RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARINO BADIALE

**Un risultato di molteplicità di soluzioni per problemi ai limiti semilineari**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 80 (1988), p. 33-44

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__80__33_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 80 (1988)

# Un risultato di molteplicità di soluzioni per problemi ai limiti semilineari.

MARINO BADIALE (*)

SUMMARY - In this work we prove the existence of (at least) two solutions for the one-dimensional nonlinear boundary value problem

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -u'' = g(u) + h(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

where the nonlinearity $g(u)$ is supposed to be asymptotically linear for $u \to -\infty$ and divergent for $u \to a^- > 0$. We use a variational approach: the solutions of $(P_t)$ are thought to be critical points of a functional defined on an open set of $H_0^1((0, \mathrm{p}))$. We prove that this functional has a local minimum and then, using a deformation lemma of V. Benci, that there is a « mountain-pass » solution.

## 1. – Introduzione ed enunciato del teorema.

È ben noto che nello studio di problemi al contorno semilineari del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} -u'' = g(u) + h(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

è di fondamentale importanza la relazione che intercorre fra gli auto-

(*) Indirizzo dell'A.: Dipartimento di Matematica pura e applicata, via Belzoni 7, 35131 Padova (Italia).

valori $\lambda_k$ del problema

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

(cioè $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, \ldots$), e i valori (eventualmente $= \pm\infty$) $\lim\limits_{u\to-\infty} g'(u) = g'_-$, $\lim\limits_{u\to-\infty} g'(u) = g'_+$ (cfr. Ambrosetti [1983]). Se $g'_- \neq g'_+$ il problema (1) prende il nome di «problema con jumping nonlinearities» (cfr. Fučik). In particolare fra le «jumping nonlinearities» a noi interessa il caso $g'_- < \lambda_1 < g'_+$, caso che è stato oggetto di numerosi lavori a partire da quello di Ambrosetti e Prodi; alcuni di questi lavori sono indicati nella bibliografia [Ambrosetti e Prodi, Kazdan e Warner, Amann e Hess, Solimini, Ambrosetti [1984], Mc Kenna e Walter, Lazer e Mc Kenna].

Il modo usuale di procedere è di scrivere $h(x) = h_1(x) + t\sin x$ con $\int_0^\pi h_1(x)\sin x\,dx = 0$, mostrando poi che $\exists T_0 \in \mathbb{R}$ tale che il problema ammette (almeno) due soluzioni per $t < T_0$, almeno una soluzione per $t = T_0$, nessuna soluzione per $t > T_0$. Scriveremo dunque (1) nella forma

$$(P_t) \qquad \begin{cases} -u'' = g(x, u) + t\sin x \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

(dove $g(x, u) = g(u) + h_1(x)$).

Nel presente lavoro ci proponiamo di studiare il problema $(P_t)$ nel caso in cui $g$ non sia definita su tutto $\mathbb{R}$ ma solo su una semiretta $(-\infty, a)$, e diverga per $x \to a^-$. Precisamente, facciamo le seguenti ipotesi su $g$:

$(g_1)$ $\exists a > 0$ tale che $g \in C^1((-\infty, a), \mathbb{R})$.

$(g_2)$ $\exists \alpha \in (0, 1)$ tale che $\lim\limits_{u\to-\infty} g'(u) = \alpha$.

$(g_3)$ $\exists p \geqq 2$ e $\exists \delta > 0$ tali che, per opportune costanti $M'$, $M''$, $N'$, $N''$ (con $N', N'' > 0$) e $\forall u \in (a-\delta, a)$, vale

$$M' + N'/(a-u)^{p+1} < g(u) < N''/(a-u)^{p+1} + M''.$$

Osserviamo che da $(g_3)$ segue $g(u) \to +\infty$ per $u \to a^-$.

Dimostreremo il seguente

TEOREMA. *Sotto le ipotesi* $(g_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, $\exists T_0, T_1 \in \mathbb{R}$, *con* $T_1 \leqslant T_0$, *tali che il problema* $(P_t)$ *non ha nessuna soluzione per* $t > T_0$, *e ammette almeno due soluzioni per* $t < T_1$.

