GIULIANO BRATTI

**Su di un teorema di Hartogs**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 79 (1988), p. 59-70
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1988__79__59_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 79 (1988)

# Su di un teorema di Hartogs.

GIULIANO BRATTI (*)

**0.** Il teorema di Hartogs cui il titolo allude è questo:

*Sia $A$ un aperto di $C^n$, $n \geq 2$, e sia $K$ un compatto di $A$ con complementare, $A \sim K$, connesso; ebbene: ogni funzione olomorfa definita su $A \sim K$ ammette un solo prolungamento olomorfo definito su tutto $A$.*

È probabile che la prima estensione di questo teorema sia quella di Francesco Severi, [9], (1); oggi è possibile dare una formulazione generale del teorema di Hartogs, relativamente a fasci soffici (2) di distribuzioni, e di iperfunzioni, che son soluzioni d'un sistema omogeneo di equazioni alle derivate parziali, lineari ed a coefficienti costanti. A tale scopo il mio punto di partenza sarà il Teorema 3 di Gaetano Fichera, [4], pag. 202.

L'oggetto dei successivi paragrafi 1), 2) e 3) è il seguente: 1) enunciato e dimostrazione del teorema di Hartogs per fasci di gruppi; 2) caratterizzazione dei sistemi differenziali lineari, a coefficienti costanti, che hanno soluzioni dell'omogeneo associato *prolungabili*; 3) versione coomologica dei risultati di 2).

(*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico dell'Università, Via Belzoni 7, I-35131 Padova.

(1) Si veda anche la Nota di G. FUBINI: *Un teorema sulle equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico che generalizza un teorema dell'Hartogs e uno del Severi,* sui medesimi Rendiconti di [9].

(2) Per altri tipi di estensioni, si veda [5].

*Nota.* Gli argomenti qui trattati sono già stati oggetto d'una mia conferenza tenuta presso l'I.S.P.J.A.E., Instituto Superior Politecnico « Josè Antonio Echevarria », dell'Avana, Cuba, il 30 di marzo del 1987.

**1.** $X$ sia uno spazio topologico di Hausdorff, unione numerabile di compatti:

$$X = U_j L_j\,, \qquad \mathring{L}_j \subset L_{j+1}\,,$$

dove $\mathring{L}_j$ è l'interno di $L_j$.

$\mathcal{F}$ sia un fascio di gruppi abeliani su $X$; $A$ sia un aperto connesso di $X$, $H$ sia la famiglia di tutti i compatti di $A$, $K_A$ sia una sottofamiglia di $H$ tale che:

$i_1$) *i compatti di $K_A$ invadono $A$;*

$i_2$) *per ogni $K$ in $K_A$ il suo complementare $A \sim K$ è connesso.*

Identificando $\mathcal{F}(A)$ con $\Gamma(A, \tilde{\mathcal{F}})$, dove $\tilde{\mathcal{F}}$ è *lo spazio étalé* associato a $\mathcal{F}$, si pone

$$\mathcal{F}_H(A) = \{w \text{ in } \mathcal{F}(A) \colon \operatorname{supp}(w) \text{ sta in } H\}\,.$$

Sia $P = \|\pi_{i,j}\|$, $1 \leqq i \leqq t$ e $1 \leqq j \leqq s$, una matrice di morfismi di $\mathcal{F}$.

DEFINIZIONE 1. $\mathcal{F}_P(A) = \{f \textit{ in } \mathcal{F}(A)^s \colon Pf = 0\}$.

