_j^{(v_j)} \ldots X_n^{(v_n)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{v_1+\ldots+v_n=m} \binom{m}{v_1, \ldots, v_n} X_1^{(v_1)} \ldots X_j^{(v_j+1)} \ldots X_n^{(v_n)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{v_1+\ldots+v_n=m} \binom{m}{vt, \ldots, v_n} v_t X_1^{(v_1)} \ldots X_n^{(v_n)} = \mathbf{P}^{(m+1)} H\, m\mathbf{P}^{(m)} , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

De la proposition on déduit par récurrence les deux résultats suivants:

(2.3) Corollaire. Soit $P = \sum_{j=1}^{n} X^{(1)}$. Alors

$$P^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\,{}_jC_r\,\mathrm{C}^{(j)} \tag{2.3.1}$$

où

$$ {}_sC_t = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0\,,\ t = 0\,, \\ 0 & \text{si } r = 0\,,\ t > 0\,, \\ 0 & \text{si } r > 0\,,\ t = 0\,, \\ s\,{}_sC_{t-1} + {}_{s-1}C_{t-1} & \text{si } r > 0\,,\ t > 0\,. \end{cases}$$

(2.3.2) Remarque.

${}_sC_t$:

$t \downarrow$ / $s \rightarrow$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	90	65	15	1

Démonstration du (2.3).

$$P^{r+1} = PP^r = \mathbf{P}^{(1)} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\,{}_jC_r\,\mathbf{P}^{(j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j}\,{}_jC_r(\mathbf{P}^{(j+1)} - j\mathbf{P}^{(j)}) = \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{r+1-j}\,{}_jC_{r+1}\mathbf{P}^{(j)}\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(2.4) Corollaire. Soit $m \in \mathbf{N}$, alors

$$\mathbf{P}^{(m)} f^s = \prod_{j=1}^{m} (ks + j + n - 1) f^s\,.$$

Démonstration. Nous avons

$$\mathbf{P}^{(m+1)} = \mathbf{P}^{(1)} \mathbf{P}^{(m)} + m\mathbf{P}^{(m)} .$$

Donc

$$\mathbf{P}^{(m+1)} f^s = \mathbf{P}^{(1)} \prod_{j=1} (ks + j + n - 1) f^s + m \prod_{j=1} (ks + j + n - 1) f^s =$$

$$= \prod_{j=1}^{m} (ks + j + n - 1) \cdot (ks + n + m) f^s = \prod_{j=1}^{m+1} (ks + j + n - 1) f^s .$$

C.Q.F.D.

3. L'étape suivante est la construction d'un polynôme $b(s) \in \mathbf{C}[s]$, non-trivial de degré minimum tel que $b(P) \in \mathfrak{D}(f)$.

(3.1) Proposition. I) Soit $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ de degré r. Si $r \leqslant n(k-2)$ et $b(P) \in \mathfrak{D}(f)$ on a nécessairement $b(s) = 0$.

II) Si $r = n(k-2) + 1$ alors il existe $b(s) \in \mathbf{C}[s]$ non-trivial de degré r tel que $b(P) = \mathbf{P}^{(n(k-2)+1)} \in \mathfrak{D}(f)$.

Démonstration I). Soit $b(s) = \sum_{m=0}^{r} b_m s^m$ tel que $0 \leqslant r \leqslant n(k-2)$ et $b(P) \in \mathfrak{D}(f)$, d'après (2.3.1)

$$b(P) = \sum_{m=0}^{r} b_m P^m = \sum_{j=0}^{r} \sum_{m=0}^{r} (-1)^{m-j} {}_jC_m b_m \mathbf{P}^{(j)} \equiv 0 \qquad \text{dans } \mathfrak{D}/\mathfrak{D}(f) .$$

D'après (2.2) nous avons.

$$E_j = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{j-1} {}_jC_m b_m = 0 , \qquad j = 0, 1, \ldots, r . \tag{3.2}$$

Nous rappelons que ${}_sC_t = 0$ si s, t et ${}_sC_s = 1$. Donc ce système n'a que la solution triviale $b_0 = b_1 = \ldots = b_r = 0$.

Démonstration II). Soit $r = n(k-2) + 1$ nous avons les mêmes équations $E_0 = 0, \ldots, E_{r-1} = 0$, que toute à l'heure, mais la dernière équation $E_r = 0$ est remplacée par $b_{n(k-2)+1} = 1$.

Il existe donc une seule solution

$$b(s)=\sum_{m=0}^{r} b_m s^m \qquad \text{de} \qquad b(P)=\mathrm{P}^{(n(k-2)+1)}\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

4. Construction de l'identité de Bernstein.

$$\mathrm{P}^{(n(k-2)+1)}=\sum_{i=1}^{n} J_i(x, D_x)\,f_{x_i} \qquad \text{où} \qquad f_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}\,, \qquad J_i(x, D_x)\in \mathfrak{D}\,.$$

Soit $Q=\sum_{i=1}^{n} J_i(x, D_x)D_{x_i}$. Alors

$$Qf^{s+1}=(s+1)\sum_{i=1}^{n} J_i f_{x_i} f^s=$$

$$=(s+1)\mathrm{P}^{(n(k-2)+1)}f^s=(s+1)\prod_{j=1}^{n(k-2)+1}(ks+j+n-1)\,f^s\,.$$

C'est-à-dire l'identité et le polynôme de Bernstein sont

$$(*) \qquad k^{-n(k-2)+1}Qf^{s+1}=k^{-n(k-2)-1}(s+1)\prod_{j=1}^{n(k-2)+1}(ks+j+n-1)\,f^s\,,$$

$$(**) \qquad k^{+n(k-2)-1}(s+1)\prod_{j=1}^{n(k-2)+1}(ks+j+n-1)\,;$$

(4.1) Théorème. L'identité de Bernstein d'un polynôme homogène f de degrée k en $x_1, \ldots, x_n$ à singularité isolée à $(0, \ldots, 0)$ est

$$k^{-n(k-2)-1}Qf^{s+1}=k^{-n(k-2)-1}(s+1)\prod_{j=1}^{n(k-2)+1}(ks+j+n-1)\,f^s\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(4.2) Théorème. Le polynôme de Bernstein d'un polynôme homogène f de degrée k en $x_1, \ldots, x_n$ à singularité isolée à $(0, \ldots, 0)$ est

$$b(s)=k^{-n(k-2)-1}(s+1)\prod_{j=1}^{n(k-2)+1}(ks+j+n-1)\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. ARNOLD - A. VARCHENKO - S. GOUSSEIN-ZADÉ, *Singularité des applications différentiables*, Mir, Moscou (1986).

[2] I. N. BERNSTEIN, *Feasibility of the analytic continuation f_+^λ for certain polynomial f*, Funct. Anal. Appl., **2** (1968), pp. 85-87.

[3] R. SÁNCHEZ-PEREGRINO, Thèse 3ème cycle, Université Paris VII (1984).

[4] T. YANO, *On the theory of b-functions*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **14** (1978), pp. 111-202.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 giugno 1988.