Il metodo seguito nella dimostrazione del teorema è quello di cercare le soluzioni di $(P_t)$ come punti critici del funzionale

$$J_t(u) = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (u'(x))^2\,dx - \int_0^\pi G(x, u(x))\,dx - t\int_0^\pi u(x)\sin x\,dx$$

dove $G(x, u) = \int_0^u g(x, s)\,ds$. Con procedimenti usuali si mostra che per $t \ll 0$, $J_t$ ha un punto critico $u_t$ che è punto di minimo locale per $J_t$. Per trovare una seconda soluzione occorre osservare che, a differenza di quanto accade nel caso in cui $g \in C^1(\mathbb{R})$, $J_t$ non è definito su tutto $H_0^1((0,\pi))$ ma solo sull'insieme $\Lambda = \{u \in H_0^1((0,\pi))\colon u(s) < a,\ \forall s \in (0,\pi)\}$. Si usa allora un risultato contenuto in Benci per ottenere un «lemma di deformazione» su $\Lambda$; grazie a tale lemma si dimostra l'esistenza di (almeno) un altro punto critico usando metodi standard di «minimax» (cfr. Ambrosetti e Rabinowitz).

Il lavoro è diviso nel seguente modo:

§ 1. Introduzione ed enunciato del teorema.

§ 2. Preliminari.

§ 3. Lemmi di compattezza per $J_t$.

§ 4. Dimostrazione del teorema.

## 2. – Preliminari.

Poniamo

$$\Lambda = \{u \in H_0^1((0,\pi))\colon u(s) < a,\ \forall s \in (0,\pi)\}\,.$$

Ricordando l'immersione $H_0^1((0,\pi)) \hookrightarrow C^{0,j}((0,\pi))$ per $j < \frac{1}{2}$, si ha che $\Lambda$ è un aperto di $H_0^1$ e che la sua frontiera è data da $\partial\Lambda = \{u \in \Lambda\colon \exists s \in (0,\pi) \text{ con } u(s) = a\}$. Si ha inoltre $J_t \in C^2(\Lambda, \mathbb{R})$, e la sua derivata è data da

$$(J_t'(u), v)_{H_0^1} = \int_0^\pi u'v' - \int_0^\pi g(\cdot, u)v - t\int_0^\pi v \sin(\cdot) \qquad \forall u, v \in H_0^1 .$$

Se $A$ è l'operatore $Au = -u''$, con dominio denso in $H_0^1$, posto $K_t(u)$ $A^{-1}[g(\cdot, u) + t\sin(\cdot)]$ si ha

$$J_t'(u) = u - K_t(u) .$$

$K_t$ è compatto sui sottoinsiemi $\Lambda_\sigma = \{u \in H_0^1 \colon u(s) < a - \sigma, \forall s\}$, per $\sigma > 0$.

Proposizione 1. $\exists T_0, T_1 \in \mathbb{R}$, $T_1 \leqq T_0$, *tali che* $\forall t > T_0$ *il problema* $(P_t)$ *non ammette soluzioni, mentre* $\forall t < T_1$, $J_t$ *ha un minimo locale stretto in* $u_t \in A$. *Tale* $u_t$ *è soluzione di* $(P_t)$ *e vale* $u_t(s) < 0$, $\forall s \in (0, \pi)$.

Dim. Questo risultato è sostanzialmente noto: cfr. ad es. Ambrosetti [1984], Solimini. Diamo solo un rapido cenno su come ricondurre il nostro problema ai casi trattati nei lavori citati. Per quanto riguarda il risultato di non esistenza di soluzioni, notiamo che dalle ipotesi $(g_i)$ si ricava facilmente che per una opportuna costante $M$ vale $g(u) - u \geqq M$, $\forall u \in (-\infty, a)$; allora se $u_t$ è soluzione di $(P_t)$ si ha $-u_t'' - u_t = g(x, u_t) + t\sin x - u_t$ e quindi, moltiplicando per $\sin x$ e integrando, si ottiene la disuguaglianza $0 \geqq \overline{M} + t\int_0^\pi \sin^2 x\, dx$, con $\overline{M}$ costante, e certamente questa relazione non vale per $t \to +\infty$.