DEFINIZIONE 2. *$P$ verifica il fenomeno di Hartogs in $A$, rispetto alla famiglia $K_A$ e al fascio $\mathcal{F}$ (brevemente $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$), se:*

*per ogni $K$ in $K_A$ e per ogni $f$ in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ esiste una sola $F$ in $\mathcal{F}_P(A)$ tale che*

$$F_{/(A \sim K)} = f \text{ (3)}.$$

*$F$ si dice la $P$-estensione di $f$.*

LEMMA 1. *Le seguenti proposizioni, $p_1$) e $p_2$), sono equivalenti:*

$p_1$) *per ogni $K$ in $K_A$, ogni $f$ in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ che ammetta $P$-estensioni, ne ammette una sola;*

$p_2$) *se $w$ sta in $\mathcal{F}_H(A)^s$ e $Pw = 0$, allora $w = 0$.*

(3) $F_{/(A \sim K)}$ è l'immagine, mediante l'omomorfismo di restrizione

$$r \colon \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A \sim K)$$

di $F$.

DIMOSTRAZIONE.

$p_1$) *implica* $p_2$): se $\operatorname{supp}(w) \subset K$, con $K$ in $K_A$, e se $Pw = 0$, lo zero di $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ ammetterebbe come $P$-estensione anche la $w$.

$p_2$) *implica* $p_1$): due $P$-estensioni, $F_1$ e $F_2$, della medesima $f$ in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$ darebbero $P(F_1 - F_2) = 0$ e $\operatorname{supp}(F_1 - F_2) \subset K$.

A seguito del Lemma 1, si assume, d'ora in poi, che $P$ verifichi questa ipotesi

$$\text{(I)} \qquad w \text{ in } \mathcal{F}_{H'}(X)^s \text{ e } Pw = 0 \text{ implica } w = 0\,,$$

dove $H'$ è la famiglia di tutti i compatti di $X$.

TEOREMA 1. *$\mathcal{F}$ sia un fascio soffice* (4).

*Le seguenti proposizioni, $p_1$) e $p_2$), sono equivalenti*:

$p_1$) $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$;

$p_2$) *$P$ verifica queste ipotesi*:

$f_1$) *per ogni $w$ in $\mathcal{F}_H(A)^t$ per cui esiste una $f$ in $\mathcal{F}(A)^s$ tale che*

$$Pf = w$$

*esiste pure una $w'$ in $\mathcal{F}_H(A)^s$ tale che $Pw' = w$*;

$f_2$) *se $K$ sta in $K_A$, e $K \subset L_j$, e se la $f$ di $\mathcal{F}_P(X \sim K)$ è tale che $f_{/(X \sim L_j)} = 0$, anche $f_{/(X \sim K)} = 0$.*

DIMOSTRAZIONE.

$p_1$) *implica* $p_2$): per la $f_1$) si ha: se $Pf = w$, $\operatorname{supp}(w) \subset K$, e $K$ sta in $K_A$, allora $f$ sta in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$; se $F$ è la su $P$-estensione risulta

$$P(f - F) = w \qquad \text{e} \qquad \operatorname{supp}(f - F) \subset K\,.$$

Per la $f_2$) si ha: poichè $\mathcal{F}_P(X \sim K) \subset \mathcal{F}_P(A \sim K)$, se $F$ è la $P$-estensione

(4) Si intende che: se $Z$ è un chiuso di $A$, la restrizione

$$r\colon \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(Z) = \varinjlim \{\mathcal{F}(A),\ A \text{ in } F(Z)\}$$

dove $F(Z)$ è il filtro degli intorni aperti di $Z$, è suriettiva.

della $f$ di $\mathcal{F}_P(X \sim K)$ in $A$, la $G$ così definita

$$G = \begin{cases} F\,, & \text{in } A \\ f\,, & \text{in } X \sim K \end{cases}$$

ha supporto compatto contenuto in $L_j$ e soddisfa l'equazione $PG = 0$; in virtù dell'ipotesi (I) su $P$, per cui $P$ non ha radici compatte, risulta $G = 0$, ovvero $f_{/(X \sim K)} = 0$.

$p_2$) *implica* $p_1$): sia $f$ in $\mathcal{F}_P(A \sim K)$, e sia $K_1$ in $K_A$ tale che $K \subset \mathring{K}_1$; ciò è possibile, in virtù delle proprietà della famiglia $K_A$. Visto che $\mathcal{F}$ è soffice, esiste $\bar{f}$ in $\mathcal{F}(A)$ tale che

$$\bar{f}_{/(A \sim \mathring{K}_1)} = f\,,$$

sicchè per la $\bar{f}$ si ha $P\bar{f} = w$, con supp $(w)$ in $K_1$. In virtù dell'ipotesi $f_1$) esiste una $w'$ in $\mathcal{F}_H(A)^s$ tale che $Pw' = w$ e dunque

$$\bar{f} = w' + h$$

con $h$ in $\mathcal{F}_P(A)$. La $h$ coincide con la $\bar{f}$, e dunque con la $f$, in prossimità della frontiera di $A$, cioè in qualche $A \sim K_2$, con $K_2$ in $K_A$. Posto

$$G = \begin{cases} f - h\,, & \text{in } A \sim K \\ \text{zero}\,, & \text{in } X \sim A \end{cases}$$

per la $G$ si ha: $G$ sta in $\mathcal{F}_P(X \sim K)$ e risulta $G_{/(X \sim L_j)} = 0$, per qualche $L_j$. In virtù dell'ipotesi $f_2$) risulta $G_{/(X \sim K)} = 0$, ovvero la $h$ è la $P$-estensione della $f$.

La dimostrazione è conclusa.

Osservazione 1. Se $\mathcal{G}$ è un prefascio su $X$, contenuto in $\mathcal{F}$, e se $P$ è anche un morfismo di $\mathcal{G}^s$ in $\mathcal{G}^t$ allora è immediato verificare che: $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$ implica $P \in H(A, K_A, \mathcal{G})$ non appena $\mathcal{G}$ soddisfi questa ipotesi:

(B) $\qquad f$ in $\mathcal{F}_P(A) \cap \mathcal{G}(A \sim K)^s$ implica $f$ in $\mathcal{G}_P(A)$.

Esempio. Se $= \mathcal{D}'$ è il fascio delle distribuzioni su $X = R^n$ in base a (1) ogni sottofascio $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$, e $\Gamma^d$: rispettivamente il fascio delle funzioni analitiche reali, quello delle funzioni di classe $C^\infty$, ed il fascio delle funzioni della $d$-esima classe di Gvrey, soddisfano la (B), quando $P$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti, o un sistema di tali operatori verificanti l'ipotesi (I).

**2.** In questo paragrafo si applica il teorema precedente ai prefasci di distribuzioni su $X = R^n$, con $P = \|p_{i,j}\|$, $1 \leqq i \leqq t$ e $1 \leqq j \leqq s$, dove i $p_{i,j}$ sono operatori differenziali lineari, a coefficienti costanti.

Sia $Q$ l'algebra dei polinomi in $n$ indeterminate; $P\colon Q^s \to Q^t$ agisca così

$$P(q_1, \ldots, q_s) = \sum_j p_{i,j} q_j\,, \qquad 1 \leqq i \leqq t\,.$$

Posto, seguendo (8),

$$M = \operatorname{cooker}({}^tP) = Q^s/({}^tPQ^t)\,,$$

dove ${}^tP$ è la trasposta di $P$; e posto anche che

(1) $$0 \leftarrow M \leftarrow Q^s \xleftarrow{{}^tP} Q^t \xleftarrow{{}^tP} Q^{t_1} \leftarrow \ldots$$

sia la risoluzione (finita) di Hilbert di $M$, considerata la duale della (1), cioè la

(2) $$0 \to Q^s \xrightarrow{P} Q^t \xrightarrow{P} Q^{t_1} \to$$

indicheremo con $\operatorname{Ext}^p(M, Q)$ il $p$-esimo gruppo di coomologia della (2).