Per dimostrare l'esistenza di un minimo locale $u_t$ di $J_t$, per $t \ll 0$, consideriamo una $\bar{g} \in C^1(\mathbb{R})$ con le seguenti proprietà: per un opportuno $\varepsilon > 0$, $\bar{g}(u) = g(u)$, $\forall u \leqq \varepsilon$, e $\bar{g}(u)$ è asintoticamente lineare per $u \to +\infty$. Al problema

$$(\overline{P}_t) \qquad \begin{cases} -u'' = \bar{g}(u) + h(x) \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

si applicano i risultati di Ambrosetti, Solimini: $\exists T_1 \in \mathbb{R}$ tale che $\forall t \leqq T_1$ $(\overline{P}_t)$ ha una soluzione $u_t$ con $u_t(s) \leqq 0$, $\forall s \in [0, \pi]$, e $u_t$ risulta essere un minimo locale stretto per il funzionale

$$\overline{J}_t(u) = \int_0^\pi [u'(x)]^2\, dx - \int_0^\pi \overline{G}(x, u(x))\, dx - t\int_0^\pi u(x) \sin x\, dx$$

dove

$$\bar{G}(x, u) = \int_0^u \bar{g}(x, s)\, ds \qquad \text{e} \qquad \bar{g}(x, s) = \bar{g}(s) + h_1(x)\,.$$

L'immersione $H_0^1 \hookrightarrow C^{0,\gamma}$ e il fatto che $\bar{g}(s) = g(s)$, $\forall s \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ci dicono che $\bar{J}_t = J_t$ in un opportuno intorno (in $H_0^1$) di $u_t$: allora $u_t$ è un minimo locale stretto per $J_t$ e risolve $(P_t)$. $\square$

Ricordiamo infine alcuni risultati tratti da Benci.
Sia $X$ uno spazio di Hilbert, $\Lambda$ un aperto di $X$.

DEFINIZIONE 1. Una funzione $\varrho: \Lambda \to \mathbb{R}$ è detta *funzione-peso* se soddisfa a:

(2.i) $\varrho \in C^1(\Lambda, \mathbb{R})$.

(2.ii) $\varrho(u) > 0$, $\forall u \in \Lambda$.

(2.iii) Se $\{u_n\}$ è una successione in $\Lambda$, e $u_n \to u \in \partial\Lambda$, allora

$\varrho(u_n) \to +\infty$ per $n \to +\infty$.

DEFINIZIONE 2. Sia $J \in C^1(\Lambda, \mathbb{R})$; $J$ soddisfa la *condizione di Palais-Smale pesata* (weighted Palais-Smale, abbreviata WPS) se esiste una funzione-peso $\varrho$ (nel senso della Definizione 1) tale che, data una qualsiasi successione $\{u_n\} \subset \Lambda$, valgano le seguenti proprietà:

(WPS 1) Se $\varrho(u_n)$ e $J(u_n)$ sono limitate e $J'(u_n) \to 0$, allora $\{u_n\}$ ha una sottosuccessione convergente a un $u \in \Lambda$.

(WPS 2) Se $J(u_n)$ converge e $\varrho(u_n) \to +\infty$, allora $\exists \nu > 0$ tale che $\|J'(u_n)\| \geqq \nu \|\varrho'(u_n)\|$, per ogni $n$ da un certo indice in poi.

Ricordiamo che $c \in \mathbb{R}$ è un livello critico per $J$ se $\exists u \in \Lambda$ con $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$.