DEFINIZIONE 3. *Il sistema differenziale $P$ si dice determinato se* $\operatorname{Ext}^0(M, Q) = \ker(P) = 0$; *si dice sovradeterminato se* $\operatorname{Ext}^0(M, Q) = \operatorname{Ext}^1(M, Q) = \ker(P_1)/(PQ^s) = 0$.

Sia $A$ un aperto connesso di $R^n$ che ne contenga l'origine. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio di distribuzioni che soddisfi le seguenti ipotesi:

$b_1$) $\mathcal{F}(A)$ contiene una successione $n \to u_n$ di distribuzioni a supporto compatto tale che: $\operatorname{supp}(u_n) \downarrow \{0\}$ e $\lim_n u_n = \delta$, dove $\delta$ è la misura di Dirac, e il limite è calcolato nello spazio delle distribuzioni a supporto compatto $\mathcal{E}'$;

$b_2$) se $w$ sta in $\mathcal{F}_{H'}(R^n)^t$, se $u$ sta in $\mathcal{E}'(R^n)^s$ e se $Pu = w$, anche $w$ sta in $\mathcal{F}(R^n)^t$;

$b_3$) la sequenza

$$\mathcal{F}(R^n)^s \xrightarrow{P} \mathcal{F}(R^n)^t \xrightarrow{P_1} \mathcal{F}(R^n)^{t_1}$$

è esatta.

Esempi di prefasci che soddisfano le $b_1$), $b_2$) e $b_3$) sono: il fascio $\mathcal{E}$ ed il prefascio delle distribuzioni di ordine finito $\mathcal{D}'_F$.

Sia $\Gamma_A$ la famiglia di tutti i compatti convessi di $A$.

TEOREMA 2. *Sia un prefascio di distribuzioni che soddisfa le precedenti ipotesi $b_1$), $b_2$) e $b_3$).*

*Se $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$ si ha:*

*a*) *$P$ è determinato*;

*b*) *$P \in H(A, K_A \cup \Gamma_A, \mathcal{F})$*;

*c*) *$P$ è sovraterminato.*

DIMOSTRAZIONE.

*a*) In virtù dell'ipotesi $b_1$) risulta $\mathcal{F}_H(A) \neq 0$. Se $(q_1, \ldots, q_s)$ sta in $\ker(P)$, scelta la $g$ in $\mathcal{F}_H(A)$ e posto

$$Z = (q_1 g, \ldots, q_s s)$$

si ha $PZ = 0$, che è assurdo in base al Lemma 1.

*b*) Sia $G$ un elemento di $\Gamma_A$, con $G \subset K$ e $K$ in $K_A$. Se $f$ sta in $\mathcal{F}_P(A \sim G) \cap \mathcal{F}_P(A \sim K)$, esiste una sola $F$ in $\mathcal{F}_P(A)$ tale che $F_{/(A \sim K)} = f$. Ovvio che $(\bar{f} - F)$ stia in $\mathcal{F}_P(A \sim G)$.

Sia $T = \{x \text{ in } R^n : x_n \leqq d\}$; sia $G \subset T$ e siano:

$$A' = A \sim G;$$

$$A'_e = \{x \text{ in } A' : x_n > d + e\}, \text{ con } e > 0; \text{ e}$$

$$G_0 = K \cap \{x \text{ in } A' : x_n \geqq d + e\}.$$

Poichè $(f - F)$ sta in $\mathcal{D}'(A')^s$ ed è nulla, e quindi analitica in $A'_e \sim G_0$, ed inoltre $P(f - F) = 0$ in $A'$, in base a (1) la $(f - F)$ risulta analitica su tutto $A'_e$, e dunque nulla. Al variare di $T$, la $(f - F)$ risulta nulla su tutto $A \sim G$, e dunque la $F$ è una $P$-estensione della $f$ su $A$:

$$F_{/(A \sim G)} = f .$$

*c*) Sia $(q_1, \ldots, q_t)$ in $\ker(P_1)$. Considerata la successione delle $u_n$, di cui all'ipotesi $b_1$), per la successione

$$(q_1 u_n, \ldots, q_t u_n)$$

si ha, in base all'ipotesi $b_3$): esiste $(v_1^n, \ldots, v_s^n)$ in $\mathcal{F}(\mathbf{R}^n)^s$ tale che

$$\sum_j p_{i,j} v_j^n = q_i u_n , \qquad 1 \leqq i \leqq t ;$$

in virtù della $f_2$) del Teorema 1 (per la validità della quale non è necessario nè che $\mathcal{F}$ sia soffice, nè che sia un fascio), esiste $(w_1^n, \ldots, w_s^n)$ in $\mathcal{F}_H(A)^s$ per cui si ha, ancora

$$\sum_j p_{i,j} w_j^n = q_i u_n , \qquad 1 \leqq i \leqq t .$$

Se $\Delta$ è un minore di $P$, d'ordine $s$, con $\det(\Delta) = D \neq 0$ (esiste, visto che $P$ è determinato), risulta $D w_j^n = R_j(u_n)$, sicchè si può supporre che il $\operatorname{supp}(w_j^n)$ sia contenuto nel $\operatorname{supp}(u_n)$. Ora, se $f$ sta in $\mathcal{E}(R^n)$ e se ${}^tDg = f$, con $g$ in $\mathcal{E}(R^n)$, si ha

$$\lim_n \langle w_j^n, f \rangle = \lim_n \langle D w_j^n, g \rangle = \lim_n \langle R_j(u_n), g \rangle = \langle R_j(\delta), g \rangle ,$$

così che la successione delle $w_j^n$ converge, in $\mathcal{E}'(R^n)$, verso la $r_j$. Ovvio che $\operatorname{supp}(r_j) \downarrow \{0\}$, e dunque, con la trasformata di Fourier, si ottiene

$$\sum_j p_{i,j}(x)\, r_j(x) = q_i(x) , \qquad 1 \leqq i \leqq t .$$

Ciò dimostra che $PQ^s = \ker(P_1)$, ovvero che $\operatorname{Ext}^1(M, Q) = 0$.
La dimostrazione è conclusa.

TEOREMA 3. *Sia $\mathcal{F}$ un fascio soffice di distribuzioni, che soddisfa le ipotesi $b_1$), $b_2$) e $b_3$).*

*Le seguenti proposizioni,* $p_1$) *e* $p_2$), *sono equivalenti*:

$p_1$) $P \in H(A, K_A, \mathcal{F})$;

$p_2$) *P soddisfa l'ipotesi* $f_2$) *del Teorema* 1; *inoltre* $\mathrm{Ext}^1(M, Q) = 0$.

DIMOSTRAZIONE.

$p_1$) *implica* $p_2$): è conseguenza del Teorema 1 e del Teorema 2.

$p_2$) *implica* $p_1$): basta provare che $P$ soddisfa l'ipotesi $f_1$) del Teorema 1.

Sia, dunque, $w$ in $\mathcal{F}_H(A)^t$ e sia $Pf = w$, con $f$ in $\mathcal{F}(A)^s$. Ovvio che $w$ stia in $\ker(P_1)$, sicchè, in base all'ipotesi $b_3$) si può supporre, direttamente, che la $f$ stia in $\mathcal{F}(R^n)^s$. Sia $G_0$ la copertura convessa del $\mathrm{supp}(w)$; si ha: $f$ sta in $\mathcal{F}_P(R^n \sim G_0)$; in virtù del Coroll. 3 di (8), pag. 394, esiste una $F$ in $\mathcal{D}'_P(R^n)$ tale che

$$F_{/(\mathbb{R}^n \sim G_0)} = f .$$

Poichè $P(f - F) = w$ e $\mathrm{supp}(f - F)$ è compatto, in virtù dell'ipotesi $b_2$) si ha che $(f - F)$ sta in $\mathcal{F}(R^n)$, e dunque anche la $F$ vi sta. Per l'ipotesi $f_2$), il $\mathrm{supp}(f - F)$ deve stare in $A$.