LEMMA 1. *Sia* $J \in C^2(\Lambda, \mathbb{R})$ *che soddisfi a* (WPS). *Supponiamo che* $c \in \mathbb{R}$ *non sia livello critico per* $J$ *nè punto di accumulazione di livelli critici. Allora esistono costanti* $\bar{\varepsilon} > \varepsilon > 0$ *e una funzione continua*

$\eta: [0,1]\times\Lambda \to \Lambda$ *tale che*

*a)* $\quad \eta(0, u) = u, \ \forall u \in \Lambda.$

*b)* $\quad \eta(t, u) = u, \ \forall u \in \Lambda$ *tale che* $J(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$ *e* $\forall t \in [0, 1].$

*c)* $\quad \eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subseteq A_{c-\varepsilon}$, *dove per* $\sigma \in \mathbb{R}$, $A_\sigma = \{u \in \Lambda : J(u) \leqq \sigma\}.$

*Inoltre* $\bar{\varepsilon}$ *può essere scelto arbitrariamente piccolo.*

DIM. Vedi Benci. □

## 3. – Lemmi di compattezza per $J_t$.

Cerchiamo adesso di dimostrare che nel nostro caso si può applicare il Lemma 1. Cominciamo col definire una opportuna funzione-peso $\varrho$:

$$\varrho(u) = \left[\int_0^\pi [a - u(s)]^{-p}\, ds\right]^{1/p}$$

con $p \geqq 2$ dato dalla $(g_3)$. Notiamo che $\varrho(u)$ è ben definita, per $u \in \Lambda$, perchè da $u(s) < a$, $\forall s$ e $u$ continua si ricava che $\exists \sigma > 0$ con $u(s) < a - \sigma$, $\forall s$.

LEMMA 2. $\varrho$ *soddisfa a* (2.i), (2.ii), (2.iii).

DIM. È chiaro che $\varrho \in C^1(\Lambda, \mathbb{R})$, e si ha

$$(2) \qquad (\varrho'(u), v)_{H_0^1} = \{1/[\varrho(u)]^{p-1}\}\int_0^\pi v/(a - u)^{p+1}\, ds \qquad \forall u, v \in H_0^1 .$$

La (2.ii) è banalmente vera. Resta da dimostrare la (2.iii). Supponiamo allora che $\{u_n\}$ sia una successione in $\Lambda$ con $u_n \to u$, in $H_0^1$, e $u \in \partial\Lambda$; vogliamo dimostrare che $\varrho(u_n) \to +\infty$. Sia $\beta > 0$ tale che $\|u_n\|_{H_0^1} \leqq \beta$, e $\bar{t} \in (0, \pi)$ tale che $a = u(\bar{t}) = \lim_n u_n(\bar{t})$. Applicando la disuguaglianza di Hölder si ha subito che $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in [0, \pi]$ vale

$$|u_k(t) - u_k(\bar{t})| = \left|\int_{\bar{t}}^t u_k'(s)\, ds\right| \leqq \left|\int_{\bar{t}}^t ds\right|^{\frac{1}{2}} \cdot \left|\int_{\bar{t}}^t [u_k'(s)]^2\, ds\right|^{\frac{1}{2}} \leqq |t - \bar{t}|^{\frac{1}{2}} \cdot \|u_k\|_{H_0^1} .$$

Da qui si ha

$$[a-u_k(t)]^p \leqq [a-u_k(\bar t)+|t-\bar t|^{\frac12}\|u_k\|_{H_0'}]^p \leqq$$
$$\leqq 2^{p-1}\big[[a-u_k(\bar t)]^p+|t-\bar t|^{p/2}\|u_k\|^p_{H_0'}\big].$$

Posto $\varepsilon_k=[a-u_k(\bar t)]^p$, si ha $1/[a-u_k(t)]^p \geqq 2^{p-1}(\varepsilon_k+|t-\bar t|^{p/2}\beta^p)^{-1}$ e quindi, scrivendo $C$, $C'$ per indicare costanti $>0$,