La dimostrazione è conclusa.

Il prossimo teorema mostra la rilevanza della famiglia di compatti $K_A$ nello studio del fenomeno di Hartogs per il sistema differenziale $P$.

$P$ sia del tipo $P = \|p_{i,1}\|$, con $i \geqq 2$; gli operatori $p_{i,1}$ siano omogenei. Per questo tipo di sistemi differenziali vale il

TEOREMA 4. *Le seguenti proposizioni,* $p_1$) *e* $p_2$), *sono e quivalenti*:

$p_1$) *P è ellittico e* $P \in H(A, K_A, \mathcal{E})$;

$p_2$) $P \in H(A, H_A, \mathcal{E})$, *dove* $H_A$ *è la famiglia di tutti i compatti di A che hanno complementare connesso.*

DIMOSTRAZIONE.

$p_1$) *implica* $p_2$): l'ellitticità di $P$ implica che è soddisfatta l'ipotesi $f_2$) del Teorema 1 relativamente alla famiglia $H_A$; che sia soddisfatta anche la $f_1$) dipende da $P \in H(A, K_A, \mathcal{E})$.

$p_2$) *implica* $p_1$): supponiamo d'aver dimostrato che se $P$ non è ellittico esiste un vertore $N = (0, \ldots, 0, 1)$ per cui si ha $P_{i,1}(N) = 0$,

$i \geqq 2$. Allora si può concludere così: sia $K$ definito da

$$K = \{x \text{ in } A : a \leqq |x| \leqq b \text{ e } x_n > 0\} ;$$

scelta la $f$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ in modo che $f(t) > 0$, se $t > 0$, $f(t) = 0$, se $t < 0$, per la funzione

$$u(x) = \begin{cases} f(\langle x, N \rangle) , & \text{se } |x| \leq a \\ \text{zero} , & \text{se } x \in R^n \sim K_1 \end{cases}$$

dove $K_1 = \{x \text{ in } R^n : |x| \leqq b \text{ e } x_n \geqq 0\}$, si ha: $u$ sta in $\mathcal{E}_P(R^n \sim K)$, $u_{/(\mathbb{R}^n \sim L_j)} = 0$, se $L \subset K_1$, ma $u(x) \neq 0$; ciò implica che $P$ non verifica l'ipotesi $f_2)$ relativamente alla famiglia $H_A$, il che è assurdo. Dunque $P$ deve essere ellittico, sicché soddisfa l'ipotesi $f_2)$ rispetto ad ogni famiglia $K_A$, ed inoltre, per l'ipotesi, $P$ verifica anche la $f_1)$ del Teorema 1.

Per concludere: se $\deg(p_{i,1}) = n_i \geqq 1$; se $m$ è il minimo comune multiplo degli $n_i$, il polinomio

$$p = \sum_i (p_{i,1} \overline{p}_{i,1})^{(m/n_i)} ,$$

dove $\overline{p}_{i,1}$ è il coniugato di $p_{i,1}$, è somma di quadrati di grado $m$, e quindi ha come caratteristiche reali solo quelle comuni ad ogni $p_{i,1}$; se $P$ non è ellittico, nemmeno $p$ lo è.

La dimostrazione è conclusa.

OSSERVAZIONE 2.

In base al teorema precedente si ha: se $P = \|D_{x_i}\|$, $1 \leqq i \leqq n$, $P$ verifica il fenomeno di Hartogs

$$H(R^{n+1}, K_{R^{n+1}}, \mathcal{E}) ,$$

dove $K_{R^{n+1}}$ è la famiglia delle sfere di $R^{n+1}$, di centro 0 e raggio qualunque, ma non soddisfa il fenomeno di Hartogs

$$H(R^{n+1}, H_{R^{n+1}}, \mathcal{E})$$

poichè $P$ non è ellittico.

**3.** In base ai risultati di (6) è possibile dare un'interpretazione coomologica dei Teoremi 2 e 3 relativamente ai fasci di iperfunzioni.

Sia $A$ un aperto convesso di $R^n$; sia $P$ una matrice differenziale, e sia $\mathcal{B}$ un fascio soffice di iperfunzioni su $R^n$ che soddisfa queste ipotesi

$F_1$) $\Gamma_*(R^n, \mathcal{B}_P) = 0$, cioè l'equazione $Pu = 0$ non ha soluzioni, con supporto compatto, in $\mathcal{B}$;

$F_2$) $H^1(R^n, \mathcal{B}_P) = 0$.

TEOREMA 5. *Le seguenti proposizioni, $p_1$), $p_2$) e $p_3$), sono equivalenti:*

$p_1$) $P \in H(A, K_A, \mathcal{B})$;

$p_2$) *$P$ verifica l'ipotesi $f_2$), relativamente alla famiglia $K_A$, del Teorema 1; inoltre per ogni $G$ in $\Gamma_A$, si ha*

$$H^1_G(A, \mathcal{B}_P) = 0\,;$$

$p_3$) *per ogni $K$ in $K_A$ si ha*

$$H^1_K(A, \mathcal{B}_P) = 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE.

$p_3$) *implica* $p_1$): in base al teorema di excisione, e vista l'ipotesi $F_1$), la sequenza

$$0 \to H^0(A, \mathcal{B}_P) \to H^0(A \sim K, \mathcal{B}_P) \to 0$$

è esatta; dunque $P \in H(A, K_A, \mathcal{B})$.

$p_1$) *implica* $p_2$): incominciamo col dimostrare che $P$ verifica l'ipotesi $f_2$) del Teorema 1 relativamente alla famiglia $\Gamma_A$.

Sia $G_0$ in $\Gamma_A$; sia $f$ in $\mathcal{B}_P(R^n \sim G_0)$ e sia $f_{/(\mathbf{R}^n \sim L_j)} = 0$.
Sia $F$ l'iperfunzione su $R^n$ tale che

$$F_{/(\mathbf{R}^n \sim G_0)} = f\,;$$

ovvio che $\operatorname{supp}(F) \subset L_j$ e che se $PF = w$, $\operatorname{supp}(w) \subset G_0$. Dimostriamo che anche $\operatorname{supp}(F) \subset G_0$.

Sia $\mathcal{A}(G_0)$ lo spazio delle funzioni analitiche su $G_0$ e $\mathcal{A}'(G_0)$ il suo duale; se si dimostra che $w$ sta in $P(\mathcal{A}'(G_0))$, che è chiuso in $\mathcal{A}'(G_0)$, per la convessità di $G_0$, in virtù della $F_1$) $\operatorname{supp}(F) \subset G_0$. In base al Teorema di Hahn-Banach, se così non fosse, esisterebbe una $f$ in $\mathcal{A}(G_0)$ tale che $\langle w, f\rangle = 1$ e ${}^tPf = 0$. Sia $V$ un intorno convesso, in $R^{2n}$, sul quale la $f$ si prolunga, nella $f_0$, come funzione olomorfa, che ancora soddisfa, su $V$, l'equazione $Pf = 0$. Se $S = \{{}^tP, \bar\partial\}$, dove $\bar\partial$ è il sistema di Cauchy-Riemann, in base al Th. 3 di (8), pag. 305, la restrizione

$$r\colon \mathcal{C}^\infty_S(R^n) \to \mathcal{C}^\infty_S(V)$$

ha immagine densa, così che

$$\langle w, f\rangle = \langle w, f_0\rangle = \lim_n \langle w, f_n\rangle = \lim_n \langle (PF), f_n\rangle = \lim_n \langle F, {}^tPf_n\rangle = 0\,,$$

se $\lim_n f_n = f_0$ in $\mathcal{A}(G_0)$.