$$\varrho(u_k)^p=\int_0^\pi 1/[a-u_k(t)]^p\,dt \geqq C\int_0^\pi\big[\varepsilon_k/\pi^{p/2}+|(t-\bar t)/\pi|^{p/2}\beta^p\big]^{-1}dt \geqq$$
$$\geqq C\int_0^\pi\big[\varepsilon_k/\pi+|\bar t-t|\beta^p/\pi\big]^{-1}dt=$$
$$=C\Big\{\int_0^{\bar t}\big[\varepsilon_k/\pi+(\bar t-t)\beta^p/\pi\big]^{-1}+\int_{\bar t}^{\pi}\big[\varepsilon_k/\pi+(t-\bar t)\beta^p/\pi\big]^{-1}dt\Big\}=$$
$$=C'\big[\log(1+\beta^p\bar t/\varepsilon_k)+\log[1+(\pi-\bar t)\beta^p/\varepsilon_k]\big]$$

e poichè $\varepsilon_k\to 0$ per $k\to+\infty$, quest'ultima espressione tende a $+\infty$, quindi $\varrho(u_k)\to+\infty$. □

Vogliamo adesso dimostrare che rispetto a questa funzione-peso, $J_t$ soddisfa a (WPS). Per dimostrare ciò, premettiamo alcune proprietà della funzione $G(x,u)=\int_0^u g(x,s)\,ds$, che si ricavano in modo ovvio dalle ipotesi $(g_2)$, $(g_3)$:

$(G_1)$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ costanti, $M'_\varepsilon$, $M''_\varepsilon$ e $N_\varepsilon$ $(N_\varepsilon>0)$ tali che $\forall u\leqq -N_\varepsilon$ e $\forall x\in[0,\pi]$ vale

$$\tfrac12(\alpha-\varepsilon)u^2+M'_\varepsilon\leqq G(x,u)\leqq\tfrac12(\alpha+\varepsilon)u^2+M''_\varepsilon.$$

$(G_2)$ $\exists$ costanti, $N_1$, $N_2$, $M_1$, $M_2$ $(N_i>0)$ tali che $\forall u\in(a-\delta,a)$, $\forall x$ vale $M_1+N_1/(a-u)^p\leqq G(x,u)\leqq M_2+N_2/(a-u)^p$.

Dimostriamo che valgono le proprietà (WPS1), (WPS2):

LEMMA 3. *Nelle nostre ipotesi, vale la* (WPS1).

DIM. Sia $\{u_n\}$ una successione in $\Lambda$ tale che $\varrho(u_n)$ e $J_t(u_n)$ sono limitate, e $J'_t(u_n) \to 0$.

Dimostriamo innanzitutto che in tal caso $\{u_n\}$ è limitata in $H_0^1$. Supponendo per assurdo che ciò non sia vero, dovrebbe allora esistere una sottosuccessione di $\{u_n\}$, che per comodità chiamiamo ancora $\{u_n\}$, tale che $\lim_n \|u_n\|_{H_0^1} = +\infty$. Ora, da $(G_1)$, $(G_2)$ si ricava che $\forall \varepsilon > 0$ esiste una costante $L_\varepsilon$ tale che, $\forall u < a$ e $\forall s \in [0, \pi]$

$$|G(s, u)| \leqq L_\varepsilon + N_2/(a-u)^p + \tfrac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)u^2 .$$

Si ha allora, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall s \in [0, \pi]$,

$$\int_0^\pi |G(s, u_n(s))|ds \leqq L_\varepsilon \pi + N_2 \varrho(u_n)^p + \tfrac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)\|u_n\|_{L^2}^2 .$$

Da ciò e dall'ipotesi $|J_t(u_n)| \leqq M$ si ottiene, per opportune costanti $K$, $K_t$:

$$\tfrac{1}{2}\|u_n\|_{H_0^1}^2 \leqq K + N_2 \varrho(u_n)^p + \tfrac{1}{2}(\alpha + \varepsilon)\|u_n\|_{L^2}^2 + K_t\|u_n\|_{L^2} . \tag{3}$$

Le ipotesi $\|u_n\|_{H_0^1} \to +\infty$, $|\varrho(u_n)| \leqq M'$ ci dicono quindi che deve essere $\|u_n\|_{L^2} \to +\infty$. Dividendo per $\|u_n\|_{L^2}^2$ e ricordando che $\lambda_1 \leqq \leqq \|u_n\|_{H_0^1}^2/\|u_n\|_{L^2}^2$, si ricava, per $n \to +\infty$, $\alpha + \varepsilon \geqq \lambda_1$.

Ciò vale $\forall \varepsilon > 0$, e quindi $\alpha \geqq \lambda_1$ in contraddizione con l'ipotesi $(g_2)$. Abbiamo dunque dimostrato che, nelle nostre ipotesi, la $\{u_n\}$ si mantiene limitata in $H_0^1$: $\|u_n\|_{H_0^1} \leqq M$, $\exists M > 0$.

Dimostriamo adesso che, almeno da un certo indice in poi, è $u_n \in \Lambda_\sigma$ per un opportuno $\sigma > 0$ (l'aperto $\Lambda_\sigma$ è stato definito alla fine del § 1). Se ciò non fosse vero, dovrebbe esistere una successione $\{s_k\}$ in $[0, \pi]$ e una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tali che $u_{n_k}(s_k) \to a$; passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre $s_k \to \bar{s} \in [0, \pi]$. Poichè $\|u_n\|_{H_0^1} \leqq M$, quindi $\|u_n\|_{C^{0,\frac{1}{2}}} \leqq M'$, si ha subito $u_{n_k}(\bar{s}) \to a$: come si vede dalla dimostrazione del Lemma 2, il fatto che $\|u_{n_k}\|_{H_0^1} \leqq M$ e che $u_{n_k}(\bar{s}) \to a$ è sufficiente per dedurre che $\varrho(u_{n_k}) \to +\infty$. Si ha allora un assurdo, e possiamo concludere che esistono $\sigma > 0$ e $n_\sigma \in \mathbb{N}$ tali che $u_n \in \Lambda_\sigma$ $\forall n \geqq n_\sigma$. Ma $J'_t(u_n) = u_n - K_t(u_n)$, $J'_t(u_n) \to 0$ e $K_t$ è compatto su $\Lambda_\sigma$: si ottiene subito l'esistenza di una sottosuccessione convergente $u_n \to v$ in $H_0^1$. Poichè $u_n \in \Lambda_\sigma$, $\forall n \geqq n_\sigma$, si ha $v \in \Lambda$, e questo conclude la dimostrazione del Lemma 3. □

LEMMA 4. *Nelle nostre ipotesi vale la* (WPS2).

DIM. Sia $\{u_n\}$ successione in $\Lambda$ con $J_t(u_n) \to c \in \mathbb{R}$ e $\varrho(u_n) \to +\infty$. Cominciamo col dimostrare che esistono $M > 0$ e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tali che

$$\|u_n\|_{H_0'}/\varrho(u_n)^{p/2} \leqq M\,, \qquad \forall n \geqq \bar{n}\,. \tag{4}$$

Se infatti non valesse (4) si avrebbe (a meno di sottosuccessioni) $\|u_n\|_{H_0'}/\varrho(u_n)^{p/2} \to +\infty$. Poichè $J_t(u_n)$ è convergente, quindi certo limitata, si possono ripetere i ragionamenti svolti nella dimostrazione del Lemma 2 e ottenere la disuguaglianza (3). Dopo aver diviso i membri di (3) per $\|u_n\|^2_{H_0'}$, ricordando che $\|u_n\|^2_{L^2}/\|u_n\|_{H_0'} \leqq 1/\lambda_1$ e che siamo nell'ipotesi $\|u_n\|_{H_0'}/\varrho(u_n)^{p/2} \to +\infty$, quindi $\varrho(u_n)^p/\|u_n\|_{H_0'} \to 0$, si passa al limite per $n \to +\infty$ e si ottiene $1 \leqq (\alpha + \varepsilon)/\lambda_1$, cioè $\lambda_1 \leqq \leqq \alpha + \varepsilon$. Poichè ciò vale $\forall \varepsilon \geqq 0$ si ottiene $\lambda_1 \leqq \alpha$ e l'assurdo ci prova allora che vale la (4).