Ciò dimostra che $P \in H(A, \Gamma_A, \mathcal{B})$. Ancora in base al teorema di excisione, ed in base all'ipotesi $F_2$), la sequenza

$$0 \to H^0(A, \mathcal{B}_P) \xrightarrow{a} H^0(A \sim G, \mathcal{B}_P) \xrightarrow{b} H^1_G(A, \mathcal{B}_P) \to 0$$

è esatta per ogni $G$ in $\Gamma_A$; poichè $a$ è suriettiva, deve essere $b = 0$, e dunque $H^1_G(A, \mathcal{B}_P) = 0$.

$p_2$) *implica* $p_3$): sia $K$ un compatto di $K_A$ e sia $G$ in $\Gamma_A$ con $K \subset G$. Il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H^0(A, \mathcal{B}_P) & \xrightarrow{a} & H^0(A \sim K, \mathcal{B}_P) & \xrightarrow{b} & H^1_K(A, \mathcal{B}_P) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & & & \\ 0 & \to & H^0(A, \mathcal{B}_P) & \xrightarrow{a'} & H^0(A \sim G, \mathcal{B}_P) & \to & 0 & & \end{array}$$

dove $j$ è l'identità e $r$ è la restrizione canonica, che è iniettiva in virtù dell'ipotesi $f_2$) ([5]), è tale che $a'$ è suriettiva e la prima riga è esatta. Ora, se $f$ sta in $H^0(A \sim K, \mathcal{B}_P)$ esiste $g$ in $H^0(A, \mathcal{B}_P)$ tale che

$$a'(j(g)) = r(f)\,,$$

([5]) Infatti, se $r(f) = 0$ posto $F = f$, in $A \sim K$, e $F = 0$, in $R^n \sim A$, risulta che $G$ sta in $\mathcal{B}_P(R^n \sim K)$ e $G/R^n \sim L_j = 0$, se $L_j$ contiene $G$.

e dunque $r(a(g)) = r(f)$, cioè $a(g) = f$. Ciò dimostra che la $a$ è suriettiva, quindi $b = 0$, ovvero $H_K^1(A, \mathcal{B}_P) = 0$.

La dimostrazione è conclusa.

## BIBLIOGRAFIA


[1] J. Boman, *Propagation of analyticity of solutions of differential equations*, Ark. Math., **5** (1964), pp. 271-279.

[2] G. Bratti, *A proposito di un esempio di Fichera relativo al fenomeno di Hartogs*, Rend. Acc. Naz. delle Scienze, Serie V, Vol. X, Parte I, (1986), pp. 241-246.

[3] L. Eherenpreis, *A new prof and extension of Hartogs theorem*, Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961), pp. 507-509.

[4] G. Fichera, *Sul fenomeno di Hartogs per gli operatori lineari alle derivate parziali*, Ist. Lomb. (Rend. Sc.), A-**117** (1983), pp. 199-211.

[5] A. Kaneko, *Note on continuation of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients*, Proc. Jap. Acad., **51** (1975), pp. 262-265.

[6] H. Komatsu, *Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations*, Lect. Notes in Math., **287** (1973), pp. 193-261.

[7] B. Malgrange, *Systéme differentiels à coefficients constant*, Séminare Bourbaki, **15**, No. 246, (1962-1963).

[8] V. P. Palamodov, *Linear differential operators with constant coefficients*, Springer-Verlag, 1970.

[9] F. Severi, *Una proprietà fondamentale dei campi di olomorfismo di una funzione analitica di una variabile reale e di una variabile complessa*, Rend. della Reale Accademia Nazionale dei Lincei, Vol. XV, (1932), pp. 487-490,


Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1987.