Cerchiamo adesso delle stime su $\|J_t'(u_n)\|_{H_0'}$. Notiamo innanzitutto che dalle ipotesi su $g$ si ricava facilmente (ricordando che $g(x, u) = g(u) + h_1(x)$) che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(s, u)u \geqq N_\varepsilon + (\alpha - \varepsilon)u^2 + N_1/(a-u)^{p+1} \qquad \forall s \in [0, \pi] \text{ e } \forall u < a\,.$$

Da ciò si ricava

$$\int_0^\pi g(s, u_n(s))\, u_n(s)\, ds \geqq N_\varepsilon \pi + (\alpha - \varepsilon)\|u_n\|^2_{L^2} + \int_0^\pi N_1/[a - u_n(s)]^{p+1}\, ds\,.$$

Valutiamo adesso l'espressione $\|J_t'(u_n)\|_{H_0'}\,\|u_n\|_{H_0'}$; si ha

$$\begin{aligned}\|J_t'(u_n)\|_{H_0'}\|u_n\|_{H_0'} &\geqq -\big(J_t'(u_n), u_n\big)_{H_0'} = \\ &= \int_0^\pi g(s, u_n(s))\, u_n(s)\, ds + t\int_0^\pi u_n(s) \sin s\, ds - \|u_n\|^2_{H_0'} \geqq \\ &\geqq N_\varepsilon \pi + \int_0^\pi N_1/[a - u_n(s)]^{p+1}\, ds + K\|u_n\|_{L'} - \|u_n\|^2_{H_0'}\,.\end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Hölder si ha, per una opportuna costante $C > 0$,

$$\int_0^\pi 1/(a - u_n)^{p+1}\, ds \geqq C\left[\int_0^\pi 1/(a - u_n)^p\, ds\right]^{(p+1)/p} = C\varrho(u_n)^{p+1}\,.$$

È chiaro allora che si può scrivere

$$N_1\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds \geqq \tfrac{1}{2}N_1 C\varrho(u_n)^{p+1} + \tfrac{1}{2}N_1\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds$$

e quindi

$$\|J_t'(u_n)\|_{H_0'}\|u_n\|_{H_0'} \geqq N_\varepsilon\pi + \tfrac{1}{2}N_1 C\varrho(u_n)^{p+1} + \tfrac{1}{2}N_1\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds + \\ - \|u_n\|_{H_0'}^2 + K_t\|u_n\|_{L'}\,.$$

Utilizzando la (4) si ha allora

$$\tag{5} \|J_t'(u_n)\|_{H_0'} \geqq \{1/M\varrho(u_n)^{p/2}\}\cdot\|J_t'(u_n)\|_{H_0'}\|u_n\|_{H_0'} \geqq \\ \geqq \{N_\varepsilon\pi/M\varrho(u_n)^{p/2}\} + \varrho(u_n)^{p/2}[(N_1 C/2M)\varrho(u_n) - \|u_n\|_{H_0'}^2/M\varrho(u_n)^p + \\ + K_t\|u_n\|_{L'}/M\varrho(u_n)^p] + \{N_1/2M\varrho(u_n)^{p/2}\}\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds\,.$$

L'ipotesi $\varrho(u_n)\to+\infty$ e la (4) implicano che il termine fra parentesi quadre in (5) è positivo per $n\geqq\bar{n}$, $\bar{n}\in\mathbf{N}$. Perciò

$$\|J_t'(u_n)\|_{H_0'} \geqq \{N_1/2M\varrho(u_n)^{p/2}\}\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds$$

e quindi

$$\tag{6} \|J_t'(u_n)\|_{H_0'} \geqq \{N_1/2M\varrho(u_n)^{p-1}\}\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds\,.$$

D'altra parte la (2) ci permette di ottenere facilmente la stima

$$\tag{7} \|\varrho'(u_n)\|_{H_0'} \leqq \{k'/\varrho(u_n)^{p-1}\}\int_0^\pi 1/(a-u_n)^{p+1}\,ds \qquad \exists k'>0\,.$$

Da (6), (7) si ricava facilmente il risultato voluto, ponendo $\nu = N/2Mk'$. □

## 4. – Dimostrazione del teorema.

Non è restrittivo supporre $J_t(u_t) = 0$. Essendo $u_t$ minimo locale stretto per $J_t$, esistono $\sigma$, $\tau > 0$ tali che se $\|u - u_t\|_{H_0^1} = \sigma$ allora $u \in \Lambda$ e $J_t(u) \geqq \tau$. Nelle ipotesi date è inoltre ovvia l'esistenza di elementi $\bar{u} \in \Lambda$ con $J_t(\bar{u}) < 0$. Se adesso definiamo

$$\Gamma = \{\gamma \in C_0([0, 1], \Lambda) : \gamma(0) = u_t,\ \gamma(1) = \bar{u}\}$$

e inoltre $c = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \max\limits_{s \in [0,1]} J_t(\gamma(s))$, allora $c \geqq \tau$ e

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists u_\varepsilon \in \Lambda \text{ tale che } J_t'(u_\varepsilon) = 0 \text{ e } |J_t(u_\varepsilon) - c| < \varepsilon\,. \tag{8}$$

Infatti se questo non vale, $c$ non è nè livello critico nè punto di accumulazione di livelli critici. D'altra parte i risultati del § 3 ci permettono di applicare a $J_t$ il Lemma 1: scelti allora $\bar{\varepsilon} < a/2$ e $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$, otteniamo una deformazione $\eta$ con le proprietà $a$), $b$), $c$) enunciate nel Lemma 1; scelto allora $\gamma \in \Gamma$ con $\max\limits_{s \in [0,1]} J_t(\gamma(s)) \leqq c + \varepsilon$, si pone $\tilde{\gamma}(s) = \eta(1, \gamma(s))$ e si ottiene $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ mentre $\max\limits_{s \in [0,1]} J_t(\tilde{\gamma}(s)) \leqq c - \varepsilon$, in contraddizione con la definizione di $c$. Con ciò (8) è dimostrato, e chiaramente (8) implica l'esistenza di almeno un punto critico diverso da $u_t$. □

Questo lavoro contiene una parte dei risultati ottenuti nella mia tesi di Dottorato. Ringrazio il mio Direttore di Ricerca, Prof. Antonio Ambrosetti, per l'indispensabile apporto di aiuto e di consigli dato all'elaborazione della tesi stessa.

## BIBLIOGRAFIA

[1] H. Amann - P. Hess, *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **84**-A (1979), pp. 145-151.

[2] A. Ambrosetti, *Differential equations with multiple solutions and nonlinear functional analysis*, Equadiff. 82, Lecture Notes in Mathematics, 1017, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York (1983), pp. 10-38.

[3] A. AMBROSETTI, *Elliptic equations with jumping nonlinearities*, Jour. Math. Phys. Sci., **18**-1 (1984), pp. 1-12.

[4] A. AMBROSETTI - G. PRODI, *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*, Ann. di Mat. Pura Appl., IV, **93** (1972), pp. 231-247.

[5] A. AMBROSETTI - P. H. RABINOWITZ, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Jour. Funct. Anal., **14** (1973), pp. 349-381.

[6] V. BENCI, *Normal modes of a Lagrangian system constrained in a potential well*, Ann. Inst. Henry Poincaré, An. Nonlin., **1**-**5** (1984), pp. 379-400.

[7] S. FUČIK - A. KUFNER, *Nonlinear differential equations*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam - Oxford - New York, 1980, p. 275 e segg.

[8] J. L. KAZDAN - F. W. WARNER, *Remarks on some quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), pp. 567-587.

[9] A. C. LAZER - P. J. MC KENNA, *Multiplicity results for a class of semilinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Jour. Math. An. and Appl., **107** (1985), pp. 371-395.

[10] P. J. MC KENNA - W. WALTER, *On the multiplicity of the solution set of some nonlinear boundary value problems*, Nonlin. An., **8**-**8** (1984), pp. 893-907.

[11] S. SOLIMINI, *Existence of a third solutions for a class of BVP with jumping nonlinearities*, Nonlin. An., **7**-**8** (1983), pp. 917-927.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 giugno 1987.